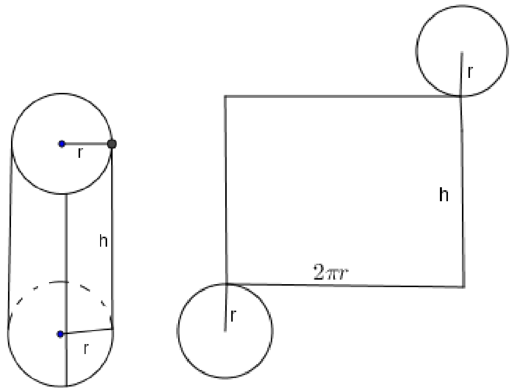
Opción A

Ejercicio 1 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

[2'5 puntos] Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de 20π m^3. El material para las tapas cuesta 10 euros cada m^2 y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m^2. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

Solución



El material para las tapas cuesta 10 euros cada m^2 y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m^2.
Área circula: πr^2; longitud circunferencia = $2\pi r$.

Función a maximizar: Coste = C = $(2\pi r)\cdot(h)\cdot(8\text{ €}) + 2\cdot(\pi r^2)\cdot(10\text{ €}) = 16\pi r\cdot h + 20\pi r^2$

Relación entre las variables Volumen = V = (área base).altura = $(\pi r^2).h = 20\pi$, de donde $h = \frac{20\pi}{\pi r^2} = \frac{20}{r^2}$.

Función a maximizar: $C(r) = 16\pi r\cdot h + 20\pi r^2 = 16\pi r\cdot\left(\frac{20}{r^2}\right) + 20\pi r^2 = \left(\frac{320\pi}{r}\right) + 20\pi r^2$

Si C'(b) = 0 y C''(b) > 0, x = b es un mínimo de C(r)

$C'(r) = \left(\frac{-320\pi}{r^2}\right) + 40\pi r$. De C'(r) = 0, tenemos $40\pi r = \frac{320\pi}{r^2}$, es decir $r^3 = 8$, de donde $r = \sqrt[3]{8} = 2$ m.

La altura del depósito es: $h = \frac{20}{2^2} = 5$ m.

Veamos que r = 2 es un mínimo, viendo que C''(2) > 0

$C'(r) = \left(\frac{-320\pi}{r^2}\right) + 40\pi r. = -320\pi r^{-2} + 40\pi r.$

$V'(r) = -2\cdot(-320\pi r^{-2-1}) + 40\pi = 640\pi r^{-3} + 40\pi = \left(\frac{640\pi}{r^3}\right) + 40\pi.$

Sustituyendo "2" por "r" en C''(r) obtenemos $C''(2) = \left(\frac{640\pi}{8}\right) + 40\pi = 80\pi + 40\pi = 120\pi > 0$, luego es un mínimo.

Las dimensiones pedidas son radio = r = 2 m, y altura = h = 5 m.

Ejercicio 2 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Sea $I = \int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}dx$.

a) [1'25 puntos] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 2 + \sqrt{x+1}$.
b) [1'25 puntos] Calcula el valor de I.

Solución

(a) y (b)
Cambio $t = 2 + \sqrt{x+1}$, de donde $t - 2 = \sqrt{x+1}$, es decir $(t-2)^2 = x + 1$.
Diferenciando tenemos: $dx = 2(t-2)\cdot dt$
Si x = 0 tenemos $t = 2 + \sqrt{0+1} = 3$. Si x = 8 tenemos $t = 2 + \sqrt{8+1} = 5$.
La integral es $I = \int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}dx = \int_3^5 \frac{2(t-2)}{t}dt = \int_3^5 \frac{2t-4}{t}dt = \int_3^5 \left(\text{Cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}\right)dt.$
Vemos que es una integral racional, calcularemos primero la división entera:

2t - 4	t (divisor)
-2t	2 (cociente)
-4 (Resto)	

(b)

$$= \int_3^5 \frac{2t - 4}{t}\,dt = \int_3^5 \left(\text{Cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}\right)dt = \int_3^5 \left(2 + \frac{-4}{t}\right)dt = \left[2t - 4\ln|t|\right]_3^5 = (10 - 4\cdot\ln(5)) - (6 - 4\cdot\ln(3)) =$$

$$= 4 - 4\cdot\ln(5) + 4\cdot\ln(3) = 4 + 4\cdot\ln(3) - 4\cdot\ln(5) = 4 + 4\cdot(\ln(3) - \ln(5)) = 4 + 4\cdot\ln(3/5) \cong 1'9567$$

Ejercicio 3 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0'5 puntos] Comprueba que $AA^t - 2A = I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).
b) [0'75 puntos] Calcula A^{-1}.
c) [1'25 puntos] Determina, si existe, la matriz X que verifica $XA + I = 3A$.

Solución

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Comprueba que $AA^t - 2A = I$ (A^t denota la traspuesta de A e I la matriz identidad).

$$A\cdot A^t - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\cdot$$

b)
Calcula A^{-1}.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (1) = -1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = -1$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

c)
Determina, si existe, la matriz X que verifica $XA + I = 3A$.

De $AX + I = 3A$, tenemos $AX = 3A - I$. Multiplicando por la izquierda, la expresión anterior, por A^{-1}, tenemos:

$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot(3A - I) \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(3A - I) \rightarrow X = A^{-1}\cdot(3A - I)$.

Luego $\mathbf{X} = A^{-1}\cdot(3A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\left(3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

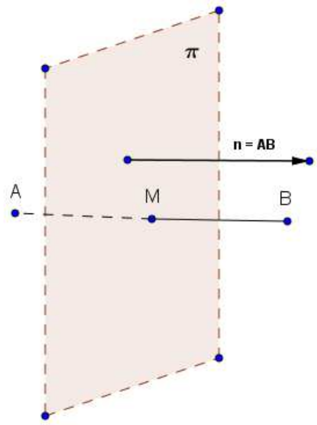
Ejercicio 4 opción A, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera los puntos A(-1,-2,-1) y B(1,0,1).
a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.
b) [1'25 puntos] Calcula la distancia de P(-1,0,1) a la recta que pasa por los puntos A y B.

Solución

Considera los puntos A(-1,-2,-1) y B(1,0,1).
a)
Determina la ecuación del plano π respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

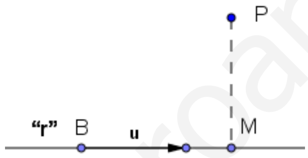
El plano π que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene vector normal el **AB**, es decir nos piden el plano mediador del segmento AB.



A(-1,-2,-1) y B(1,0,1).
AB = **b** – **a** = (2,2,2). Otro vector normal sería **n** = (1,1,1).
El punto medio del segmento AB es M((-1+1)/2,(-2+0)/2,(-1+1)/2) = M(0,-1,0).

Un plano paralelo a π es $x + y + z + K = 0$, como $M \in \pi \rightarrow 0 – 1 + 0 + K = 0$, de donde K = 1 y **el plano pedido es $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0$.**
b)
Calcula la distancia de P(-1,0,1) a la recta que pasa por los puntos A y B.

Sabemos que la distancia del punto P a recta r, determinada por A y B [Tomamos como punto el B(1,0,1) y como vector director el **u** =(1,1,1)], es la mínima distancia del punto P a la recta, es decir d(P,M) = ||**PM**||, siendo M la proyección ortogonal de P sobre r



Tomamos punto genérico M de la recta (en vectorial), formamos el vector **PM** y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el **PM** y otro el director **u** de la recta "r".

La recta "r" en la forma vectorial (punto B(1,0,1) y vector **u** = (1,1,1)) es "r" ≡ $(1+\lambda, \lambda, 1+\lambda)$

Tomamos un punto genérico de la recta $M(1+\lambda, \lambda, 1+\lambda)$, formamos el vector **PM** = $(1+\lambda-(-1), \lambda-0, 1+\lambda-1)$ =
= $(2+\lambda, \lambda, \lambda)$ y le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta "r", es decir a su vector de dirección **u** = (1,1,1), por tanto su producto escalar (•) tiene que ser cero.

PM•u = 0 $\rightarrow$ $(2+\lambda, \lambda, \lambda)\bullet(1,1,1) = 0 = 3\lambda + 2 = 0$, de donde $\lambda = -2/3$ y el vector **PM** es:
PM = (2+(-2/3), (-2/3), (-2/3)) = (4/3,-2/3,-2/3), luego d(P;r) = d(P;M) = ||**PM**|| = $\sqrt{(4/3)^2+(2/3)^2+(2/3)^2}$ u^1 =
= $\sqrt{8/3}$ u^1.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

[2'5 puntos] Considera la función $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en (0,1) y su gráfica un punto de inflexión en (1,-1).

Solución

Considera la función $f : R \rightarrow R$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en (0,1) y su gráfica un punto de inflexión en (1,-1).

Sabemos que las funciones polinómicas, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, son continuas y derivables las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un extremo relativo en el punto (0,1), sabemos que $f'(0) = 0$.

Como pasa por él punto (0,1) tenemos que $f(0) = 1$.

Como tiene un punto de inflexión en el punto (1,-1), sabemos que $f''(1) = 0$.

Como pasa por él punto (1,-1) tenemos que $f(1) = -1$.

Tenemos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.

De $f'(0) = 0$, tenemos $f'(0) = 0 + 0 + c = 0$, por tanto **c = 0**.
De $f''(1) = 0$, tenemos $f''(1) = 6a(1) + 2b = 0$, por tanto **3a + b = 0** $\rightarrow$ **b = -3a**.
De $f(0) = 1$, tenemos $f(0) = 0 + 0 + 0 + d = 1$, de donde **d = 1**.
De $f(1) = -1$, tenemos $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + 0 + 1 = -1$, por tanto **a + b = -2**.
De **a + b = -2 = a – 3a = - 2a,** tenemos **a = 1,** con lo cual **b = -3(1) = -3**

Los números encontrados son a = 1, b = -3, c = 0 y d = 1.

La función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Ejercicio 2 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.
a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.
b) [0'75 puntos] Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.
c) [1 punto] Calcula el área.

Solución

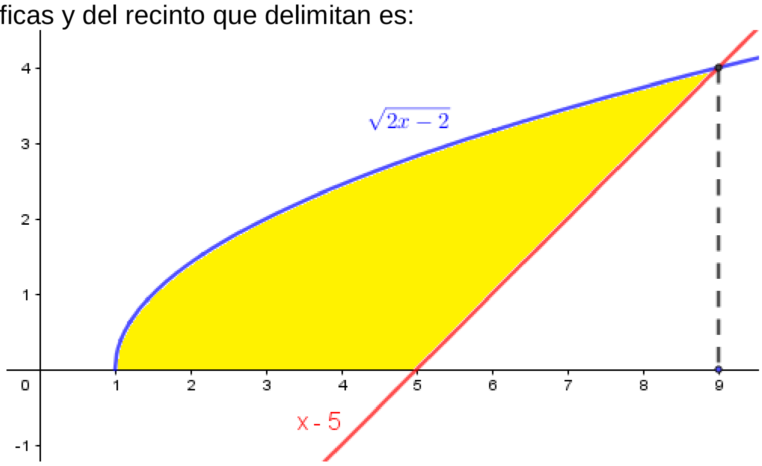
Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.
a)
Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.

Con dos puntos, podemos dibujar una recta.

El eje de abscisa tiene de ecuación $y = 0$, resolvemos la ecuación $0 = x – 5$, de donde $x = 5$; es decir la recta $y = x – 5$ y el eje de abscisa se cortan en el punto (5,0).

La gráfica de $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ es parecida a la de $\sqrt{x}$ (también es una parábola, pero horizontal en este caso).
Vemos que $f(1) = \sqrt{2 - 2} = 0$, $f(3) = \sqrt{4} = 2$, etc..
Veamos el corte de $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ con la recta $y = x - 5$.
De $\sqrt{2x - 2} = x – 5 \rightarrow 2x – 2 = (x – 5)^2 = x^2 – 10x + 25 \rightarrow 0 = x^2 – 12x + 27 \rightarrow$
$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{12 \pm 6}{2}$, de donde $x = 3$ y $x = 9$.
Comprobamos las soluciones:
Para $x = 3 \rightarrow \sqrt{2(3) - 2} = 3 – 5 \rightarrow 2 = -2$, **lo cual es falso, x = 3 NO VALE.**
Para $x = 9 \rightarrow \sqrt{2(9) - 2} = 9 – 5 \rightarrow 4 = 4$, **lo cual es cierto, x = 9 SI VALE.**

Un esbozo de sus gráficas y del recinto que delimitan es:



b)
Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.

Área = $\int_1^9 \sqrt{2x-2}\,dx - \int_5^9 (x-5)dx$

c)
Calcula el área.

Calculamos cada integral por separado:

La primera integral es por cambio, $2x - 2 = t^2$.

$$I_1 = \int_1^9 \sqrt{2x-2}\cdot dx = \left\{\begin{array}{l} 2x-2=t^2;\ \text{si } x=1,\ t=0 \\ 2dx = 2tdt;\ \text{si } x=9,\ t=4 \\ dx = t\cdot dt \end{array}\right\} = \int_0^4 t\cdot tdt = \int_0^4 (t^2)dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4^3}{3} - 0 = \frac{64}{3}$$

$$I_2 = \int_5^9 (x-5)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^9 = \left(\frac{9^2}{2} - 5(9)\right) - \left(\frac{5^2}{2} - 5(5)\right) = 8$$

El área pedida es $I_1 - I_2 = (64/3 - 8)\ u^2 = 40/3\ u^2 \cong 13'333333\ u^2$

Ejercicio 3 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Sea A una matriz 3×3 tal que det(2A) = 8.
a) [0'5 puntos] ¿Cuánto vale det(A)?
b) [0'75 puntos] Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale det(B)?
c) [1'25 puntos] Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que det(2A) = 8,

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Sea A una matriz 3×3 tal que det(2A) = 8.
a)
¿Cuánto vale det(A)?

Sabemos que si A y B son cuadradas entonces, det(A) = |A|, |AB| = |A||B|, $|A^{-1}| = 1/|A|$ (de A.B = I, y |I|=1), $|k.A_n| = k^n.|A|$ siendo "n" el orden de la matriz A.

Tenemos det(2A) = **8 =** $2^3\cdot$det(A) = **8·det(A),** de donde **det(A) = 1.**

b)
Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale det(B)?

Sabemos que si una fila (columna de un determinante está multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando al determinante de la matriz.

Tenemos A = (F_1, F_2 , F_3), donde F_1, F_2 y F_3 indican la primera, segunda y tercera fila respectivamente de la matriz A. Me dicen que B = ($3\cdot F_1$, F_2 , $(-1)\cdot F_3$) = ($3\cdot F_1$, F_2 , $(-1)\cdot F_3$).

Tenemos **det(B) =** det(($3\cdot F_1$, F_2 , $(-1)\cdot F_3$) = (3)·(-1)·det(F_1, F_2 , F_3) = -3·det(A) = -3·1 **= -3**

c)
Determina los valores de x para los que la siguiente matriz A verifica que det(2A) = 8, $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$.

Hemos visto en el apartado (a) que det(A) = |A| = 1.

$$\text{Tenemos } 1 = |A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ F_2 - 2\cdot F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -x+1 & 0 & 0 \\ 0 & -x+1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = (-1)\cdot(-x+1)\cdot(0-(-x+1)) =$$

$= (x-1)\cdot(x-1) = x^2 - 2x + 1$.
De $x^2 - 2x + 1 = 1$, tenemos $x^2 - 2x = 0 = x\cdot(x - 2)$, **de donde x = 0 y x = 2**.

Ejercicio 4 opción B, Primer Reserva 2017 (modelo 5)

Considera los puntos A(1,1,1) , B(0,-2,2) , C(-1,0,2) y D(2,-1,-2) .
a) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A , B y C.

Solución

Considera los puntos A(1,1,1) , B(0,-2,2) , C(-1,0,2) y D(2,-1,-2) .
a)
Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

Sabemos que el volumen del tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que es el valor absoluto (lo notaremos | |) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de los tres vectores **AB**, **AC** y **AD**. El producto mixto de tres vectores era su determinante.

AB = **b – a** = (-1,-3,1); **AC** = **c – a** (-2,-1,1) y **AD** = **d – a** = (1,-2,-3)

Tenemos, volumen = (1/6)·| [**AB**, **AC** y **AD**] | = (1/6)|det(**AB**, **AC, AD**)| =

$$= (1/6)\cdot\left|\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ F_2-2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix}\right| = (1/6)\cdot\left|\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix}\right| = (1/6)\cdot|(-1)\cdot(-10-5)|\ u^3 = (1/6)\cdot|(-1)\cdot(-15)|\ u^3 =$$

= (15/6) u^3 = 2'5 u^3.

b)
Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Si la recta "r" es perpendicular al plano π_{ABC}, el vector normal del plano **n = AB**x**AC,** se puede tomar como el vector director **u** de la recta "r"

$$\mathbf{n} = \mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-3+1) - \mathbf{j}(-1+2) + \mathbf{k}(1-6) = (-2,-1,-5)$$

La recta "r" pasa por el punto D(2,-1,-2) y tiene vector director **u = u =** (-2,-1,-5).

$$\text{Sus ecuaciones paramétricas son: "r"} \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2 - 5\lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$