EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2019

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos:

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}$$

Además sabemos que:

$$a + d = 1$$
$$|X| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow ad - bc = 1$$

Resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones obtenidas:

$$\left.\begin{aligned} b &= -c \\ a &= d \\ a + d &= 1 \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a = 1 \Rightarrow a = d = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$$

Luego, la matriz X puede ser: $X = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ ó $X = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de *m* para los cuales *A* tiene inversa.

b) Para $m=2$, encuentra la matriz *X* que cumple $AX-BB^t=I$, siendo B^t la matriz traspuesta de *B* e *I* la matriz identidad de orden 3

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz *A* tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m+m-1-m-m^2+m=0\Rightarrow -m^2+2m-1=0\Rightarrow m=1$$

Por lo tanto, la matriz *A* tendrá inversa para todos los valores de $m\neq 1$.

b) Calculamos la matriz inversa de *A*.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz *X*.

$$AX-BB^t=I\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(I+BB^t)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ **de la que se sabe que tiene determinante 5.**

a) Calcula, indicando las propiedades que utilices, los determinantes de las matrices siguientes: $3A$ **y** $\begin{pmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{pmatrix}$**.**

b) Si B **es otra matriz cuadrada de orden 3 y tiene determinante 4, calcula, indicando también las propiedades que utilices, el determinante de la matriz** $B A^{-1}$**.**

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|3A| = (3)^3\cdot |A| = 27\cdot 5 = 135$

$$\begin{vmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & d & g \\ 2b & e & h \\ 2c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 3a & g \\ 2b & 3b & h \\ 2c & 3c & i \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2\cdot |A^t| = 2\cdot 5 = 10$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si todos los elementos de una línea están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes que tienen los mismos elementos que el determinante dado, excepto los correspondientes a aquella línea que en el primer determinante está formada por los primeros sumandos y en el segundo por los segundos".
En el segundo paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".
En el tercer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "el determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta"

b) $|B\cdot A^{-1}| = |B|\cdot |A^{-1}| = |B|\cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{4}{5}$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad que dice: "el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada matriz"

En el segundo paso hemos aplicado la propiedad: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple $AX=\left(A^{-1}A^{t}+I\right)^{2}$, siendo A^{t} la matriz traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

La matriz A es simétrica, ya que $A=A^{t}$. Luego:

$$AX=\left(A^{-1}A^{t}+I\right)^{2}\Rightarrow AX=\left(A^{-1}A+I\right)^{2}\Rightarrow AX=\left(I+I\right)^{2}\Rightarrow AX=\left(2I\right)^{2}\Rightarrow AX=4I^{2}$$

Despejamos la matriz X: $AX=4I^{2}\Rightarrow A^{-1}AX=4A^{-1}I^{2}\Rightarrow X=4A^{-1}I^{2}$

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1}=\frac{(A^{d})^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -6\end{pmatrix}^{t}}{4}=\frac{\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -6\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$X=4A^{-1}\cdot I^{2}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -6\end{pmatrix}$$