EXAMEN 1º BACHILLERATO CCSS – Matemática financiera (RESUELTO)

Ejercicio 1. (2 pto.)

Sean $\log_a x = 2{,}55$ y $\log_a y = 1{,}28$ Calcule:

a) $\log_a x^5$

b) $\log_a x^2 \cdot y^3$

c) $\log_a \sqrt[4]{y}$

d) $\log_a \sqrt[3]{x^2 \cdot y^5}$

Recuerda que el logaritmo en base a $(a > 0; a \neq 1)$, de un número x es igual a otro número y; si al elevar la base a al número y es igual a x:

$$log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propiedades de los logaritmos:

1. *Logaritmo de un producto* $\quad log_a(m \cdot n) = log_a m + log_a n$
2. *Logaritmo de un cociente* $\quad log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n$
3. *Logaritmo de una potencia* $\quad log_a m^k = k \cdot log_a m$
4. *Logaritmo de una raíz* $\quad log_a \sqrt[k]{m} = \frac{log_a m}{k}$

a) $\log_a x^5 \overset{\text{Aplicando 3}}{=} 5 \cdot \log_a x = 5 \cdot 2{,}55 = \mathbf{12{,}75}$

b) $\log_a x^2 \cdot y^3 \overset{\text{Aplicando 1}}{=} \log_a x^2 + \log_a y^3 \overset{\text{Aplicando 3}}{=} 2 \cdot \log_a x + 3 \cdot \log_a y =$

$= 2 \cdot 2{,}55 + 3 \cdot 1{,}28 = \mathbf{8{,}94}$

c) $\log_a \sqrt[4]{y} \overset{\text{Aplicando 4}}{=} \frac{log_a y}{4} = \frac{1{,}28}{4} = \mathbf{0{,}32}$

d) $\log_a \sqrt[3]{x^2 \cdot y^5} \overset{\text{Aplicando 4}}{=} \frac{log_a x^2 \cdot y^5}{3} \overset{\text{Aplicando 1}}{=} \frac{\log_a x^2 + \log_a y^5}{3} =$

$\overset{\text{Aplicando 3}}{=} \frac{2 \cdot \log_a x + 5 \cdot \log_a y}{3} = \frac{2 \cdot 2{,}55 + 5 \cdot 1{,}28}{3} = \mathbf{3{,}8\widehat{3}}$

Ejercicio 2. (1,5 pto.)

Un teléfono móvil salió al mercado hace ya tres años por un precio de 640 €; desde ese momento hasta la actualidad a sufrido las variaciones siguientes: bajó el 8 %, bajó un 12 % y finalmente bajó un 15%.

¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál ha sido el índice de variación total?

Recuerda para calcular un incremento o una disminución porcentual hay que multiplicar la cantidad inicial por el índice de variación, este índice para el aumento porcentual suma y para la disminución porcentual resta:

$$C_{final} = \left(1 \pm \frac{R}{100}\right) \cdot C_{inicial} = (1 \pm r) \cdot C_{inicial}$$

donde R en tanto porciento % y r en tanto por uno (forma decimal)

El móvil ha cambiado 3 veces de precio, se aplican las disminuciones porcentuales de forma consecutiva:

Primer cambio→	$(1-0{,}08)\cdot 640 = (0{,}92)\cdot 640 = 588{,}80$ €
Segundo cambio→	$(1-0{,}12)\cdot 588{,}80 = (0{,}88)\cdot 588{,}80 \approx 518{,}14$ €
Tercer cambio→	$(1-0{,}15)\cdot 518{,}14 = (0{,}85)\cdot 518{,}14 \approx 440{,}42$ €

Precio actual $\Rightarrow$ $\mathbf{440,42}$ €

Calculando índice de variación, Partimos de la variación de 100€:

Primera variación →	$(1-0{,}08)\cdot 100 = (0{,}92)\cdot 100 = 92$
Segunda variación →	$(1-0{,}12)\cdot 92 = (0{,}88)\cdot 92 = 80{,}96$
Tercer cambio→	$(1-0{,}15)\cdot 80{,}96 = (0{,}85)\cdot 80{,}96 = 68{,}816$

El **índice de variación total** es aproximadamente **0,6882 o 68,82%**

El cálculo se pudiera haber realizado directamente:

$$\textbf{Precio actual} = \big((1-0{,}08)(1-0{,}12)(1-0{,}15)\big)\cdot 640€ =$$

$$= (0{,}92\cdot 0{,}88\cdot 0{,}85)\cdot 640€ = 0{,}68816\cdot 640€ \approx \mathbf{440,42}$$

Ejercicio 3. (1,5 ptos.)

Calcula la T. A. E. que corresponde a un rédito anual del 15% con pagos mensuales de intereses.

Calcular el tanto porciento de interés que corresponde a cada mes: 15% anual le corresponde el 15/12 = 1,25% mensual.

De lo anterior, cada mes, el capital se multiplica por 1,0125; por tanto, en un año se multiplicará por:

$$(1{,}0125)^{12} \approx 1{,}160754 \approx 1 + 0{,}1608 = 1 + \frac{16{,}08}{100}$$

La T.A.E es entonces: **16,08%**

Recuerda que la T.A.E. es el coste real o rendimiento de un producto financiero, y es siempre superior al rédito anual que se anuncia.

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Pedro va a invertir en un plan de jubilación, de modo que durante 20 años debe aportar 500 euros al año; a pagar en plazos semestrales; con un rédito al 6% anual ¿Qué capital tendrá Pedro al finalizar el plazo?

La anualidad se va a pagar en 2 plazos (semestrales):

$$\mathrm{A} = \frac{500\ €}{2} = 250€\ \text{cada semestre}$$

Cada año se pagan 2 cuotas por lo que el rédito será:

$$\frac{6\%}{2} = 3\% \Rightarrow \mathrm{r} = 0{,}03\ \text{semestral}$$

El número de pagos total a efectuar será:

$$\mathrm{t} = 20\ \text{años} \cdot 2\ {}^{\text{pagos}}/_{\text{año}} = 40\ \text{pagos}$$

Sustituyendo en la fórmula para saber el capital final obtenido:

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{A} \cdot (1+\mathrm{r}) \cdot [(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}} - 1]}{\mathrm{r}} = \frac{250 \cdot (1+0{,}03) \cdot [(1+0{,}03)^{40} - 1]}{0{,}03}$$

$$= \frac{250 \cdot (1{,}03) \cdot [(1{,}03)^{40} - 1]}{0{,}03} \approx 19\,415{,}82€$$

Pedro tendría $\mathbf{19\,415{,}82€}$ a los $\mathbf{20}$ años

Recuerda que las anualidades de capitalización son cantidades que depositamos todos los años para pasado un tiempo poder disponer de esos recursos; un ejemplo son los fondos o planes de pensiones.

El capital final que se obtiene pasado ese tiempo se puede calcular como una progresión geométrica:

$$C = \frac{A \cdot (1 + r) \cdot [(1 + r)^t - 1]}{r}$$

La anualidad se despeja como:

$$A = \frac{C \cdot r}{(1 + r) \cdot [(1 + r)^t - 1]}$$

Donde A anualidad, r rédito en expresión decimal y t años

Nota: Ambas expresiones se ajustan en función de los datos ofrecidos y el número de depósitos que se efectúan en un año.

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Solicitamos un préstamo de 72 000 euros para devolverlo en diez años al 7%. ¿Qué cantidad deberemos pagar cada año? ¿Cuánto pagaremos por el citado préstamo?

Se efectúa un pago anual, por tanto, sustituyendo en la fórmula obtenemos:

$$\mathrm{A} = \frac{72\,000 \cdot 0{,}07 \cdot (1 + 0{,}07)^{10}}{(1 + 0{,}07)^{10} - 1} \approx \frac{72\,000 \cdot 0{,}07 \cdot 1{,}9672}{1{,}9672 - 1} = \mathbf{10\,250{,}92€}$$

$$\text{Pagaremos } 10 \text{ años} \cdot 10\,250{,}92 \approx \mathbf{102\,509€}$$

Recuerda que las anualidades de amortización son cantidades iguales que abonan (pagan) cada cierto periodo de tiempo, para saldar deuda D o préstamo que se adquirió hace unos años; por ejemplo: créditos hipotecarios o saldar el pago de un bien comprado a crédito.

El valor de la deuda D original se puede calcular como una progresión geométrica:

$$D = \frac{A \cdot [(1+r)^t - 1]}{r \cdot (1+r)^t}$$

La anualidad se despeja como:

$$A = \frac{D \cdot r \cdot (1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

Donde A anualidad, r rédito en expresión decimal y t años

Nota: Ambas expresiones se ajustan en función de los datos ofrecidos y el número de pagos que se efectúan en un año.

Ejercicio 6. (2 ptos.)

La tabla siguiente muestra el comportamiento de la población de una localidad de España. Calcula los índices teniendo en cuenta como base la población del censo de 2010. Interpreta el resultado.

Año	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Población	256 123	272 540	264 231	255 213	259 623	258 126

Calculando los índices tomando como base 2010:

$$I_{2010}/_{2010} = \frac{256\ 123}{256\ 123} \cdot 100 = \boxed{100}; \qquad I_{2011}/_{2010} = \frac{272\ 540}{256\ 123} \cdot 100 = \boxed{106{,}4}$$

$$I_{2012}/_{2010} = \frac{264\ 231}{256\ 123} \cdot 100 = \boxed{103{,}2}; \qquad I_{2013}/_{2010} = \frac{255\ 213}{256\ 123} \cdot 100 = \boxed{99{,}6}$$

$$I_{2014}/_{2010} = \frac{254\ 623}{256\ 123} \cdot 100 = \boxed{99{,}4}; \qquad I_{2015}/_{2010} = \frac{258\ 426}{256\ 123} \cdot 100 = \boxed{100{,}9}$$

Año	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Población	256 123	272 540	264 231	255 213	254 623	258 426
$I_x/_{2010}$	100	106,4	103,2	99,6	99,4	100,9

El resultado se puede interpretar diciendo que de 2010 a 2011 hubo un incremento en la población del 6,4%, como también hay una disminución en 2013 del 0,4%, ambos con relación al 2010. Al finalizar el periodo en cuestión hay solo un incremento poblacional del 0,9% ($|100 - 100{,}9| = 0{,}9\%$)

Los índices muestran los cambios de una variable entre dos periodos temporales de los que uno de ellos se toma como base o referencia. Se hallan mediante la fórmula:

$$I_{t/_0} = \frac{x_t}{x_o} \cdot 100$$