4 PROGRESIONES

Página 67

Resuelve

1 Observa la noria que aparece a la derecha.

Si C es la cantidad de agua que aporta en una vuelta, y A es la cantidad de agua que tenía inicialmente el pilón al que abastece, ¿qué cantidad de agua habrá en el pilón después de n vueltas?

Después de n vueltas habrá $nC + A$.

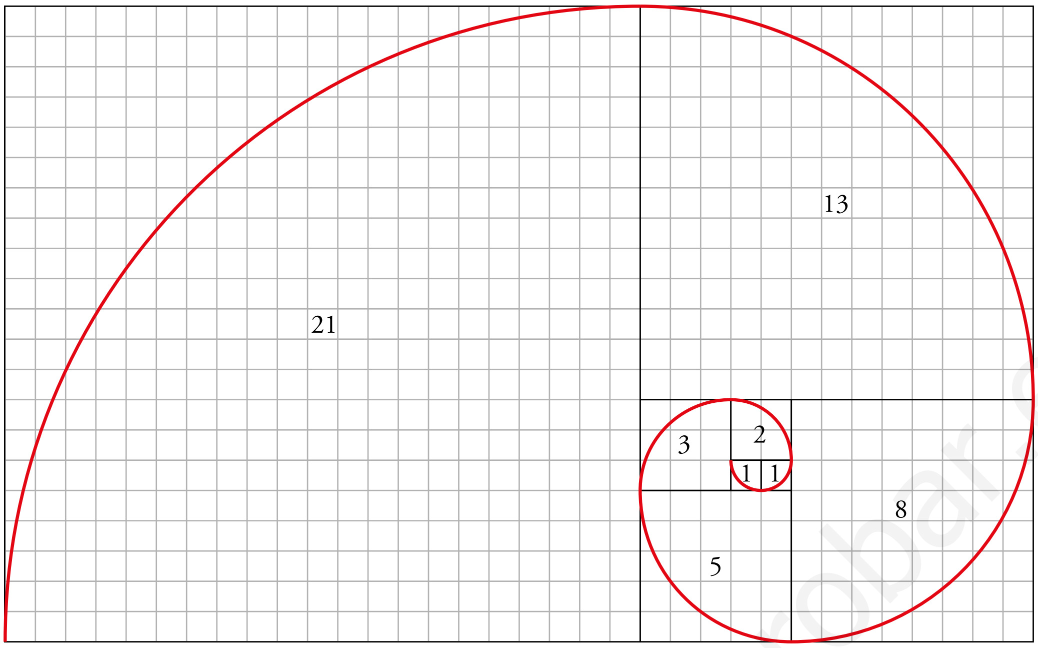
2 ¿Qué criterio hay que seguir para obtener más términos en la sucesión de Fibonacci?

Los dos primeros términos son 1 y 1. Los demás se obtienen como la suma de los dos anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

3 Dibuja las dos filas que siguen en el esquema que muestra la evolución de la descendencia de una pareja de conejos.

¿Cuántas parejas habría en el sexto mes? ¿Y en el séptimo?

4 **Dibuja en papel cuadriculado la espiral de Fibonacci ampliando la que ves en la página anterior mediante dos arcos más.**



1 SUCESIONES

Página 68

Ladillo

¿A cuáles de las sucesiones de la derecha corresponden estos dibujos?

La torre corresponde a la sucesión b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

La espiral corresponde a la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

1 **Averigua el criterio de formación de cada una de las sucesiones siguientes:**

a) 1/2, 2/3, 3/4, … **b) 3, 4, 5, 6, …** **c) 1, 8, 27, …**

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \to a_n = \frac{n}{n+1}$

b) 3, 4, 5, 6, … $\to a_n = n + 2$

c) 1, 8, 27, … $\to a_n = n^3$

2 **Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.**

a) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene sumando 4 al anterior.

21, 25, 29, …

b) Criterio: Los términos son los cuadrados de los números naturales.

49, 64, 81, …

c) Criterio: El primer término es 2, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2, o bien, son las sucesivas potencias de 2 ($2^1, 2^2, 2^3, \dots$).

128, 256, 512, …

d) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por –3.

729, –2 187, 6 561, …

e) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 1, y cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

13, 21, 34, …

f) Criterio: El primer término es 1, y cada término que ocupa un lugar n se obtiene sumando $n - 1$ al anterior.

22, 29, 37, …

g) Criterio: Cada término que ocupa un lugar n se obtiene multiplicando $n \cdot (n + 1)$

56, 72, 90, …

h) Criterio: El primer término es 170, y cada término se obtiene restando 50 al anterior.

–130, –180, –230, …

i) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 3, y los términos pares se obtienen sumando 2 al anterior, y los términos impares se obtienen multiplicando el anterior por 2.

38, 76, 78, …

j) Criterio: Los términos son los números primos.

23, 29, 31, …

3 **Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.**

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) Criterio: Obtenemos cada término mulitplicando el anterior por –2.

3, –6, 12, –24, 48, …

b) Criterio: Obtenemos cada término sumando 1,5 al término anterior.

1; 2,5; 4; 5,5; 7; 8,5; …

c) Criterio: Obtenemos los términos pares multiplicando el anterior por –3, y los impares, sumando –3 al anterior.

1, –3, –6, 18, 15, –45, –48, …

d) Criterio: Los términos son los cubos de los números naturales.

1, 8, 27, 64, 125, 216, …

e) Criterio: Obtenemos cada término restando 8 del anterior.

100, 92, 84, 76, 68, 60, …

4 **Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \ldots$ entre cada dos términos consecutivos de las sucesiones c) y d) de arriba.**

La relación es 2.

La relación es –3.

Página 69

5 **Comprueba, para b), c), d) y h) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $h_n = 220 - 50n$.**

Se comprueba.

6 **Escribe los cinco primeros términos de:**

$$a_n = n^3 \qquad b_n = n^2 - 3n + 7 \qquad c_n = \frac{n-3}{n+4}$$

$a_n \to 1, 8, 27, 64, 125, \dots$

$b_n \to 5, 5, 7, 11, 17, \dots$

$c_n \to -\frac{2}{5}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \dots$

7 **Forma una sucesión recurrente con estos datos:**

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

8 **Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.**

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión: 3, 5, 13, 31, 75, 181, …

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_n = b_{n-1} + (b_{n-2})^2$

Sucesión: 1, 3, 4, 13, 29, 198, 1 039, …

9 **Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:**

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ **b)** $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **c)** $c_n = (n-1)(n-2)$ **d)** $d_n = n^2 - n$

a) 3, 8, 13, 18, … b) 3, 32, 34, 38, … c) 0, 0, 2, 6, … d) 0, 2, 6, 12,…

10 **Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:**

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

a) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$

c) Nuevo término: 1,625. Ley de recurrencia: $c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

d) Nuevo término: 2. Ley de recurrencia: $d_n = \dfrac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

11 **Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).**

Respuesta abierta. Por ejemplo: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, …

12 **a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.**

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$$a_n \to 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$
$$b_n \to 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

a) $s_1 = (-1)^1 = -1$; $s_2 = (-1)^2 = 1$; $s_3 = (-1)^3 = -1$; $s_4 = (-1)^4 = 1$

Los términos s_n con n par son 1, y cuando n es impar son iguales a –1. Coincide con los términos de la sucesión descrita.

b) $a_n = (-1)^{n+1}$; $b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Página 70

1 **El primer término de una progresión aritmética s es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2,5$. Escribe sus diez primeros términos.**

Haz lo mismo para otra progresión aritmética t cuyo primer término sea $t_1 = 20$ y cuya diferencia sea $d = -3$.

Progresión s_n: 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; …

Progresión t_n: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, …

2 **Calcula, para las progresiones de arriba:**

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1\,000}$$

b) $b_1 = 120$ y $d = 20 \rightarrow b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d = 120 + (n - 1) \cdot 20 = 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$

Así: $b_{36} = 100 + 20 \cdot 36 = 820$

c) $c_1 = 9$ y $d = -2 \rightarrow c_n = 9 + (n - 1) \cdot (-2) = 9 - 2n + 2 = 11 - 2n$

Así: $c_{31} = 11 - 2 \cdot 31 = -51$

d) $d_1 = 5,83$ y $d = 0,04 \rightarrow d_n = 5,83 + (n - 1) \cdot 0,04 = 5,83 + 0,04n - 0,04 = 5,79 + 0,04n$

Así: $d_{1\,000} = 5,79 + 0,04 \cdot 1\,000 = 45,79$

3 **Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).**

$b_n = 100 + 20 \cdot n$ $\qquad c_n = 11 - 2 \cdot n$ $\qquad d_n = 5,79 + 0,04 \cdot n$

4 **a) Si dos de los términos de una progresión aritmética s son:**

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

a) $d = 1,5$ $\qquad$ b) $s_n = 6 + 1,5\,(n - 1) = 6 + 1,5n - 1,5 = 4,5 + 1,5n$

Página 71

5 **Halla la suma de todos los números impares menores que 100.**

El término general de los números impares es $a_n = 2n - 1$. El último impar menor que 100 es 99, que resulta ser a_{50}. Así, la suma es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

6 **a) Si $a_1 = 5$ y $d = 5$, calcula S_{15}.**

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 7$, calcula b_{40} y S_{40}.

c) Si $c_1 = 5$ y $c_2 = 12$, calcula S_{32}.

a) $a_1 = 5$ y $d = 5 \to a_n = 5 + (n-1) \cdot 5 = 5n$; $a_{15} = 5 \cdot 15 = 75$

$$S_{15} = \frac{(5 + 75) \cdot 15}{2} = 600$$

b) $b_1 = 5$ y $d = 2 \to b_n = 5 + (n-1) \cdot 2 = 3 + 2n$; $b_{40} = 3 + 2 \cdot 40 = 83$

$$S_{40} = \frac{(5 + 83) \cdot 40}{2} = 1\,760$$

c) $c_1 = 5$ y $d = 7 \to c_n = 5 + (n-1) \cdot 7 = -2 + 7n$; $c_{32} = -2 + 7 \cdot 32 = 222$

$$S_{32} = \frac{(5 + 222) \cdot 32}{2} = 3\,632$$

7 **Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.**

Como $c_1 = 17$ y $c_5 = 9 \to d = -2$

Así, $c_n = 17 + (n-1)(-2) = 19 - 2n$; $c_{20} = 19 - 2 \cdot 20 = -21$

$$S_{20} = \frac{(14 - 21) \cdot 20}{2} = -40$$

8 **Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:**

$$a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}$$

Como $a_1 = 4$ y $a_2 = 7$, tenemos que la diferencia de esta progresión es $d = 3$.

Nos piden la suma de los términos del décimo al vigésimo. Lo que vamos a hacer es calcular S_{20} y restarle S_9:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 4 + 57) \cdot 20}{2} = 650$$

$$S_9 = \frac{(4 + 4 + 8 \cdot 3) \cdot 9}{2} = 144$$

Por tanto, la suma pedida es $650 - 144 = 506$.

Página 72

Con calculadora (ladillo)

Añade dos términos a cada una de las progresiones siguientes:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

También son progresiones geométricas las tres sucesiones siguientes:

c) 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; … Su razón es $\frac{1}{2}$ = 0,5.

d) 80; 8; 0,8; 0,08; … Su razón es $\frac{1}{10}$ = 0,1.

e) 3, –6, 12, –24, 48, –96, … Su razón es –2.

a) 192, 384, …

b) 30 000, 300 000, …

c) 1,25; 0,625; …

d) 0,008; 0,0008; …

e) 192, –384, …

3 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Página 73

1 **Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.**

125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; …

2 **De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.**

$0{,}9 = 0{,}625r^2 \rightarrow r^2 = 1{,}44 \rightarrow r = \pm 1{,}2$

Por tanto, hay dos progresiones:

- $r = 1{,}2$

  0,625; 0,75; 0,9; 1,08; 1,296; 1,5552; …

- $r = -1{,}2$

  0,625; –0,75; 0,9; –1,08; 1,296; –1,5552; …

3 **En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.**

$6 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

Como es una progresión de términos positivos, la razón también lo es.

$r = \sqrt{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^5 = 486$

$a_{12} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{11} = 2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{3} = 486\sqrt{3}$

4 **En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{37} = 911127{,}781 \\ a_{38} = 1275578{,}893 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Es } a_{37}.$$

5 **En una progresión geométrica, $a_1 = 1\,000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_{31} = 1{,}237 \\ a_{32} = 0{,}99 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Es } a_{31}.$$

Página 74

6 **Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + + 192 + 384.**

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = \frac{3 \cdot 2^8 - 3}{2 - 1} = 765$$

7 **¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?**

$$S_{16} = \frac{1 \cdot 20^{16} - 1}{2 - 1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

8 **Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.**

$$S_{10} = \frac{8{,}192 \cdot 2{,}5^{10} - 8{,}192}{2{,}5 - 1} = 52\,077{,}872$$

9 **Si al comienzo de cada año ingresamos 6000 € al 5%, ¿qué capital tendremos al final del sexto año?**

Se trata de una progresión geométrica, donde $a_1 = 6\,000$ y $r = 1{,}05$. Nos están preguntando por a_7.

Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6\,000 \cdot 1{,}05^{n-1}$

Por tanto, $a_7 = 8\,040{,}57$ €

Página 75

10 **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0,75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.**

$$S_\infty = \frac{8}{1-0,75} = \frac{8}{0,25} = 32$$

11 **En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0,2$. Calcula la suma de «todos» sus términos.**

$$S_\infty = \frac{30}{1-(-0,2)} = \frac{30}{1,2} = 25$$

12 **En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0,4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.**

$a_6 = a_4 \cdot r^2 \to 0,4 = 10 \cdot r^2 \to r^2 = 0,04 \to r = \pm 0,2$

$r = 0,2 \to \quad 10 = a_1 \cdot 0,2^3 \to 10 = a_1 \cdot 0,008 \to a_1 = 1\,250$

$a_8 = a_1 \cdot 0,2^7 \to a_8 = 1\,250 \cdot 0,2^7 \to a_8 = 0,016$

$$S_8 = \frac{1\,250 - 1\,250 \cdot 0,2^8}{1-0,2} = 1\,562,496$$

$$S_\infty = \frac{1\,250}{1-0,2} = 1\,562,5$$

$r = -0,2 \to \quad 10 = a_1 \cdot (-0,2)^3 \to a_1 = -1\,250$

$a_8 = -1\,250 \cdot (-0,2)^7 = 0,016$

$$S_8 = \frac{-1\,250 - (-1\,250) \cdot (-0,2)^8}{1-(-0,2)} = -1\,041,664$$

$$S_\infty = \frac{-1\,250}{1-(-0,2)} = \frac{-1\,250}{1,2} = -1\,041,\widehat{6}$$

4 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS SORPRENDENTES

Página 77

1 **El día 1 de cierto mes, una banquera le propuso a un banquero el siguiente trato:**

Cada día de este mes yo te doy 100 000 € con la condición de que tú dupliques el dinero que haya en esta caja en la que ahora hay un céntimo. Al final de mes tú te quedas con lo que te he ido dando día a día y yo me quedo con lo que finalmente haya en la caja.

El banquero, después de pensar un rato y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me haces esta propuesta dentro de un año exactamente?

Esta conversación ocurrió entre el 1 de marzo de 2008 y el 1 de septiembre de 2015. Di, justificando tu respuesta, en qué día tuvo lugar.

Era el día 1 de febrero del año 2012, bisiesto. Es decir, un mes con 29 días.

Así, en este año las cuentas salen como sigue:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 29 = 2\,900\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{29} = 5\,368\,709$ €, cantidad muy superior a la anterior.

Sin embargo, febrero del año 2013 tendría un día menos, 28. Y las cuentas serían estas:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 28 = 2\,800\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{28} = 2\,684\,354{,}56$ €, cantidad inferior a la primera.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 78

1. Número de términos de una progresión

Hazlo tú

- **¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética en la que $a_2 = 2{,}5$; $d = -1{,}5$ y el último término es –9,5?**

$a_2 = a_1 - 1{,}5 \rightarrow 2{,}5 = a_1 - 1{,}5 \rightarrow a_1 = 2{,}5 + 1{,}5 \rightarrow a_1 = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow -9{,}5 = 4 + (n-1) \cdot (-1{,}5) \rightarrow -13{,}5 = -1{,}5n + 1{,}5 \rightarrow$

$\rightarrow -13{,}5 - 1{,}5 = -1{,}5n \rightarrow -15 = -1{,}5n \rightarrow n = 10$

2. Interes compuesto

Hazlo tú

- **Abrimos una cuenta, al comienzo de un año, con 500 € al 1,25 % trimestral y la mantenemos 3 años. ¿Cuánto dinero tendremos al final de cada año?**

$C_I = 500$ €

$r = 1{,}25$

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

3 años $\rightarrow 3 \cdot 4 = 12$ trimestres

$$C_1 = 500 \cdot \left(1 + \frac{1{,}25}{100}\right)^4 = 525{,}47 \text{ €}$$

$$C_2 = 500 \cdot \left(1 + \frac{1{,}25}{100}\right)^8 = 552{,}24 \text{ €}$$

$$C_3 = 500 \cdot \left(1 + \frac{1{,}25}{100}\right)^{12} = 580{,}38 \text{ €}$$

3. Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Hazlo tú

- **Si otra empresa cobra 120 € por el primer metro y un 15 % más por cada metro siguiente, ¿cuál es más rentable para perforar un pozo de 10 m?**

$a_1 = 120$

$15\,\% \;\to\; 1 + 0{,}15 = 1{,}15 = r$

$a_2 = 1{,}15 \cdot 120 = 138$

$a_3 = 1{,}15 \cdot 138 = 1{,}15 - 1{,}15 \cdot 120 = 1{,}15^2 \cdot 120 = 158{,}7$

$\vdots$

$a_{10} = 1{,}15^9 \cdot 120 = 422{,}14$

Calculamos el precio de abrir el pozo de 10 metros:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{422{,}14 \cdot 1{,}15 - 120}{1{,}15 - 1} = 2\,436{,}41\ €$$

Con la otra empresa eran 2 595,88 €.

Luego es más estable esta.

4. Fracción generatriz

Hazlo tú

- **Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales usando progresiones:**

a) $3{,}\widehat{7}$ **b)** $3{,}5\widehat{4}$

a) $3{,}7777\ldots = 3 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots = 3 + \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots +\right)$

$$S_\infty \ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$3 + \frac{7}{9} = \frac{34}{9}$$

b) $3{,}544444\ldots = 3{,}5 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots = 3{,}5 + \left(\frac{4}{100} + \frac{4}{1\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty \ldots = \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{45}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 79

Practica

Sucesiones

1 **Calcula los cuatro primeros términos y el que ocupa el lugar 25 de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$ b) $b_n = n - \frac{1}{n}$ c) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$

d) $d_n = \frac{n + n(-1)^n}{2}$ e) $e_n = \frac{n^2 + n}{2}$ f) $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$

a) $a_1 = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2} = -4{,}5$; $a_2 = \frac{2}{2} - 5 = -4$

$a_3 = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2} = -3{,}5$; $a_4 = \frac{4}{2} - 5 = -3$

$a_{25} = \frac{25}{2} - 5 = \frac{15}{2} = 7{,}5$

b) $b_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$; $b_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$b_3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}\widehat{6}$; $b_4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

$b_{25} = 25 - \frac{1}{25} = \frac{624}{25} = 24{,}96$

c) $c_1 = (-1)^1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$; $c_2 = (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$c_3 = (-1)^3 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$; $c_4 = (-1)^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$c_{25} = (-1)^{25} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

d) $d_1 = \frac{1 + 1(-1)^1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$; $d_2 = \frac{2 + 2(-1)^2}{2} = 2$

$d_3 = \frac{3 + 3(-1)^3}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$; $d_4 = \frac{4 + 4(-1)^4}{2} = 4$

$d_{25} = \frac{25 + 25(-1)^{25}}{2} = 0$

e) $e_1 = \frac{1^2 + 1}{2} = 1$; $e_2 = \frac{2^2 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$e_3 = \frac{3^2 + 3}{2} = 6$; $e_4 = \frac{4^2 + 4}{2} = 10$

$e_{25} = \frac{(25)^2 + 25}{2} = 325$

f) $f_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \cdot 2^1 = 2$; $f_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \cdot 2^2 = 2$

$f_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \cdot 2^3 = 2$; $f_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \cdot 2^4 = 2$

$f_{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{25-1} \cdot 2^{25} = 2$

2 **Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:**

a) $a_1 = 1;\ a_n = 2a_{n-1} + 3$

b) $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

c) $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$; $a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$; $a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$; $a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$

b) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$; $a_3 = \frac{3}{2}$; $a_4 = \frac{3}{2} : 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $a_5 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_4 = 6 \cdot 3 = 18$; $a_5 = 18 \cdot 6 = 108$

3 **Busca el criterio con el que se han formado estas sucesiones y escribe dos términos más en cada una:**

a) 1, 3/2, 2, 5/2, 3, …

b) 1, –2, 4, –8, 16, …

c) 1, 3, 6, 10, 15, …

d) 1, 4, 3, –1, –4, …

e) 0, 3, 8, 15, 24, …

f) 1, 1/2, 1/3, 1/4, …

a) $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$

$a_6 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $a_7 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

b) $a_n = (-2) \cdot a_{n-1}$

$a_6 = (-2) \cdot (16) = -32$; $a_7 = (-2) \cdot (-32) = 64$

c) $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$; $a_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

d) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ con $n > 2$

$a_6 = -3$; $a_7 = 1$

e) $a_n = n^2 - 1$ con $n \rightarrow$ natural

$a_6 = (6)^2 - 1 = 35$; $a_7 = (7)^2 - 1 = 48$

f) $a_n = \frac{1}{n}$

$a_6 = \frac{1}{6}$; $a_7 = \frac{1}{7}$

4 **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) 12, 14, 16, 18, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

c) 1, 3, 9, 27, …

d) $1 \cdot 2; 2 \cdot 3; 3 \cdot 4; 4 \cdot 5; \ldots$

a) $a_n = 10 + 2n$

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

c) $a_n = 3^{n-1}$

d) $a_n = n \cdot (n + 1)$

5 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 8, 10, 2, –8, –10, … **b) 4, 1, 3, –2, 5, …**

c) 1, 2, 2, 1, 1/2, … **d) 7, 9, 12, 16, 21, …**

a) $a_1 = 8$ y $a_2 = 10$; $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ b) $a_1 = 4$ y $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

c) $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$ d) $a_1 = 7$; $a_n = a_{n-1} + n$

Progresiones

6 **Escribe los cuatro primeros términos, el término general y calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $\boldsymbol{a_1 = 1{,}5;\ d = 2}$ **b)** $\boldsymbol{a_1 = 32;\ d = -5}$

c) $\boldsymbol{a_1 = 5;\ d = 0{,}5}$ **d)** $\boldsymbol{a_1 = -3;\ d = -4}$

a) $a_1 = 1{,}5;\ a_2 = 3{,}5;\ a_3 = 5{,}5;\ a_4 = 7{,}5$

$a_n = 1{,}5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 0{,}5$

$a_{20} = 39{,}5;\ S_{20} = \dfrac{(1{,}5 + 39{,}5) \cdot 20}{2} = 410$

b) $a_1 = 32;\ a_2 = 27;\ a_3 = 22;\ a_4 = 17$

$a_n = 32 + (n-1) \cdot (-5) = 37 - 5n$

$a_{20} = -63;\ S_{20} = \dfrac{(32 - 63) \cdot 20}{2} = -310$

c) $a_1 = 5;\ a_2 = 5{,}5;\ a_3 = 6;\ a_4 = 6{,}5$

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 4{,}5 + 0{,}5n$

$a_{20} = 14{,}5;\ S_{20} = \dfrac{(5 + 14{,}5) \cdot 20}{2} = 195$

d) $a_1 = -3;\ a_2 = -7;\ a_3 = -11;\ a_4 = -15$

$a_n = -3 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 1$

$a_{20} = -79;\ S_{20} = \dfrac{(-3 - 79) \cdot 20}{2} = -820$

7 **Halla el término general y calcula la suma de los quince primeros términos en cada una de las siguientes progresiones:**

a) 25, 18, 11, 4, … **b) –13, –11, –9, –7, …**

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; … **d)** $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 0, \ldots}$

a) Progresión aritmética de diferencia $d = -7 \rightarrow a_n = 25 + (n-1) \cdot (-7) = 32 - 7n$

$a_{15} = -73;\ S_{15} = \dfrac{(25 - 73) \cdot 15}{2} = -360$

b) Progresión aritmética de diferencia $d = 2 \rightarrow a_n = -13 + (n-1) \cdot 2 = -15 + 2n$

$a_{15} = 15;\ S_{15} = \dfrac{(-13 + 15) \cdot 15}{2} = 15$

c) Progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}5 \rightarrow a_n = 1{,}4 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 0{,}9 + 0{,}5n$

$a_{15} = 8{,}4;\ S_{15} = \dfrac{(1{,}4 + 8{,}4) \cdot 15}{2} = 73{,}5$

d) Progresión aritmética de diferencia $d = -1/4 \rightarrow a_n = \dfrac{3}{4} + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}n$

$a_{15} = -\dfrac{11}{4};\ S_{15} = \dfrac{-2 \cdot 15}{2} = -15$

8 **Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y su término general:**

a) $a_1 = 0{,}3;\ r = 2$

b) $a_1 = -3;\ r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ r = -0{,}1$

d) $a_1 = \frac{1}{81};\ r = 3$

a) $a_1 = 0{,}3;\ a_2 = 0{,}6;\ a_3 = 1{,}2;\ a_4 = 2{,}4;\ a_n = 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_1 = -3;\ a_2 = -3/2;\ a_3 = -3/4;\ a_4 = -3/8;\ a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_1 = 200;\ a_2 = -20;\ a_3 = 2;\ a_4 = -0{,}2;\ a_n = 200 \cdot (-0{,}1)^{n-1}$

d) $a_1 = \frac{1}{81};\ a_2 = \frac{1}{27};\ a_3 = \frac{1}{9};\ a_4 = \frac{1}{3};\ a_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$

9 **Halla el término general de cada una de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $20;\ 8;\ 3{,}2;\ 1{,}28;\ \ldots$

b) $5;\ 6;\ 7{,}2;\ 8{,}64;\ \ldots$

c) $0{,}7;\ 0{,}07;\ 0{,}007;\ \ldots$

d) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, \ldots$

¿En cuáles puedes sumar todos sus términos?

a) $a_n = 20 \cdot 0{,}4^{n-1}$

b) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 0{,}7 \cdot 0{,}1^{n-1}$

d) $a_n = \frac{1}{6} \cdot (-3)^{n-1}$

10 **Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $3, -6, 12, -24, \ldots$

b) $0{,}7;\ 1{,}4;\ 2{,}8;\ 5{,}6;\ \ldots$

c) $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \ldots$

d) $100;\ 20;\ 4;\ 0{,}8;\ \ldots$

a) $r = -2;\ S_{10} = \dfrac{3 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -1\,023$

b) $r = 2;\ S_{10} = \dfrac{0{,}7 \cdot (2^{10} - 1)}{1} = 716{,}1$

c) $r = \frac{3}{2};\ S_{10} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2}} = 75{,}55$

d) $r = 0{,}2;\ S_{10} = \dfrac{100 \cdot (0{,}2^{10} - 1)}{-0{,}8} \approx 125$

11 **Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

b) $18;\ 16{,}2;\ 14{,}58;\ 13{,}122;\ \ldots$

a) $r = 1/3;\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{4}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{4}{\frac{2}{3}} = 6$

b) $r = 0{,}9;\ S_\infty = \dfrac{18}{1 - 0{,}9} = 180$

12 **Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:**

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) **0,2; 0,02; 0,002; …**

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

e) **22; –11; 5,5; –2,75; …**

f) **18, 13, 8, 3, …**

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1)\frac{1}{8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8}n$.

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0{,}1$.

Término general: $a_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, … forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, … forman una progresión aritmética de término general n.

Término general de la sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

e) Progresión geométrica, $r = -0{,}5$; $a_n = 22 \cdot (-0{,}5)^{n-1}$

f) Progresión aritmética, $d = -5$; $a_n = 18 + (n-1) \cdot (-5) = 23 - 5n$

Resuelve problemas básicos

13 **Halla la diferencia de una progresión aritmética en la que $a_1 = 12$ y $a_{10} = -6$. Calcula la suma de los 25 primeros términos.**

$a_1 = 12$ $\qquad$ $a_{10} = -6$

$a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;\ a_4 = a_3 + d = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d \to$

$\to a_{10} = a_1 + 9d = 12 + 9d \to -6 = 12 + 9d \to -18 = 9d \to d = -\frac{18}{9} \to d = -2$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$a_{25} = a_1 + 24d = 12 + 24(-2) = 12 - 48 = -36$

$$S_{25} = \frac{(12 - 36) \cdot 25}{2} = -300$$

14 **De una progresión aritmética, conocemos $a_{20} = 92$ y la suma de sus 20 primeros términos, que es 890. Calcula el primer término y la diferencia.**

$a_{20} = 95;\ S_{20} = 890$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \to S_{20} = \frac{(a_1 + a_2) \cdot 20}{2} = 890 \to (a_1 + a_2) \cdot 10 = 890 \to$

$\to a_1 + a_2 = \frac{890}{10} \to a_1 = 89 - 92 \to a_1 = -3$

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d \to 92 = -3 + 19d \to d = \frac{95}{19} = 5$

15 **Durante sus vacaciones, Alba gastó 75 € el primer día, y cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. Si el dinero le duró 15 días, ¿cuánto dinero gastó en total?**

Primer día 75 €.

$d = -5$

$a_{15} = 75 + 14 \cdot d = 75 + 14 \cdot (-5) = 5$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(75 + 5) \cdot 15}{2} = 600 \text{ €}$$

En total gasto 600 €.

16 **Un bebé ha ido ganando aproximadamente un 20 % de peso cada mes. Si nació con 2 850 g, ¿cuánto pesa al final del sexto mes?**

$a_1 = 2\,850; \;\; r = 1{,}2$

$a_2 = a_1 \cdot 1{,}2$

$a_3 = a_2 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2^2$

$a_4 = a_3 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2^3$

$\vdots$

$a_6 = a_1 \cdot 1{,}2^5 = 2\,850 \cdot 1{,}2^5 = 7\,091{,}7 \text{ g} \;\rightarrow\; 7{,}1 \text{ kg}$

$a_7 = a_1 \cdot 1{,}2^6 = 2\,850 \cdot 1{,}2^6 \approx 8\,510{,}05 \text{ g} \;\rightarrow\; 8{,}51 \text{ kg}$

Página 80

17 **Eva se entrena durante 10 días para una carrera. El primer día corrió 30 min, y cada siguiente día, 15 min más que el día anterior. Le cuenta a un amigo que el último día corrió casi 3 h. ¿Es verdad? ¿Cuánto tiempo corrió durante todo el entrenamiento?**

$n = 10$; $a_1 = 30$; $d = 15$

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 30 + 9 \cdot 15 = 165$ min $\rightarrow$ 2 h y 45 min

Luego no corrió 3 h = 180 min

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(30 + 165) \cdot 10}{2} = 975 \text{ min} \rightarrow 16 \text{ h y } 15 \text{ min}$$

18 **Tomás se ha comprado un coche por 16 000 €. Sabiendo que los coches pierden aproximadamente un 15 % de su valor cada año, ¿cuál será el precio del coche después de 4 años?**

$a_1 = 16\,000$

Pierde 0,15 $\rightarrow$ $1 - 0{,}5 = 0{,}85$ $\rightarrow$ $r = 0{,}85$

$n = 5$

$a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_5 = 16\,000 \cdot (0{,}85)^4 \rightarrow a_5 = 8\,352{,}1$ €

19 **Sofía dice que una progresión aritmética de diferencia 2,5 cuyos primer y último término son 7 y 52, respectivamente, tiene 19 términos. Si Ramón dice que tiene 20, ¿quién tiene razón?**

$d = 2{,}5$; $a_1 = 7$; $a_n = 52$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow 52 = 7 + (n-1) \cdot 2{,}5 \rightarrow 45 = (n-1) \cdot 2{,}5 \rightarrow \frac{45}{2{,}5} = n - 1 \rightarrow$$

$\rightarrow 18 = n - 1 \rightarrow n = 19$

Comprobación $a_{19} = 7 + 18 \cdot 2{,}5 = 52$ $\rightarrow$ Tiene razón Sofía.

20 **En un teatro, la segunda fila está a 4,2 m del escenario, y la octava, a 8,7 m. ¿En qué fila está una persona si su distancia al escenario es 14,7 m?**

$a_2 = 4{,}2$; $a_8 = 8{,}7$; $a_k = 14{,}7$; $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\left.\begin{array}{l} a_8 = a_1 + 7d = 8{,}7 \\ a_2 = a_1 + d = 4{,}2 \end{array}\right\} \rightarrow 6d = 4{,}5 \rightarrow d = 0{,}75 \rightarrow a_1 = 3{,}45$$

$\downarrow$

Restando

$14{,}7 = a_1 + (k-1) \cdot d \rightarrow 14{,}7 = 3{,}45 + (k-1) \cdot 0{,}75 \rightarrow k - 1 = 15 \rightarrow$

$\rightarrow k = 16 \rightarrow$ Está en la fila 16.

21 **En una progresión geométrica, el primer término es 4. ¿Cuál debe ser la razón para que la suma de sus infinitos términos sea 5?**

$a_1 = 4$; $S_\infty = 5$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow 5 = \frac{4}{1-r} \rightarrow 5 \cdot (1-r) = 4 \rightarrow 5 - 5r = 4 \rightarrow -5r = -1 \rightarrow r = \frac{1}{5}$$

22 La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?

$a_{12} = a_1 + 11d \to a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ mg}$$

23 En una progresión geométrica se conocen $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

a) $a_1 = 64 = 2^6;\ d = 0{,}75 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2^2}$

El primer término no entero es $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 2^6 \cdot 2^6 \cdot \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^4 = \dfrac{2^6 \cdot 3^4}{2^8} = \dfrac{3^4}{2^2} = \dfrac{81}{4} = 20{,}25$

b) $a_{15} = 64 \cdot 0{,}75^{14} = 1{,}14;\ a_{16} = 64 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}855$

El primer término menor que 1 es $a_{16} = 0{,}855$.

24 La suma de diez múltiplos de 3 consecutivos es 255. ¿Cuál es el primero y el último de los múltiplos sumados?

Los múltiplos de 3 forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

$$255 = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 27) \cdot 5 = 10a_1 + 135 \to a_1 = 12$$

$a_{10} = 12 + 3 \cdot 9 = 39$

25 Las edades de 4 hermanas están en progresión aritmética y suman 34 años. La mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada una?

$$S_4 = 34;\ a_4 = 13;\ S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} \to 34 = \frac{(a_1 + 13) \cdot 4}{2} \to a_1 = 4$$

$a_4 = a_1 + 3d \to 13 = 4 + 3d \to d = 3$

Por tanto, las edades son: 4, 7, 10 y 13 años.

26 Calcula la suma de todos los múltiplos de 5 que tienen dos cifras.

$a_1 = 10;\ a_n = 95;\ d = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \to 95 = 10 + (n - 1) \cdot 5 \to 85 = 5n - 5 \to 90 = 5n \to$

$\to n = \dfrac{90}{5} \to n = 18$

$$S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} = \frac{(10 + 95) \cdot 18}{2} = 945$$

27 **Halla el primer término y la razón de una progresión geométrica en la que $a_4 = 3\sqrt{6}$ y $a_2 = \sqrt{6}$.**

$a_4 = 3\sqrt{6};\ a_2 = \sqrt{6}$

$a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 3\sqrt{6} = \sqrt{6} \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

- Si $r = \sqrt{3} \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{3}a_1 \rightarrow a_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \rightarrow a_1 = \sqrt{2}$
- Si $r = -\sqrt{3} \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow \sqrt{6} = -\sqrt{3}a_1 \rightarrow a_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{3}} \rightarrow a_1 = -\sqrt{2}$

28 **Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen $a_3 = 13$ y $a_7 = 31$.**

$a_3 = 13;\ a_7 = 31$

$a_7 = a_3 + 4 \cdot d \rightarrow 31 = 13 + 4 \cdot d \rightarrow 18 = 4 \cdot d \rightarrow d = \dfrac{18}{4} \rightarrow d = 4{,}5$

$a_3 = a_1 + 2 \cdot d \rightarrow 13 = a_1 + 2 \cdot (4{,}5) \rightarrow 13 = a_1 + 9 \rightarrow a_1 = 4$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 4 + (n-1) \cdot 4{,}5$

29 **La suma de 6 números impares consecutivos es 108. ¿Cuáles son esos números?**

$n = 6;\ S_6 = 108$

Son impares consecutivos $\rightarrow d = 2$.

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = 108 \rightarrow 108 = 3 \cdot (a_1 + a_6)$

$a_6 = a_1 + 5 \cdot d \rightarrow a_6 = a_1 + 5 \cdot 2 \rightarrow a_6 = a_1 + 10$

$108 = 3 \cdot (a_1 + a_1 + 10) \rightarrow 108 = 6a_1 + 30 \rightarrow 6a_1 = 78 \rightarrow a_1 = \dfrac{78}{6} \rightarrow a_1 = 13$

Los números son: 13, 15, 17, 19, 21, 23.

30 **Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales utilizando progresiones:**

a) $1,\widehat{8}$ **b)** $0,3\widehat{6}$ **c)** $0,\widehat{12}$ **d)** $4,2\widehat{3}$

a) $1,\widehat{8} = 1 + 0,8 + 0,08 + 0,008 + \ldots = 1 + \left(\dfrac{8}{10} + \dfrac{8}{100} + \dfrac{8}{1\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{9}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

b) $0,3\widehat{6} = 0,3 + 0,06 + 0,006 + \ldots = 0,3 + \left(\dfrac{6}{100} + \dfrac{6}{1\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\frac{6}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{90} = \frac{2}{30}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{30} = \frac{11}{30}$$

c) $0,\widehat{12} = 0 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \ldots = \left(\dfrac{12}{100} + \dfrac{12}{10\,000} + \dfrac{12}{1\,000\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{12}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{12}{99}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

d) $4,2\widehat{3} = 4 + 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots = 4 + \dfrac{2}{10} + \left(\dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1\,000} + \dfrac{3}{10\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{42}{10} + \frac{1}{30} = \frac{127}{30}$$

31 **Se deja caer una pelota desde una altura de 18 m y en cada rebote pierde 2/5 de la altura anterior. ¿Qué altura alcanzará después de tocar el suelo por tercera vez? Calcula la suma del espacio recorrido hasta que se para.**

$a_1 = 18$

Pierde $\frac{2}{5} \rightarrow r = \frac{2}{5}$

$a_4 = a_1 \cdot r^{(4-1)} \rightarrow a_4 = 18 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \rightarrow a_4 = 1{,}152$ m de altura

Como la pelota, en cada bote, sube y baja desde la misma altura, y teniendo en cuenta que la primera vez no sube porque cae desde 18 m, la suma será $2S_\infty - 18$.

Entonces el espacio que recorre es:

$$S_\infty = \frac{18}{1-\frac{2}{5}} = 30 \rightarrow 2 \cdot 30 - 18 = 42$$

La pelota recorre 42 m hasta que se para.

32 **¿A cuál de las siguientes sucesiones pertenecen los números 531, 27 y 1 201?**

a) 7, 13, 19, 25, … **b)** $\mathbf{4n + 3}$ **c)** $\mathbf{n^2 + 2}$

531, 27 y 1 201

a) $a_n = 7 + (n-1) \cdot 6$

$531 = 7 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 524 = 6n - 6 \rightarrow 6n = 530 \rightarrow n = 88,\widehat{3} \rightarrow$ 531 no pertenece a esta sucesión.

$27 = 7 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 20 = 6n - 6 \rightarrow 6n = 26 \rightarrow n = 4,\widehat{3} \rightarrow$ 27 no pertenece a esta sucesión.

$1\,201 = 7 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 1\,194 = 6n - 6 \rightarrow 6n = 1\,200 \rightarrow n = 200 \rightarrow$ 1 201 sí pertenece a esta sucesión.

b) $4n + 3 = 531 \rightarrow 4n = 528 \rightarrow n = 132 \rightarrow$ 315 pertenece a esta sucesión.

$4n + 3 = 27 \rightarrow 4n = 24 \rightarrow n = 6 \rightarrow$ 27 pertenece a esta sucesión.

$4n + 3 = 1\,201 \rightarrow 4n = 1\,198 \rightarrow n = 299{,}5 \rightarrow$ 1 201 no pertenece a esta sucesión.

c) $n^2 + 2 = 531 \rightarrow n^2 = 529 \rightarrow n = 23 \rightarrow$ 531 sí pertenece a esta sucesión.

$n^2 + 2 = 27 \rightarrow n^2 = 25 \rightarrow n = 5 \rightarrow$ 27 sí pertenece a esta sucesión.

$n^2 + 2 = 1\,201 \rightarrow n^2 = 1\,199 \rightarrow n = 34{,}6 \rightarrow$ 1 201 no pertenece a esta sucesión.

33 En una progresión aritmética conocemos dos términos, $a_2 = -23$ y $a_{12} = 32$.

a) Calcula el término general.

b) ¿Qué número corresponde al término a_{87}?

c) ¿Qué lugar ocupa el número 87?

$a_2 = -23$; $a_{12} = 32$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + (2-1)\cdot d \;\rightarrow\; -23 = a_1 + d \\ a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot d \;\rightarrow\; 32 = a_1 + 11d \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 = -d - 23 \\ 32 = -d - 23 + 11d \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -d - 23 \\ 10d = 55 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -d - 23 \\ d = 55/10 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -11/2 - 23 \\ d = 11/2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -57/2 \\ d = 11/2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 28,5 \\ d = 5,5 \end{array}\right\}$$

a) $a_n = -28,5 + (n-1) \cdot 5,5$

b) $a_{87} = -28,5 + (87-1) \cdot 5,5 \rightarrow a_{87} = 444,5$

c) $87 = -28,5 + (n-1) \cdot 5,5 \rightarrow 115,5 = 5,5 \cdot n - 5,5 \rightarrow 121 = 5,5n \rightarrow n = 22$

34 Una empresa ofrece a una trabajadora un sueldo mensual de 1 200 € y una subida de 100 € mensuales cada año. Otra le ofrece el mismo sueldo con una subida del 10 % anual. Comprueba cuál de las dos ofertas es mejor comparando el sueldo dentro de 10 años.

Empresa A $\rightarrow a_1 = 1\,200$; $d = 100$

$a_n = 1\,200 + (n-1) \cdot 100$

$a_{10} = 1\,200 + 9 \cdot 100 \rightarrow a_{10} = 2\,100$ €

Empresa B $\rightarrow a_1 = 1\,200$; $r = 1,1$

$a_n = 1\,200 \cdot (1,1)^{n-1}$

$a_{10} = 1\,200 \cdot (1,1)^9 \rightarrow a_{10} = 2\,829,5$ €

Luego la empresa B ofrece mejor sueldo.

35 Depositamos 6 000 €, al 5 % anual, al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada año, durante 6 años.

$a_1 = 6\,000$; $r = 1,05$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_2 = 6\,000 \cdot (1,05)^{2-1} = a_2 = 6\,300$

$a_3 = 6\,000 \cdot (1,05)^{3-1} = a_3 = 6\,615$

$a_4 = 6\,000 \cdot (1,05)^{4-1} = a_4 = 6\,945,75$

$a_5 = 6\,000 \cdot (1,05)^{5-1} = a_5 = 7\,293,04$

$a_6 = 6\,000 \cdot (1,05)^{6-1} = a_6 = 7\,657,7$

36 **La población de una ciudad aumenta por término medio un 1,5 % anual. Si en la actualidad hay 3 millones de habitantes, ¿cuántos tendrá dentro de 10 años? Da el resultado con dos cifras significativas y estima el error absoluto cometido.**

$a_1 = 3\,000\,000$; $r = 1,015$

$a_n = a_1 \cdot (r)^{n-1}$

$a_{10} = 3\,000\,000 \cdot (1,015)^9 \rightarrow a_{10} = 3\,430\,169,9 \rightarrow 34 \cdot 10^6$ habitantes.

El error absoluto cometido al dar el resultado con 2 cifras significativas es menor de $0,05 \cdot 10^6 \rightarrow 5 \cdot 10^4$ habitantes.

37 **La maquinaria de una fábrica pierde cada año el 20 % de su valor. Sabiendo que en el momento de su compra valía 40 000 €:**

a) ¿Cuánto valía un año después de comprarla? ¿Y dos años después?

b) ¿En cuánto se valorará 10 años después de haberla adquirido?

$a_1 = 40\,000$

Pierde el 20 % $\rightarrow 1 - 0,2 = 0,8 = r$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

a) $a_2 = a_1 \cdot (0,8) \rightarrow a_2 = 40\,000 \cdot 0,8 = 32\,000$ € $\rightarrow$ Un año después.

$a_3 = a_1 \cdot (0,8)^2 \rightarrow a_3 = 25\,600$ € $\rightarrow$ Dos años después.

b) $a_{11} = 40\,000 \cdot (0,8)^{10} \rightarrow a_{11} \approx 4\,294,97$ €.

Página 81

Resuelve: un poco más difícil

38 **Al inicio de cada año, durante 8 años, ingresamos en una cuenta de ahorro 2 000 € a un interés del 3,5 % anual.**

a) ¿En cuánto se convierte el primer ingreso al cabo de 8 años?

b) ¿Y el segundo al cabo de 7 años?

c) Si sigues razonando así, obtendrás una progresión geométrica cuya suma es el capital que tendrás al final del octavo año. Calcula ese capital.

$C_I = 2\,000$; $r = 1{,}035$

Al final del año $n \to a_n = 2000 \cdot (1{,}035)^n$

a) $a_8 = 2\,000 \cdot (1{,}035)^8 = 2\,633{,}62$ €

b) $a_7 = 2\,000 \cdot (1{,}035)^7 = 2\,544{,}56$ €

c) $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$; $r = 1{,}035$; $a_1 = 2\,000 \cdot 1{,}035$

$$S_8 = \frac{2\,070 \cdot ((1{,}035)^8 - 1)}{(1{,}035 - 1)} = 18\,736{,}9 \text{ €}$$

39 **Dos términos consecutivos de una progresión geométrica son 3 y 2. Averigua qué lugar ocupan sabiendo que $a_1 = 81/8$.**

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

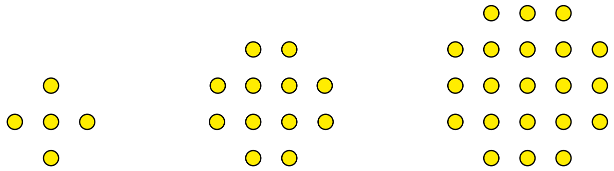
$$\left.\begin{array}{l} a_k = \dfrac{81}{8} \cdot r^{k-1} = 3 \\ a_{k+1} = \dfrac{81}{8} \cdot r^k = 2 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{81}{8} \cdot r^{k-1} = 3 \\ 81 \cdot r^k = 16 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{81}{8} \cdot r^{k-1} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{81}{8} \cdot \left(\dfrac{16}{81}\right) \cdot r^{-1} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} 2 \cdot r^{-1} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{r} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{2}{3} \\ k = 4 \end{array}\right\}$$

$$a_4 = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{81}{8} \cdot \frac{8}{27} = 3$$

$$a_5 = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 2$$

40 **¿Cuántos puntos tendrá la décima figura de esta serie? Averigua cuál es su término general.**



¿En qué posición estará la figura con 837 puntos?

$a_1 = 5$; $a_2 = 12$; $a_3 = 21$

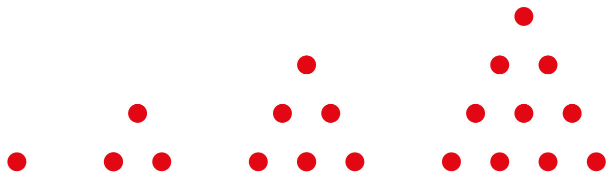
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 \\ a_2 = 2^2 + 4 \cdot 2 \\ a_3 = 3^2 + 4 \cdot 3 \end{array}\right\} \to a_n = n^2 + 4n$$

$a_{10} = (10)^2 + 4 \cdot 10 = 140$ puntos.

$$837 = n^2 + 4n \to n^2 + 4n - 837 = 0 \to n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 3\,348}}{2} \to n = \frac{-4 \pm \sqrt{3\,364}}{2} \to$$

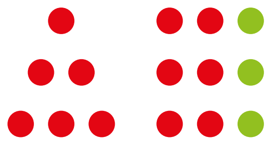
$$\to n = \frac{-4 \pm 58}{2} \begin{cases} n = 27 \\ n = -31 \to \text{No puede ser} \end{cases}$$

41 **¿Cuántos puntos tendrá la siguiente figura? ¿Y la décima? Halla cuántos tendrá la figura *n*-ésima.**



a) Comprueba que, sumando dos términos consecutivos, siempre obtienes un cuadrado perfecto.

b) Observa la tercera figura. Si con esos 6 puntos queremos formar un cuadrado nos faltan 3 puntos.



Probamos con otros triángulos y encontramos uno al que también le faltan 3 puntos para formar un cuadrado. ¿Cuántos puntos tiene ese cuadrado?

$a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 6;\ a_4 = 10$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{2^2+2}{2} \\ 6 = \dfrac{12}{2} = \dfrac{3^2+3}{2} \\ 10 = \dfrac{20}{2} = \dfrac{4^2+4}{2} \end{array}\right\} \to a_n = \frac{n^2+n}{2}$$

$$a_5 = \frac{(5)^2+5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$a_{10} = \frac{(10)^2+10}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

a) $a_1 + a_2 = 4 = 2^2;\ a_2 + a_3 = 9 = 3^2;\ a_3 + a_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$

$$a_n + a_{n+1} = \left(\frac{n^2+n}{2}\right) + \left(\frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2+n+n^2+2n+1+n+1}{2} =$$

$$= \frac{2n^2+4n+2}{2} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

b) Cuadrados perfectos: 16, 25, 36, 49, 64, 81

- $16 - 3 = 13 \rightarrow 13 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 26 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 104}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{105}}{2} \rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $25 - 3 = 22 \rightarrow 22 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 44 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 176}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{177}}{2} \rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $36 - 3 = 33 \rightarrow 33 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 66 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 264}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $49 - 3 = 46 \rightarrow 46 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 92 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 368}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $64 - 3 = 61 \rightarrow 61 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 122 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 488}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $81 - 3 = 78 \rightarrow 78 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow n = \dfrac{-1 \pm 25}{2} \begin{cases} 12 \\ -13 \rightarrow \text{No vale} \end{cases}$

$n = 12 \rightarrow$ El triángulo que va en la posición 12 y tiene 78 puntos.

El cuadrado tiene 81 puntos.

42 Observa los cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos.

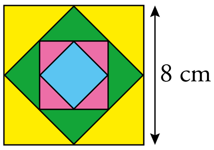
a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esa sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

c) Escribe la sucesión de las longitudes de sus lados.

Área cuadrado = l^2

a)



El área de los sucesivos cuadrados es la mitad de la del anterior. Luego:

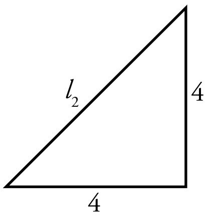
- $c_1 = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$; $c_2 = 32 \text{ cm}^2$; $c_3 = 16 \text{ cm}^2$; $c_4 = 8 \text{ cm}^2$; $c_5 = 4 \text{ cm}^2$; $c_6 = 2 \text{ cm}^2$ $\to$

  $\to$ Término general: $c_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{64}{1-\frac{1}{2}} = 128 \text{ cm}^2$

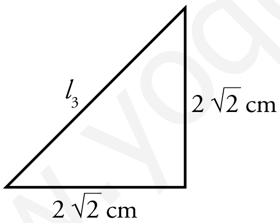
c) $l_1 = 8$ cm

- Calculamos l_2:



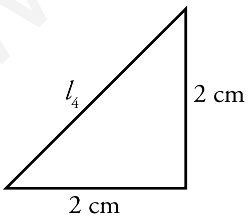
$\to$ $l_2 = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ cm

- Calculamos l_3:



$\to$ $l_3 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$ cm

- Calculamos l_4:



$\to$ $l_4 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm

- Término general: $l_n = \dfrac{l_n - 1}{2} \cdot \sqrt{2}$; $l_1 = 8$ cm

43 **Comprueba que en cualquier progresión aritmética se verifica que $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$.**

$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_1 + (n-2) \cdot d \\ a_{n+1} = a_1 + (n) \cdot d \end{array}\right\rangle a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_1 + d \cdot (n-2+n) \to$$

$\to a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_1 + 2d \cdot (n-1) \to a_{n-1} + a_{n+1} = 2(a_1 + d \cdot (n-1)) \to$

$\to a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

44 **Demuestra que la suma de los n primeros números pares es $n^2 + n$.**

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = S_n$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} \to S_n = \frac{2(1+n) \cdot n}{2} \to S_n = n + n^2$$

45 **Demuestra que en cualquier progresión geométrica se cumple que $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.**

$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1};\ a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_1 \cdot r^{(n-1-1)} \\ a_{n+1} = a_1 \cdot (r^n) \end{array}\right\rangle a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot a_1 \cdot r^n \to a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1^2 \cdot r^{2n-2} \to$$

$\to a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1^2 \cdot r^{2(n-1)} \to a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot r^{n-1})^2 \to a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_n)^2$

Reflexiona

46 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) La diferencia en las progresiones aritméticas es siempre un número negativo.

b) No se puede hallar la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica creciente.

c) La sucesión 3, 3, 3, 3, … no es una progresión.

d) Si sumamos término a término dos progresiones aritméticas, se obtiene otra progresión aritmética.

e) En todas las progresiones aritméticas se verifica que $a_2 + a_{13} = a_{15}$.

f) Si en una progresión aritmética $a_5 + a_{17} = 32$, podemos saber cuánto vale a_{11}.

a) Falso, puede ser positivo o negativo.

b) Verdadero, porque es una progresión geométrica creciente ha de ser $r > 1$.

c) Falso. Es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 0$, o una progresión geométrica de primer término $a_1 = 3$ y razón $r = 1$.

d) Verdadero. Se obtiene una progresión aritmética de primer término la suma de los primeros términos y de diferencia, la suma de las diferencias.

$a_n = a_1 + (n-1)d_1;\ b_n = b_1 + (n-1)d_2;\ a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(d_1 + d_2)$

e) Verdadero. $a_2 + a_{13} = a_1 + 14d = a_{15}$

f) Verdadero. $a_5 + a_{17} = 2a_1 + 20d = 32 \to a_1 + 10d = a_{11} = 16$

47 Razona y elige la respuesta correcta.

a) Una sucesión es creciente cuando:

i) $a_n > a_{n+1}$ ii) $a_n < a_{n+1}$ iii) $a_n > 0$

b) Si una progresión aritmética es creciente, su diferencia es:

i) $-1 < d < 1$ ii) Mayor que 1 iii) Positiva

c) En una progresión geométrica con $-1 < r < 0$, ¿cuándo se puede hallar la suma de todos sus términos?

i) Siempre ii) Si $a_1 > 0$ iii) Nunca

d) El número de términos de la progresión 6, 11, 16, 21, …, 126, es:

i) 20 ii) 15 iii) 25

a) Una sucesión creciente es aquella en la que un término es menor que el siguiente. La respuesta correcta es la ii).

b) Los términos de una progresión aritmética se calculan sumando al término anterior una cantidad fija d luego, siempre que esa cantidad d sea positiva la progresión es creciente.

La respuesta correcta es la iii).

c) Siempre que la razón r de una progresión geométrica verifique $0 < |r| < 1$, se puede calcular la suma de todos sus términos.

La respuesta correcta es la i).

d) 6, 11, 16, 21, …, 126

$a_1 = 6$

$d = 5$

$a_n = 126 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow 126 = 6 + (n-1) \cdot 5 \rightarrow 120 = (n-1) \cdot 5 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{120}{5} = (n-1) \rightarrow 24 = n-1 \rightarrow n = 25$

La respuesta correcta es la iii).

Página 82

Lee, reflexiona y deduce

Las matemáticas son pura lógica y siempre exactas. Sin embargo, a veces parece que llegan a contradicciones. Observa, por ejemplo, esta suma de infinitos sumandos:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Podemos interpretarla de dos formas:

$$\left.\begin{array}{l} S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0 \\ S = 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+\dots = 1 \end{array}\right\} \text{¡SORPRESA!}$$

Y por si te parece poco lío, podemos todavía enredarlo más:

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

Es decir, $1 - S = S$. Por tanto, $S = \frac{1}{2}$ ¡SUPERSORPRESA!

- **¿Dónde está la trampa? ¿Será que al tomar infinitos sumandos se pierde el camino de la lógica? ¿Tú qué opinas?**

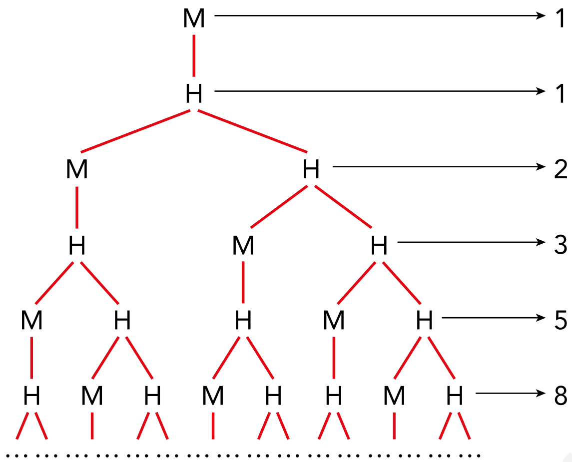
  Si vamos sumando término a término, los resultados son 1, 0, 1, 0, 1, 0, … Esta suman, si la llevamos al infinito, no llega a ningún sitio fijo, siempre va alternando entre 1 y 0. Efectivamente, al tomar infinitos sumandos se pierde el camino de la lógica.

Lee y comprende

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El esquema de la derecha nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- **¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?**

  El número de antepasados en cada una de las diez primeras generaciones es:

  1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 9

- **¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?**

  Ley de formación: Cada término se obtiene sumando los dos que le preceden:

  $$a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

- **¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?**

  Sucesión de Fibonacci.

Entrénate resolviendo problemas

- **Las personas que participan en un desfile pueden agruparse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9.**

  ¿Cuántas personas participan si sabemos que son entre 1 000 y 1 250?

El número de participantes es un múltiplo de $3 \cdot 25 = 75$ (ten en cuenta que 25 es múltiplo de 5).

Los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 000 y 1 250 son:

1 050   1 125   1 200

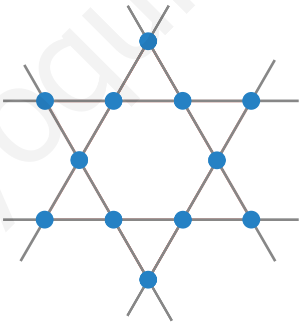
1 050 no es múltiplo ni de 4 ni de 9.

1 125 es múltiplo de 9.

1 200 es múltiplo de 4.

Por tanto, el número de participantes es de 1 050.

- **Sitúa 12 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 6 filas de 4 soldados.**



- **a) ¿Cuántas de estas monedas hemos de tocar para que las tres caras estén a la izquierda y las tres cruces a la derecha?**

  b) ¿Cuántas de estas copas hemos de tocar para que queden tres llenas a la izquierda y tres vacías a la derecha?

a) Da la vuelta a las monedas que están en las posiciones segunda y quinta.

b) Toma la quinta copa y vierte su contenido en la segunda.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Escribe el término general de cada sucesión:**

a) 3; 0,6; 0,12; 0,024; … **b) 1,2; 2,3; 3,4; 4,5; …**

a) $a_n = 3 \cdot 0{,}2^{n-1}$ b) $a_n = 0{,}1 + 1{,}1n$

2 **Define por recurrencia la sucesión 8, 14, 6, –8, … y escribe los tres términos siguientes.**

$a_1 = 8;\ a_2 = 14 \rightarrow a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

Tres términos siguientes: –14, –6, 8, …

3 **Calcula la suma de los diez primeros términos de las siguientes progresiones:**

a) 9; 6,5; 4; 1,5; … **b) 2, –4, 8, –16, …**

a) Progresión aritmética de primer término 9 y diferencia $d = -2{,}5$.

$$a_{10} = 9 - (9 \cdot 2{,}5) = -13{,}5;\ S_{10} = \frac{(9 - 13{,}5) \cdot 10}{2} = -22{,}5$$

b) Progresión geométrica de primer término 2 y razón $r = -2$.

$$S_{10} = \frac{2 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -682$$

4 **En una progresión aritmética conocemos $a_5 = 22$ y $a_9 = 38$. Calcula a_{25} y el lugar que ocupa un término cuyo valor es 58.**

$a_9 = a_5 + 4d \rightarrow 38 = 22 + 4d \rightarrow d = 4$

$22 = a_1 + 4 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 6$

$a_{25} = 6 + 24 \cdot 4 = 102$

$58 = 6 + (n - 1) \cdot 4 \rightarrow n = 14$

5 **La suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética es 200 y $a_1 = 0{,}5$. Halla a_{20} y la diferencia.**

$$\left.\begin{array}{l} S_{20} = 200 \\ a_1 = 0{,}5 \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \end{array}\right\} \rightarrow 200 = \frac{(0{,}5 + a_{20}) \cdot 20}{2} \rightarrow 200 = 5 + 10 \cdot a_{20} \rightarrow 100 \cdot a_n = 195 \rightarrow$$

$\rightarrow a_n = 19{,}5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow 19{,}5 = 0{,}5 + 19 \cdot d \rightarrow 19 = 19d \rightarrow d = 1$

6 **Un móvil recorre 5 m/s y aumenta su velocidad de forma que cada segundo avanza 2 m más que en el segundo anterior. ¿Cuánto recorrerá en un minuto?**

$a_1 = 5;\ d = 2;\ 1$ minuto $\rightarrow$ 60 segundos

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_{60} = 5 + (60-1) \cdot 2 \rightarrow a_{60} = 123$

Calculamos los metros que recorre en 1 minuto:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(5+123) \cdot 60}{2} = 3\,840 \text{ metros en 1 minuto.}$$

7 **Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 15 000 € anuales y una subida de 500 € cada año siguiente. Otra empresa le ofrece el mismo sueldo con una subida del 5 % anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 5 años.**

En el primer caso tenemos una progresión aritmética:

$a_1 = 15\,000;\ d = 500 \rightarrow a_5 = 15\,000 + 4 \cdot 500 = 17\,000$ €

En el segundo caso tenemos una progresión geométrica:

$a_1 = 15\,000;\ r = 1{,}05 \rightarrow a_5 = 15\,000 \cdot 1{,}05^4 = 18\,232{,}59$ €

Es mejor la segunda oferta.

8 **Para rodar un anuncio, se ha contratado a un gran número de personas que deben colocarse en 51 filas. Cada fila tiene dos personas más que la anterior y en la fila 26 tiene que haber 57 personas. Averigua cuántas personas hay en la primera fila, cuántas en la última y el número total de personas que intervienen en el anuncio.**

Es una progresión aritmética de la que sabemos $n = 51,\ d = 2$ y $a_{26} = 57$.

$a_{26} = a_1 + 25d \rightarrow 57 = a_1 + 25 \cdot 2 \rightarrow a_1 = 7$

$a_{51} = a_1 + 50d \rightarrow a_{51} = 7 + 50 \cdot 2 = 107$

$$S_{51} = \frac{7+107}{2} \cdot 51 = 2\,907 \text{ personas en total.}$$

9 **En una progresión geométrica de razón 1/2, el cuarto término es igual a 1.**

a) Halla el primer término.

b) Calcula la suma de los infinitos términos.

$r = \frac{1}{2};\ a_4 = 1$

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \rightarrow 1 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \rightarrow a_1 = 8$

b) $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \rightarrow S_\infty = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow S_\infty = 16$

10 **¿Verdadero o falso?**

a) Si la diferencia de una progresión aritmética es menor que 0, la progresión es decreciente.

b) No puede haber una progresión geométrica que tenga todos los términos negativos.

c) Si multiplicamos, término a término, dos progresiones aritméticas, se obtiene una progresión geométrica.

d) La razón de una progresión geométrica puede ser un número menor que 0.

e) Si una progresión geométrica tiene razón negativa a partir de un determinado término, los siguientes son todos negativos.

a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Si $d < 0 \ \rightarrow \ d = -k \ \rightarrow \ a_n = a_1 - (n-1) \cdot k \ \rightarrow \ a_n < a_1 \ \rightarrow$ La progresión es decreciente $\rightarrow$ Verdadero.

b) Si el primer término de una progresión geométrica es negativo y la razón es positiva $\rightarrow$ $\rightarrow$ Todos los términos de la progresión son negativos $\rightarrow$ Falso.

c) Falso.

Contraejemplo:

Sea $a_n = 2, 4, 6, 8, \dots \ \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 2$.

Sea $b_n = 1, 4, 7, 10, \dots \ \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 3$.

Entonces $a_n \cdot b_n = 2, 16, 42, 80, \dots$ vemos que no es una progresión geométrica ya que

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$$

$c_2 : c_1 = 16 : 2 = 8$
$c_3 : c_2 = 42 : 16 \neq 8$
No es una progresión geométrica.

d) Verdadero.

Ejemplo: sean los términos $\dfrac{-25}{3}; 5; -3; \dfrac{9}{5}; \dfrac{-27}{25}$

Pertenecen a una progresión geométrica de razón $-\dfrac{3}{5} < 0$

e) Falso.

En la progresión del ejemplo anterior la razón es negativa y los términos van alternando el signo.