Opción A

Ejercicio 1 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

[2'5 puntos] Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto (0,2) y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 1 es la recta x + y = 3.

Solución

Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto (0,2) y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 1 es la recta x + y = 3.

Una función polinómica, de grado 3 es de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hay que calcular a, b, c y d.

Sabemos que las funciones polinómicas, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, son continuas y derivables las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un extremo relativo en el punto (0,2), sabemos que *f '(0) = 0*.

Como pasa por él punto (0, 2) tenemos que *f(0) = 2*.

Sabemos que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 1 es la recta x + y = 3, es decir la recta y = -x + 3. También sabemos que la pendiente de la recta tangente en x = 1 es *f '(1)* = y ' = *-1 (Número que multiplica a la "x" despejada la "y", o bien directamente su derivada y ')*

Como hay cuatro incógnitas necesitamos cuatro condiciones, llevamos tres. La cuarta condición sale de saber que la función f(x) y la recta tangente y = -x + 3 coinciden en el punto de tangencia, abscisa x = 1, por tanto *f(1)* = y(1) = -(1) + 3 = *2.*

Tenemos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.
De f '(0) = 0, tenemos f '(0) = 0 + 0 + c = 0, por tanto **c = 0**.
De f '(-1) = 0, tenemos $f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + 0 = -1$, por tanto **3a + 2b = -1**.
De f(0) = 2, tenemos f(0) = 0 + 0 + 0 + d = 2, de donde **d = 2**.
De f(1) = 2, tenemos $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + 0 + 2 = 2$, por tanto **a + b = 0**. De esta ecuación tenemos *a = -b*, y entrando en la ecuación *3a + 2b = -1*, resulta 3(-b) + 2b = -1 → -b = -1 → **b = 1,** con lo cual **a = -1.**
Los números encontrados son a = -1, b = 1, c = 0 y d = 2.

El polinomio pedido es $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$.

Ejercicio 2 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (sugerencia $t = \sqrt[3]{x}$)

Solución

Calculamos primero la integral indefinida $I=\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

$$I = \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Cambio } t = \sqrt[3]{x} \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2dt \end{array} \right\} = \int \frac{3t^2dt}{1+\sqrt[3]{t^3}} = \int \frac{3t^2dt}{1+t} = \int \frac{3t^2dt}{t+1} = **$$

Observamos que es una integral racional con el numerador de grado mayor o igual que el denominador, por tanto antes hay re realizar la división entera.
La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{rl} 3t^2 & \lfloor\, t+1 \\ -3t^2 - 3t & 3t-3 \\ \hline -3t & \\ 3t+3 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Recordamos que $** = \int \left(\text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \right) dx = \int (3t-3)dt + \int \frac{3dt}{t+1} = 3\cdot\frac{t^2}{2} - 3t + 3\ln|t+1| + K = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quitamos} \\ \text{cambio} \end{array} \right\} =$

$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{x}\right) + 3\ln\left|\left(\sqrt[3]{x}\right)+1\right| + K$$

Calculamos ya la integral definida: $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \left[\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{x}\right) + 3\ln\left|\left(\sqrt[3]{x}\right)+1\right| + K\right]_0^3 =$

$= \left(\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{3}\right) + 3\ln\left|\left(\sqrt[3]{3}\right)+1\right| + K\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{0}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{0}\right) + 3\ln\left|\left(\sqrt[3]{0}\right)+1\right| + K\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{3}\right) + 3\ln\left|\left(\sqrt[3]{3}\right)+1\right|$

Ejercicio 3 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por AX = B siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.
b) [1 punto] Para m = 2, si es posible, resuelve el sistema dado.

Solución

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por AX = B siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a)
Discute el sistema según los valores de m.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \\ m & 1 & 3 & m \end{pmatrix}$.

Calculamos los rangos de A y de A*.

En A, $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1+C_2 \\ C_3+C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+m & m & 2m \\ 1+m & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = -(-1)\cdot(4\cdot(1+m) - 2m\cdot(1+m)) =$

$= (1+m)\cdot(4-2m)$. (He sacado factor común "1+m")

De $\det(A) = 0 \rightarrow (1+m)\cdot(4-2m)$, de donde $m = -1$ y $4 - 2m = 0$, de donde $m = 2$.

Si m ≠ -1 y m ≠ 2, det(A) ≠ 0, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, **sistema compatible y determinado, solución única.**

Si m = -1, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas proporcionales, la 1ª y la 3ª, luego rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

Si m = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, la 1ª y la 3ª, luego rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, más de una.

b)
Para m = 2, si es posible, resuelve el sistema dado.

Hemos visto en el apartado (a) que si m = 2, *rango(A) = rango(A*) = 2* < número de incógnitas, *el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones*
Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (1ª y 2ª) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ (F_2-F_1) \end{matrix} \approx \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \quad 3y + z = 0 \end{cases}$, tomando y = λ ∈ R tenemos z = - 3λ y x = 1 + y – z =
= 1 + λ - (-3λ) = 1 + 4λ, y **las infinitas soluciones para m = 2 son: (x,y,z) = (1 + 4λ, λ, - 3λ) con λ ∈ R.**

Ejercicio 4 opción A, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Sea π el plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,λ), siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$
a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.
b) [1'25 puntos] Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ.

Solución

Sea π el plano determinado por los puntos A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,λ), siendo λ un número real, y sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

a)
Halla la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Formamos el haz de planos que determina la recta "r" y la imponemos la condición de que pase por el punto A

Haz de planos π_m ≡ (y - z - 3) + m(-x + 2y - 3) = 0. Como A(1,0,0) ∈ π_m → (0 - 0 - 3) + m(-1 + 0 - 3) = 0, de donde -4m = 3, por tanto m = -3/4, y **el plano pedido es** $\pi_{-3/4}$ ≡ (y - z - 3) + (-3/4)(-x + 2y - 3) = 0. Operando y quitando denominadores queda $\boldsymbol{\pi_{-3/4}}$ **≡ 3x - 2y - 4z – 3 = 0**

b)
Estudia la posición relativa de r y π según los valores de λ.

El plano π está determinado por los puntos A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,λ). Sabemos que para la ecuación de un plano necesitamos un punto, el A(1,0,0) y dos vectores linealmente independientes, el **AB** = (-1, 1, 0) y el **AC** = (-1, 0, λ).

La ecuación general del plano π es: π ≡ det(**AX**,**AB**,**AC**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} =$
= (x-1)·(λ) - y·(-λ-0) + z·(0+1) = λx + λy + z - λ = 0.

La recta $r \equiv \begin{cases} y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ la podemos considerar como dos planos, luego nos piden estudiar la posición relativa de los tres planos $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0 \\ y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ según los valores de λ.

Matriz de los coeficientes A = $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, matriz ampliada A* = $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculamos los rangos de A y de A*.

En A, det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} C_3+C_2 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1+\lambda \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{matrix} =$ +(-1)·(2λ + 1 + λ) = - 3λ - 1.

det(A) = |A| = 0 → - 3λ - 1 = 0, de donde λ = - 1/3.

Si λ ≠ - 1/3 , det(A) ≠ 0, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, sistema compatible y determinado, solución única. Los tres planos se cortan en un solo punto, en nuestro caso la recta "r"

corta al plano π en un único punto, que es la solución del sistema $\begin{cases} \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0 \\ \quad - y - z - 3 = 0 \\ -x + 2y \quad - 3 = 0 \end{cases}$ **, para cualquier valor λ ≠ 1/3 real.**

Si λ = -1/3, A = $\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-1/3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}_{F_3+F_1} = (-1/3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1/3)\cdot(-4+9) \neq 0$, luego rango(A*)=3.

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene solución. Por tanto la recta "r" es paralela al plano π y no está contenida en él.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera la función definida por $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

Considera la función definida por $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{-x^3 + 4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
x = a es una asíntota vertical de la gráfica de la función f (A.V.) si $\lim_{x\to a+} [\, (f(x) \,] = \infty$

Como $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \dfrac{-x^3 + 4}{x^2} = [\, 4/0^+ \,] = +\infty$; la recta **x = 0** es una A.V. de f(x).

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} \dfrac{-x^3 + 4}{x^2} = [\, +/0^+ \,] = +\infty$

Como en la función que me han dado, el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma y = mx+n con m = $\lim_{x\to\infty} [f(x)/x)]$ y n = $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx)]$, y es la misma en +∞ y en -∞.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

$-x^3 + 4$	x^2
$+x^3$	$-x$
0 + 4	

La A.O. de f(x) es **y = -x** en ± ∞.
Como $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-x)] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en + ∞ (le damos a x el valor + 100)
Como $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x)] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en - ∞ (le damos a x el valor - 100)
Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)
b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{-x^3 + 4}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{-3x^2 \cdot x^2 - (-x^3 + 4)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-3x^4 + 2x^4 - 8x}{(x^2)^2} = \dfrac{-x^4 - 8x}{(x^2)^2} = \dfrac{x\cdot(-x^3 - 8)}{(x^2)^2}$

Si f '(x) = 0; $x\cdot(-x^3 - 8) = 0$, de donde x = 0 (**no sirve, porque x = 0 es A.V.**) y $-x^3 - 8 = 0$, de donde tenemos $x^3 = -8 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$, que será un posible extremo relativo.

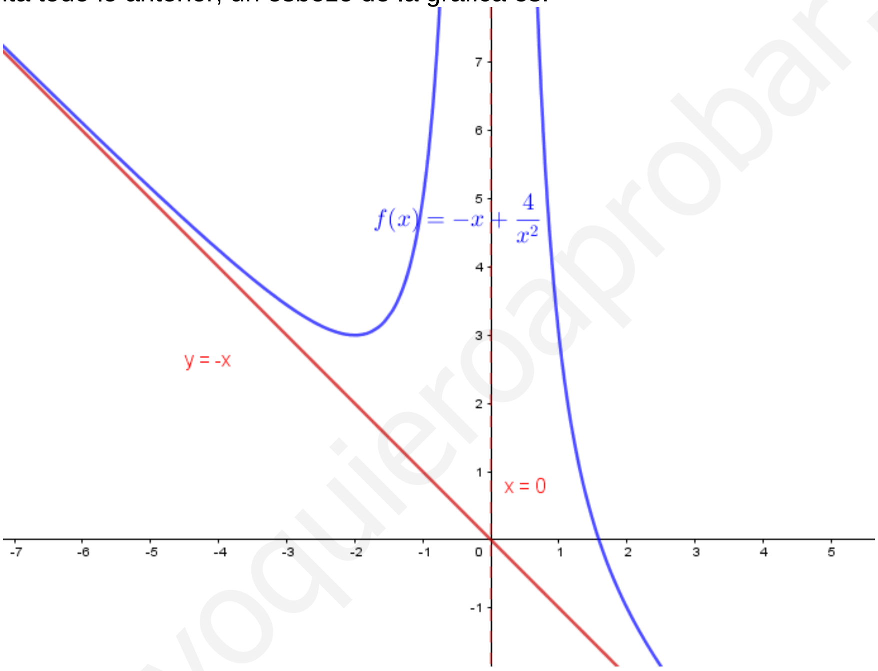
Como f '(-3) = -57/(+) < 0, f '(x) < 0 en (-∞,-2), luego f(x) es estrictamente decreciente (↘) en (-∞,-2).

Como f '(-1) = 7/(+) > 0, f '(x) > 0 en (-2,0), luego f(x) es estrictamente creciente (↗) en (-2,0).

Como f '(1) = -9/(+) < 0, f '(x) < 0 en (0,+∞), luego f(x) es estrictamente decreciente (↘) en (0,+∞).

Por definición en x = - 2 hay un mínimo relativo que vale $f(-2) = \dfrac{-(-2)^3 + 4}{(-2)^2} = 3$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, un esbozo de la gráfica es:



Ejercicio 2 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

[2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}\,dx$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}\cdot dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}\cdot dx$

Es un integral racional, y como el numerador es de grado mayor o igual que el denominador tengo que realizar la división entera primero:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & x^2+2x+1 \\ \hline -x^2 - 2x - 1 & & 1 \\ \hline -2x & & \end{array}$$

$I = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = \int(\text{Cociente})dx + \int \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}dx = \int(1)dx + \int \frac{-2x}{(x+1)^2}dx = x + I_1$

$I_1 = \displaystyle\int \frac{-2x}{(x + 1)^2}\cdot dx = \{\text{Raiz doble } (-1)\} = \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{(x+1)^2}dx = A\cdot\ln|x+1| - \frac{B}{x+1} = \{++\} = -2\cdot\ln|x+1| - \frac{2}{x+1}$

{++} Calculamos A y B

$\dfrac{-2x}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} = \dfrac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$

Igualando numeradores:

-2x = A(x+1) + B. Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador, y le damos otro valor.

Para x = -1, tenemos 2 = B, de donde B = 2.
Tomo x = 0, tenemos 0 = A(1) + 2, de donde A = - 2.

Luego la integral indefinida es $I = \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = x + I_1 = x - 2\cdot\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + K$.

La integral definida pedida es $\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = \left[x - 2\cdot\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + K \right]_0^1 =$

$= \left((1) - 2\cdot\ln|(1)+1| - \frac{2}{(1)+1} + K \right) - \left(0 - 2\cdot\ln|0+1| - \frac{2}{0+1} + K \right)$ $\mathbf{= -2\cdot\ln(2) + 2 \cong 0'6137}$

Ejercicio 3 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.
b) [1,5 puntos] Para m = 1, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + I = B$, siendo I la matriz identidad.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a)
Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.

La matriz A no tiene inversa si su determinante det(A) = |A| = 0

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m-1 \\ 0 & m-1 & 2-m \\ 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1((m-1)\cdot(2-m) - (-1)\cdot(2-m)) = (2-m)\cdot(m-1+1) = m\cdot(2-m)$.

Si |A| = 0, tenemos $m\cdot(2-m) = 0$, de donde m = 0 y m = 2, por tanto **para m = 0 y m = 2 no existe matriz inversa de A.**

b)
Para m = 1, calcula, si existe, la matriz X que verifica la igualdad $A^{-1}XA + I = B$, siendo I la matriz identidad.
Hemos visto que para m = 1 existe A^{-1}, no existía para m = 0 y m = 2.

De $A^{-1}XA + I = B$, tenemos $A^{-1}XA = B - I = C$.

Multiplicando la expresión $A^{-1}XA = C$ por la izquierda por la matriz A y por la derecha por la matriz A-1, tenemos: $AA^{-1}XAA^{-1} = ACA^{-1} \rightarrow I\cdot X\cdot I = ACA^{-1} \rightarrow$ $\mathbf{X = ACA^{-1}}$

Realizamos ya los cálculos:

Para m = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = B - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = C$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1(0 + 1) = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. |A| = 1; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz pedida es **$X = ACA^{-1}$ =** $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción B, Segunda Reserva 2017 (modelo 2)

Considera el punto P(-1,0,1), el vector **u** = (1,2,1) y el plano π de ecuación y = 0.
a) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por P, está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a **u**.
b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P, es perpendicular a π y del que **u** es un vector director.

Solución

Considera el punto P(-1,0,1), el vector **u** = (1,2,1) y el plano π de ecuación y = 0.
a)
Halla la ecuación de la recta "r" que pasa por P, está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a **u**.

Para una recta "r" necesitamos un punto, el P(-1,0,1) y un vector director el **w** = (a,b,c).

La ecuación de la recta en paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + a\cdot\lambda \\ y = 0 + b\cdot\lambda \\ z = 1 + c\cdot\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vamos a calcular el vector **w** = (a,b,c).

Me dicen que la recta "r" está contenida en el plano $\pi \equiv y = 0$, sustituyendo la recta en el plano tenemos por un lado $b\cdot\lambda = 0$, y por otro lado el vector **w** de la recta es normal al vector normal del plano **n** = (0,1,0), es decir su producto escalar (•) es cero → **w•n** = 0 = (a,b,c)•(0,1,0) = b, de donde **b = 0.**

Por otro lado el vector **w** de la recta es perpendicular a **u** = (1,2,1), luego **w•u** = 0 = (a,0,c)•(1,2,1) = a + c, es decir **a = -c.**

El vector **w** de la recta buscado es **w** = (a,b,c) = (-c,0,c), como hay infinitos vectores tomamos sólo uno de ellos, tomando c = 1, por tanto **w** = (-1,0,1), y **la recta pedida es** $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b)
Determina la ecuación del plano π_1 que pasa por P, es perpendicular a π y del que **u** es un vector director.

Para un plano π_1 necesitamos un punto, el P(-1,0,1), y dos vectores independientes, uno el **n** = (0,1,0), puesto que el plano π_1 es perpendicular al π, y el otro vector es el **u** = (1,2,1), nos lo dice el problema.
La ecuación paramétrica del plano es el conjunto de puntos X(x,y,z) del espacio que verifican:

$\pi_1 \equiv (x,y,z) = (-1,0,1) + \lambda\cdot(0,1,0) + \mu\cdot(1,2,1)$ con $\lambda, \mu \in R$.

(La ecuación general sería $\pi_1 \equiv det(PX,n,u) = 0 = x - z + 2 = 0$.)