

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A+B)$

b) Calcula el determinante de $2A^{-1}(A+B)^t$, siendo $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $(A+B)$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $A+B$

$$A+B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$(A+B)^{-1} = \frac{((A+B)^d)^t}{|A+B|} = \frac{\begin{pmatrix} -10 & 20 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t}{24} = \frac{\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{24} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que:

- Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}|$

- $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

- $|(A+B)^t| = |(A+B)|$

Por lo tanto:

$$|2A^{-1}(A+B)^t| = |2A^{-1}| \cdot |(A+B)^t| = 2^3 |A^{-1}| \cdot |(A+B)^t| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |(A+B)| = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 24 = 48$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que $ABX - 2C = CX$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$ABX - 2C = CX \Rightarrow ABX - CX = 2C \Rightarrow (AB - C)X = 2C \Rightarrow (AB - C)^{-1}(AB - C)X = (AB - C)^{-1}2C \Rightarrow \\ \Rightarrow X = (AB - C)^{-1}2C$$

$$AB - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 9 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa:

$$(AB - C)^{-1} = \frac{((AB - C)^d)^t}{|AB - C|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 15 & 12 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (AB - C)^{-1}2C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -15 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -40 & 38 & -24 \\ -30 & 30 & -20 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A \cdot A^t - 2A = I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).

b) Calcula A^{-1} .

c) Determina, si existe, la matriz X que verifica $XA + I = 3A$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$a) A \cdot A^t - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Calculamos la inversa .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz X .

$$XA + I = 3A \Rightarrow XX = A = 3A - I \Rightarrow XA \cdot A^{-1} = (3A - I) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (3A - I) \cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz X .

$$X = (3A - I) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz 3×3 tal que $\det(2A) = 8$.

a) ¿Cuánto vale $\det(A)$?

b) Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $\det(B)$?

c) Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que $\det(2A) = 8$,

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \Rightarrow |A| = 1$

b) $|B| = 3 \cdot (-1) \cdot |A| = 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -3$

c) Calculamos el determinante de la matriz $2A$

$$|2A| = 2 \begin{vmatrix} 2x & 2 & 2 \\ 2x+2 & 4 & 4 \\ 2x & -2x+4 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Para $m = 1$, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + I = B$, siendo I la matriz identidad.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = -m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 2$$

Luego, no tiene inversa para los valores de $m = 0$ y $m = 2$

b) Calculamos la inversa de A para $m = 1$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X .

$$A^{-1}XA + I = B \Rightarrow A^{-1}XA = B - I \Rightarrow A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot (B - I) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot (B - I) \cdot A^{-1}$$

Calculamos la matriz X .

$$\begin{aligned} X = A \cdot (B - I) \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de k .

b) Para $k=1$, calcula el determinante de $2(A^t \cdot A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} = 2k^3 + 3k^2 + k = 0 \Rightarrow k = 0; k = -1; k = -\frac{1}{2}$$

Calculamos el rango de la matriz para cada caso.

Para $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $k = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $k \neq 0, -1, -\frac{1}{2} \Rightarrow R(A) = 3$

b) Calculamos el determinante que nos piden

Sabemos que: $|A^t| = |A|$; $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; $|m \cdot A| = m^n |A|$ siendo n el orden de la matriz.

Por lo tanto:

$$\left| 2(A^t \cdot A^{-1})^{2017} \right| = \left| (2 \cdot A^t) \cdot (A^{-1}) \cdot (A^t \cdot A^{-1})^{2016} \right| = 2^3 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \left(|A| \cdot \frac{1}{|A|} \right)^{2016} = 8$$