

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } D = (4 \quad -5 \quad 6)$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que: $A^2 X - BA + X = CD$
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2 X - BA + X = CD \Rightarrow A^2 X + X = CD + BA \Rightarrow (A^2 + I)X = CD + BA \Rightarrow X = (A^2 + I)^{-1}(CD + BA)$$

Calculamos $A^2 + I$

$$A^2 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

$$\text{Calculamos } (A^2 + I)^{-1} = (2 \cdot I)^{-1} = 2^{-1} \cdot I^{-1} = \frac{1}{2} \cdot I$$

Luego:

$$\begin{aligned} X &= (A^2 + I)^{-1}(CD + BA) = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (CD + BA) = \frac{1}{2} \cdot (CD + BA) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad -5 \quad 6) + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -8 & 10 & -12 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -9 & 9 & -12 \\ 13 & -13 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = (1 \ 1 \ 2)$

a) Calcula A^{2018} .

b) Determina, si existe, la matriz X que verifica $A(X + 2I) = BC$ donde I es la matriz identidad.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 2018 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Si multiplicamos los dos términos de la ecuación por A^{-1} a la izquierda, nos queda:

$$A \cdot (X + 2I) = BC \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (X + 2I) = A^{-1} \cdot B \cdot C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot C - 2I$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B \cdot C - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 2) - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 2) - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula los

siguientes determinantes e indica las propiedades que utilices:

a) El determinante de la matriz $5M^4$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $|k \cdot A_n| = k^n \cdot |A|$ y que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, luego:

$$|5M^4| = |5M \cdot M \cdot M \cdot M| = |5M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| = 5^3 |M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| = 5^3 \cdot 2^4 = 2000$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

Propiedades aplicadas

- Si en un determinante se intercambian dos líneas, el determinante cambia de signo
- Para multiplicar un determinante por un número basta con multiplicar una línea.

$$c) \begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 2$$

Propiedades aplicadas

- Si una línea de una determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes. En el primero ponemos el primer sumando y en el segundo el segundo sumando.
- Si un determinante tiene dos líneas iguales, el determinante vale 0.
- El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la inversa de A .

b) Determina los valores de m tales que $(A - mI)$ tiene inversa (I es la matriz identidad).

c) Calcula el rango de $(A - 2I)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz $A - mI = \begin{pmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -m & -1 & -2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix} = -m^3 + 5m^2 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow m = 1; m = 2$$

Luego, tiene inversa para todos los valores de $m \neq 1$ y 2

c) Calculamos el rango de $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A - 2I) = 2$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de a , b y c para que las matrices A y B conmutan.

b) Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} y A^{2018} .

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si conmutan, se tiene que cumplir que $A \cdot B = B \cdot A$, luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0; c = -1$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$

$$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = (A^2)^{1008} \cdot A = (I)^{1008} \cdot A = A$$

$$A^{2018} = (A^2)^{1009} = (I)^{1009} = I$$

c) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A \cdot A = I \Rightarrow A = A^{-1}$