

Cálculo vectorial

1. Representa los siguientes vectores y calcula su módulo:

$$\mathbf{r} = (3, -1, 0) \quad \mathbf{s} = 4\vec{i} \quad \mathbf{t} = -1\vec{i} - 2\vec{j} \quad \mathbf{u} = (-3, 6, 0) \quad \mathbf{v} = (-5, 0, 0) \quad \mathbf{w} = (0, -1, 0)$$

$$\text{Sol: } \sqrt{10}; 4; \sqrt{5}; \sqrt{45} = 3\sqrt{5}; 5; 1.$$

2. Indica la dirección y el sentido de los vectores $\mathbf{s}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

3. Realiza las siguientes operaciones gráfica y analíticamente:

$$\text{a) } \mathbf{r} + \mathbf{s} \quad \text{b) } \mathbf{t} + \mathbf{u} \quad \text{c) } 3\mathbf{t} \quad \text{d) } -2\mathbf{w} \quad \text{e) } \mathbf{s} - 2\mathbf{w} \quad \text{f) } 3\mathbf{t} + 2\mathbf{v} \quad \text{h) } \mathbf{s} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

$$\text{Sol: } (7, -1, 0); (-4, 4, 0); (-3, -6, 0); (0, 2, 0); (4, 2, 0); (-13, -6, 0); (-1, -1, 0)$$

4. Un vector tiene por módulo 15 m y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcula gráfica y analíticamente sus componentes y represéntalo en función de dichas componentes.

$$\text{Sol: } 13\vec{i}$$

$$+ 7,5\vec{j} \text{ m}$$

5. Un vector tiene por módulo 5 m y forma un ángulo de 60° con la horizontal. Calcula gráfica y analíticamente sus componentes y represéntalo en función de dichas componentes.

$$\text{Sol: } 2,5$$

$$\vec{i} + 4,3\vec{j} \text{ m}$$

6. Dado un vector, $\mathbf{v} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$ m/s, determina su módulo, así como el ángulo que forma con el eje OX y con el eje OZ

$$\text{Sol: } 5 \text{ m/s}; 36,9^\circ 53,1^\circ$$

7. Dado un vector, $\mathbf{r} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ m, determina su módulo, así como el ángulo que forma con el eje OX y OY.

$$\text{Sol: } 4,5 \text{ m}; 116,4^\circ; 27,3^\circ$$

Descripción del movimiento.

8. Escribe el vector de posición y calcula sus módulos correspondientes para los siguientes puntos: P1 (4,2), P2 (-3,1) y P3 (1,0); Las unidades de las coordenadas están en el Sistema Internacional.

9. Sea $\vec{r} = (3t - 4)\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, en unidades del SI, el vector de posición de un móvil.

Calcula $r(t)$ para $t = 2$ y $t = 5$ s así como el vector desplazamiento entre ambos instantes.

$$\text{Sol: } \vec{r}(2) = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad \vec{r}(5) = 11\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad \Delta\vec{r} = 9\vec{i}$$

10. El vector de posición de una partícula es: $\vec{r}(t) = (2t^2 + t - 1)\vec{i} + (t + 2)\vec{j}$ en unidades del S.I.

Determina:

- El vector posición en los instantes $t=1$ y $t=3$ s.
- El vector desplazamiento entre los instantes anteriores y su módulo.
- La ecuación de la trayectoria en unidades del S.I. . Dibuja aproximadamente su trayectoria.

$$\text{Sol: a) } \vec{r}(1) = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{r}(3) = 20\vec{i} + 5\vec{j} \quad \text{b) } \Delta\vec{r} = 18\vec{i} + 2\vec{j} \quad |\Delta\vec{r}| = 18,11 \text{ m}$$

$$\text{c) } x = 2y^2 - 7y + 5$$

11. Una partícula se mueve en línea recta según la ecuación $s = 4t^2 + 2t + 3$ en unidades del SI. Calcula:

- Posición inicial.
- Rapidez inicial.
- La rapidez en el instante $t = 2$ s

d) La aceleración del movimiento.

Sol: a) $s_0=3$ m , b) $v_0=2$ m/s , c) $v=18$ m/s , d) $a=8$ m/s²

12. Un movimiento plano referido al sistema $(\vec{i}, \vec{j})$ viene descrito por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{1}{2} t^2$$

$$y = t^2 - 1$$

Determina la ecuación de la trayectoria, la velocidad y la aceleración. **Sol:** $y=2x-1$; $v=\sqrt{5}t$ $a=\sqrt{5}$

13. El vector de posición de una partícula en cualquier instante viene dado por $\vec{r}=5t^2\vec{i}+6t\vec{j}$ en unidades del SI. Calcula la velocidad con que se mueve la partícula en cualquier instante y su módulo en el instante $t=2$ s.

Sol: $\vec{v}=10t\vec{i}+6\vec{j}$ ms⁻¹ ; $\vec{v}(2)=20\vec{i}+6\vec{j}$ ms⁻¹ ; $v=20,88$ ms⁻¹

14. La ecuación del movimiento de un objeto es $\vec{r}=3t^2\vec{i}+2t\vec{j}$ (m). Calcula:

- Velocidad media entre $t=2$ s y $t=5$ s.
- Módulo del vector velocidad media entre $t=2$ s y $t=5$ s.
- Velocidad instantánea y su módulo.
- Velocidad en $t=3$ s y su módulo.

Sol: a) $\vec{v}_m=21\vec{i}+2\vec{j}$ (ms⁻¹) b) $v=21,1$ ms⁻¹ ; c)

$\vec{v}(t)=6t\vec{i}+2\vec{j}$ (ms⁻¹) $v=\sqrt{36t^2+4}$ (ms⁻¹) d) $\vec{v}(3)=18\vec{i}+2\vec{j}$ (ms⁻¹)

15. La ecuación de movimiento de un móvil es: $\vec{r}=(2t-4)\vec{i}+(t^2-3t)\vec{j}$ (m). Calcular:

- Vector de posición inicial.
- Ídem a los 3 segundos.
- Vector desplazamiento en el intervalo $t=0$ y $t=3$ s, y su módulo.
- Ecuaciones paramétricas.
- Ecuación de la trayectoria.

Sol: a) $\vec{r}_0=-4\vec{i}$ m b) $\vec{r}(3)=2\vec{i}$ m c) $\Delta\vec{r}=6\vec{i}$ m, $\Delta r=6$ m. ; d) $x=2t-4$ m, $y=t^2-3t$

$$e) y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \text{ (m)}$$

16. El vector posición de una partícula P es : $\vec{r}=3t\vec{i}-t^2\vec{j}+8\vec{k}$ en unidades del SI. Hallar:

- La velocidad de la partícula a los 2 minutos de iniciado el movimiento.
- Las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria a los 2 s.

Sol: a) $v=240$ m/s b) $a_t=1,6$ m/s² $a_n=1,2$ m/s², $R=29,8$ m.

Movimientos en una dimensión.

17. Determinar las constantes de un movimiento uniformemente variado, si el móvil tiene una velocidad de 17 m/s a los 4 s de empezar a contar el tiempo; y en los instantes $t_1=2$ s y $t_2=4$ s dista del origen 12 y 40 m respectivamente.

Sol: $s_0=-4$ m/s; $v_0=5$ m/s; $a=3$ m/s²

18. Por la ventana de un edificio, a 15 metros de altura, se lanza horizontalmente una bola con una velocidad de 10 m/s. Hay un edificio enfrente, a 12 metros, más alto que el anterior.

- ¿choca la bola con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?.
- si tropieza contra el edificio ¿a qué altura del suelo lo hace?. Tomar $g=10$ m/s².

Sol: Da en el edificio de enfrente; 7'8 m

19. Un pájaro parado en un cable a 5 metros sobre el suelo deja caer un excremento libremente. Dos metros por delante de la vertical del pájaro, y en sentido hacia ella, va por la calle una persona a 5 Km/h. La persona mide 1,70 m. Calcula; a) si le cae en la cabeza y b) a qué velocidad debería ir para que le cayera encima.

Sol: No le cae; 2'47 m/s

20. Un coche viaja a 72 Km/h y de repente encuentra un camión estacionado a 30 m de distancia. Frena con la máxima aceleración de -5 m/s^2 . Calcular:
- Tiempo que tarda en detenerse.
 - ¿Choca contra el camión?

Sol: a) $t = 4 \text{ s}$ b) si

21. Un automóvil circula a 72 Km/h. En ese momento, el conductor ve un obstáculo en la carretera y pisa el freno hasta que el coche se detiene. Suponiendo que el tiempo de reacción del automovilista es de 0,5 s, y que la aceleración de frenado es de 5 m/s^2 , calcular:
- Distancia recorrida durante el tiempo de reacción (durante ese tiempo aún no ha pisado el freno).
 - Tiempo total que tarda el coche en detenerse.
 - Distancia que recorre hasta que se para.
 - Velocidad y posición del automóvil al cabo de 2 s desde que empezamos a estudiar este movimiento.

Sol: a) 10 m ; b) 4,5 s ; c) 40 m ; $\vec{v} = 12,5 \vec{i} \text{ ms}^{-1}$; $\vec{r} = 34,38 \vec{i} \text{ (m)}$

22. Un cohete se dispara verticalmente y sube con una aceleración de 20 m/s^2 durante un minuto. En ese instante se acaba el combustible y sigue moviéndose como partícula libre. Tomando g como constante, calcular:
- La altura máxima alcanzada.
 - El tiempo que está el cohete en el aire.

Sol: a) 109,5 Km b) 331 s.

23. Desde un globo aerostático que asciende con una velocidad de 5 m/s se suelta uno de los sacos de lastre. Si desde que se suelta hasta que llega al suelo transcurren 10 s, calculo la altura a la que se encontraba el globo en el momento de la caída.

Sol: 450 m.

24. Un ascensor sube con velocidad constante de 2 m/s. Cuando se encuentra a 10 m sobre el nivel del suelo los cables se rompen. Prescindiendo del rozamiento,
- Calcular la máxima altura a que llega la cabina.
 - Si los frenos de seguridad actúan automáticamente cuando la velocidad del descenso alcanza el valor de 4 m/s, determinar la altura en la que actúan los frenos.

Sol: 10' 2 m, 9' 38 m

25. Una grúa eleva un objeto pesado a velocidad constante de 10 ms^{-1} . cuando el objeto se encuentra a 5 m sobre el suelo, rompe el cable quedando aquél en libertad. Se pregunta
- ¿Hasta que altura seguirá subiendo el objeto? y
 - ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo desde que se rompió la cuerda?

Sol: 10 m; 2'41 s

Movimiento circular

26. Una rueda de 20 centímetros de radio, inicialmente en reposo, gira con movimiento uniformemente acelerado y alcanza una velocidad de 120 rpm al cabo de 30 s. Calcula:
- La velocidad lineal de un punto de la periferia de la rueda en el instante $t = 30 \text{ s}$.
 - El módulo de la aceleración normal en ese momento.

Sol. a) 2'52 m/s ; b) 31'8 m/s^2

27. Una piedra atada al extremo de una cuerda gira uniformemente 3 vueltas por segundo con un radio de 1m. Calcula:

- La velocidad angular de la piedra en rpm y en rad /s.
- El ángulo girado en una décima de segundo.

- c) La velocidad lineal de la piedra.
- d) El arco que recorre cada décima de segundo.

Sol. :a) $\omega = 180 \text{ rpm} = 18'8 \text{ rad/s}$; b) $1'88 \text{ rad}$; c) $18'8 \text{ m/s}$; d) $1,88 \text{ m}$

28. Una rueda de 0,5 m de radio gira a 20 rad/s. Calcular:

- a) Periodo y frecuencia del movimiento.
- b) Ecuación del movimiento.
- c) Tiempo que tarda en dar 100 vueltas completas.
- d) Ángulo recorrido en 5 minutos.
- e) Velocidad de un punto situado en el exterior y de otro situado a 25 cm del centro.

Sol: a) 0,315 s , 3,18 Hz ; b) $\theta = 20t \text{ (rad)}$ c) 31,4 s, d) 6000 rad d) 10 m/s, 5 m/s.

29. El periodo del M.C.U. De un disco es de 5 s. Calcular:

- a) Frecuencia y velocidad angular.
- b) Ecuación del movimiento.
- c) Velocidad de un punto situado a 10 cm del centro.
- d) Aceleración lineal (tangencial) de dicho punto.
- e) Ángulo y distancia recorrida por el punto anterior en 1 minuto.

Sol: a) 0,2 Hz ; 1,257 rad/s. b) $\theta = 1,257 t \text{ (rad)}$; c) 0,13 m/s; d) $0,158 \text{ m/s}^2$; e) 75,42 rad , 7542 m.

30. Un motor es capaz de imprimir una velocidad angular de 3000 rpm a un volante en 10 s cuando parte del reposo. Calcular:

- a) La aceleración angular del proceso.
- b) ¿Cuántos radianes gira el volante en el tiempo anterior.

Sol: a) $12,6 \text{ rad/s}^2$, b) 1571 rad , aprox. 250 vueltas

Movimientos en dos dimensiones

31. Las aguas de un río bajan con una rapidez de 0,5 m/s en un lugar donde la anchura es 60 m. Un nadador pretende cruzarlo nadando perpendicularmente a la orilla, con una rapidez de 1 m/s.

- a) Dibuja la trayectoria seguida por el nadador hasta llegar a la otra orilla y determina la suma de las dos velocidades, la del agua y la del nadador.
- b) ¿Cuánto tiempo tarda en atravesar el río?
- c) ¿A qué punto de la otra orilla llega?

32. Un avión, que vuela horizontalmente a 1.000 m de altura con una velocidad constante de 100 m/s, deja caer una bomba para que dé sobre un vehículo que está en el suelo. Calcular a qué distancia del vehículo, medida horizontalmente, debe soltar la bomba si éste:

- a) está parado
- b) se aleja del avión a 72 Km/h.

Sol: 1414 m; 1131'2 m

33. Por la ventana de un edificio, a 15 metros de altura, se lanza horizontalmente una bola con una velocidad de 10 m/s. Hay un edificio enfrente, a 12 metros, más alto que el anterior.

- a) ¿choca la bola con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?.
- b) si tropieza contra el edificio ¿a qué altura del suelo lo hace?.

Sol: a) si choca b) 7,94 m

34. Se lanza un objeto desde el punto más alto de un edificio de 30 m de altura, con una velocidad inicial de 30 m/s y con ángulo de 30° con la horizontal. Halla:
- a) Las ecuaciones de movimiento.
 - b) El tiempo que tarda el objeto en alcanzar su altura máxima.
 - c) El valor de la altura máxima respecto al suelo.
 - d) El tiempo que tarda en llegar al suelo.
 - e) La distancia entre la base del edificio y el punto de impacto en el suelo.
 - f) La velocidad con la que llega al suelo.

Sol. a) $x = 26t$; $y = 30 + 15t - 4'9t^2$; b) 1'53 s; c) 41'5 m; d) 4'44 s; e) 115 m; f) 38'6 m/s

35. Un pastor lanza una piedra con una honda alcanzando un objetivo que está a 200 m en la horizontal del tiro. Si el ángulo de salida fue 45° , calcula la velocidad de lanzamiento. Calcula también la altura máxima alcanzada y el tiempo de vuelo.

Sol. 44'72 m/s; 50 m; 6'32 s

36. En un duelo del lejano Oeste un pistolero dispara horizontalmente una bala con 200 m/s desde una altura de 1,25 m. Calcular la distancia mínima entre los adversarios situados en plano horizontal, para que la presunta víctima no sea alcanzada.

Sol: 101 m

37. El famoso cañón Berta (de la 1ª Guerra Mundial) tenía un alcance de 100 Km. Despreciando la resistencia del aire, calcular:

- a) la rapidez del proyectil al salir por la boca del cañón.
- b) La altura máxima del proyectil en tiro vertical.

Sol: 900 m/s ; h 50 Km

38. Un avión de bombardeo baja en picado a una velocidad de 700 Km/h, formando un ángulo de 45° con al horizontal. Cuando está a una altura de 400 m sobre el suelo suelta una bomba. Calcular:

- a) el tiempo que tarda en llegar al suelo.
- b) La rapidez con que llega.
- c) El punto en que cae (distancia a la vertical del avión en el instante de lanzamiento).

Sol: a) 2,66s b) 213 m/s c) 365,75 m

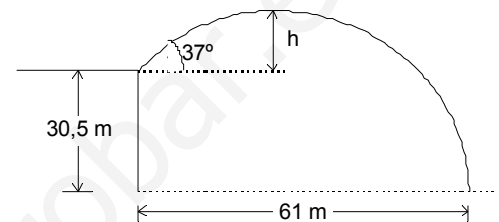
39. Un jugador lanza una pelota formando un ángulo de 37° con la horizontal y con una velocidad inicial de 14,5 m/s. Un segundo jugador que está a 30,5 m de distancia del primero en la dirección del lanzamiento inicia una carrera para encontrar la pelota, en el instante de ser lanzada. Halla la velocidad con que debe correr para coger la pelota antes de que caiga al suelo.

Sol: 5,6 m/s

40. Un cañón de un barco lanza horizontalmente, desde una altura de 5 metros respecto al nivel del mar, un proyectil con una velocidad inicial de 900 ms^{-1} . Si el tubo del cañón es de 15 m de longitud y se supone que el movimiento del proyectil dentro del tubo es uniformemente acelerado, debido a la fuerza constante de los gases de la combustión de la pólvora, calcular:
- La aceleración del proyectil dentro del cañón y el tiempo invertido por el proyectil en recorrer el tubo del cañón.
 - La distancia horizontal alcanzada por el proyectil desde que abandona el cañón hasta que se introduce en el agua.

Sol: $2'7 \times 10^4 \text{ ms}^{-2}$; $0'033 \text{ s}$; 900 m

41. Se lanza una piedra desde un acantilado con un ángulo de 37° con la horizontal como se indica en la figura. El acantilado tiene una altura de $30'5 \text{ m}$ respecto al nivel del mar y la piedra alcanza el agua a 61 m medidos horizontalmente desde el acantilado. Encontrar:



- El tiempo que tarda la piedra en alcanzar el mar desde que se lanza desde el acantilado.
- la altura, h , máxima alcanzada por la piedra.

Sol: $3'95 \text{ s}$; $6'84 \text{ m}$

42. Un esquiador especialista en la modalidad de salto, desciende por una rampa, que supondremos un plano inclinado que forma 13° con la horizontal y de 50 m de longitud. El extremo inferior de la rampa se encuentra a 14 m sobre el suelo horizontal. Ignorando los rozamientos y suponiendo que parte del reposo, calcular:

- la velocidad que tendrá al abandonar la rampa
- la distancia horizontal que recorrerá en el aire antes de llegar al suelo.

Sol: a) 15 m/s ; b) 20 m

43. Un vehículo avanza a 108 km/h . Si la aceleración típica de frenada es de 6 ms^{-2} , calcular:

- la distancia que recorre antes de parar;
- la altura desde donde debe caer libremente, para que al llegar al suelo tenga la misma energía cinética que al avanzar a 108 km/h . Dato $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Sol: a) $d = 75 \text{ m}$; b) $h = 45 \text{ m}$