

La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Se debe contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual (2,5 puntos). Se puede usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

- A. Si $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1-x|$, a) Dibujar las dos gráficas y hallar analíticamente sus puntos de intersección.
b) Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas (no vale usar decimales).
- B. Calcular el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas (sin usar decimales).

SEGUNDO BLOQUE

- A. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ a) Hallar A^2 y A^3
b) Utilizando exclusivamente lo anterior, hallar, razonadamente, A^{31}
- B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ a) Obtener razonadamente, por inducción, A^{53}
b) Hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 3

TERCER BLOQUE

- A. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, hallar: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x/2 & y/2 & z/2 \\ a+7 & b+7 & c+7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$
- B. Calcular el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

CUARTO BLOQUE

- A. (UCLM, sept 2007) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
a) Resolver la ecuación matricial $AX + X = B$
b) Resolver el sistema $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$
- B. (UCLM, sept 2001) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,
resolver la ecuación matricial $AX - BCX = A$

1º bloque

1º bloque

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$

$g(x) = |1-x| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

se anula en $x=1$,
y es negativo a
su derecha.

(ver libro gerc. 2.0
pág. 374)

$\sqrt{\frac{x}{2}} = x-1$; $\frac{x}{2} = x^2-2x+1$; $x = 2x^2-4x+2$;

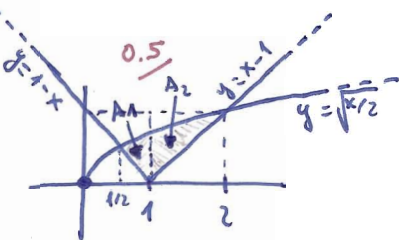
$\sqrt{\frac{x}{2}} = 1-x$; $\frac{x}{2} = (1-x)^2 \rightarrow$ solo la izquierda!

$0 = 2x^2 - 5x + 2$ $x_1 = 2$ $x_2 = 1/2$ 0.25

x	1	2
y = x-1	0	1

x	0	1/2	1
y = 1-x	1	1/2	0

x	0	1/2	1	2	3	4	...	∞
y = $\sqrt{\frac{x}{2}}$	0	1/2	0.71	1	1.22	1.41	...	∞



b) $A_1 = \int_{1/2}^1 \left[\sqrt{\frac{x}{2}} - (1-x) \right] dx = \int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{x}{2}} dx - \int_{1/2}^1 dx + \int_{1/2}^1 x dx =$

$= 2 \int_{1/2}^1 \left(\frac{x}{2} \right)^{1/2} dx - \left[x \right]_{1/2}^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1/2}^1 = 2 \cdot \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{3/2}}{3/2} - x + \frac{x^2}{2} =$

$= \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} \right)^3 - x + \frac{x^2}{2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{x^3}{2}} - x + \frac{x^2}{2} \Big|_{1/2}^1 =$

$= \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{24} \quad \text{0.75}$

$A_2 = \int_1^2 \left[\sqrt{\frac{x}{2}} - (x-1) \right] dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x}{2}} dx - \int_1^2 x dx + \int_1^2 dx = \dots = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^2}{2} + x \Big|_1^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 2 - 2 + 2 \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + 1 \right) =$

$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}$; $A_T = A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{24} + \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{13}{24} \quad \text{0.75}$

B) $y = x^3 - 2x^2 + x \rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 1$

$x=0 \rightarrow y=0$; $m = y'(0) = 1$

$y-0 = 1(x-0)$; $y = x$ es. recta tangente en $(0,0)$ (ver libro gerc. 1.8 pág. 373)

$y = x^3 - 2x^2 + x$; $x^3 - 2x^2 + x = x$; $x^2(x-2) = 0$

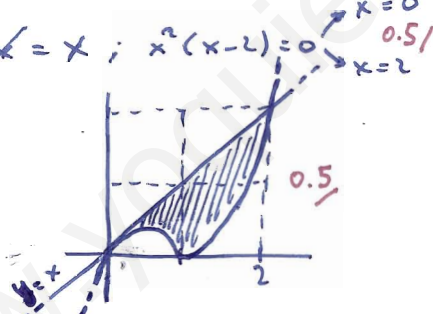
$x=0$ $x=2$

$A = \int_0^2 \left[x - (x^3 - 2x^2 + x) \right] dx =$

$= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx = -\frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 =$

$= -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{1}$

x	-1	0	1	2	3
y = $x^3 - 2x^2 + x$	-4	0	0	2	12



2º bloque

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I} \Rightarrow$ 0.5

b) $\Rightarrow A^{31} = A^{30} \cdot A = (A^3)^{10} \cdot A = (-\mathbb{I})^{10} \cdot A = \mathbb{I} \cdot A = A$ 1.5

B) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$; ($\leftarrow$ matriz NILPOTENTE) 1

$A^3 = A^2 \cdot A = 0 \cdot A = 0$

$A^{53} = 0$ 1.5

3º bloque:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x/2 & y/2 & z/2 \\ a+7 & b+7 & c+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x/2 & y/2 & z/2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x/2 & y/2 & z/2 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boxed{-\frac{5}{2}} \quad 1,25$$

$$b) \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boxed{10} \quad 1,25$$

$$B) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrolla por } F_1 \text{ por Laplace}} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 (9+1+16-2-6-12) = \boxed{-72} \quad 2,5$$

(Ver libro ejercicio 8a)

4º bloque:

$$A) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) AX+X=B; (A+I)X=B; \text{ llamamos } A+I=C \Rightarrow CX=B; C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot B; \boxed{X=C^{-1} \cdot B} (*) \quad 0,25$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; |C| = 5-4 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}; \quad \begin{matrix} C_{11} = 5 & C_{12} = -2 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = 1 \end{matrix} \quad \text{Adj } C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow {}^t \text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot {}^t \text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Sustituimos en } (*): X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad 0,25$$

$$b) \begin{cases} 2X+2Y=A \\ 4X+3Y=B \end{cases} \xrightarrow{\text{operaciones}} \begin{cases} 4X+4Y=2A \\ -4X-3Y=-B \end{cases}$$

$$Y = 2A - B = 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = Y \quad 0,5$$

$$\text{Sustituimos en } F_1: 2X + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; 2X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}} \quad 0,75$$

$$B) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX - BCX = A; (A - BC)X = A; \text{ llamamos } A - BC = D \Rightarrow DX = A; D^{-1} \cdot D \cdot X = D^{-1} \cdot A; \boxed{X = D^{-1} \cdot A} (*) \quad 0,5$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; |D| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1} \quad 0,5$$

$$\begin{matrix} D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 & D_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 & D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \\ D_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 & D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 & D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \end{matrix} \quad \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot {}^t \text{Adj}(D) = -\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}} \quad 0,5$$

La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Se debe contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual (2,5 puntos). Se puede usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

- A. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de $y=|x-1|$ e $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+1$, y hallar su área. (No vale usar decimales).
- B. Dibujar la región limitada por la curva $y=|x^2-4|$, el eje x y las rectas $x=-1$ y $x=4$. Calcular su área (sin usar decimales).

SEGUNDO BLOQUE

- A. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a) Estudiar su rango en función del parámetro m .
b) Para $m=0$, hallar razonadamente A^{45}
- B. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ a) Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$
b) Calcular, en función de a , los determinantes de $2A$ y A^t

TERCER BLOQUE

- A. a) (UCLM, jun 2006) Despejar la matriz X en función de A en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + XA + 1I$, siendo A matriz cuadrada inversible.
b) Resolver la ecuación $BX + B^2 = 1I$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- B. (UCLM, sept 2004) Resolver la ecuación matricial $XA - 2B = X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

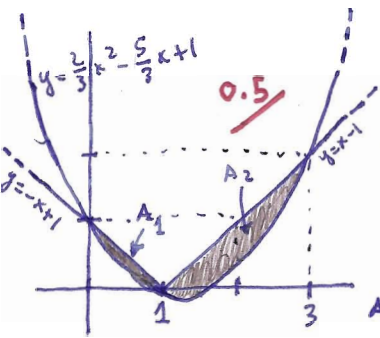
CUARTO BLOQUE

- A. a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a :
b) Resolverlo para el caso en que tenga infinitas soluciones.
- $$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{array} \right\}$$
- B. a) Discutir, en función de a , el sistema $\left. \begin{array}{l} (a-1)x + (a-1)y - 2z = -2 \\ ax + (a+1)y = 1 \end{array} \right\}$
b) Resolverlo cuando sea compatible.

1A) $y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$x-1$ si $x > 1$
 corte de ambas funciones: $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 = -x + 1$; $\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x = 0$; $\frac{2}{3}x(x-1) = 0$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 = x - 1 \quad ; \quad \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 = 0 \quad ; \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad ; \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$



$$A_c = \int_0^1 \left(-x + 1 - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 \right) \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \right) dx = -\frac{2}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{4}{3} \frac{x^2}{2} = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 \Big|_0^1 = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = \frac{1}{4.5} \approx 0.222$$

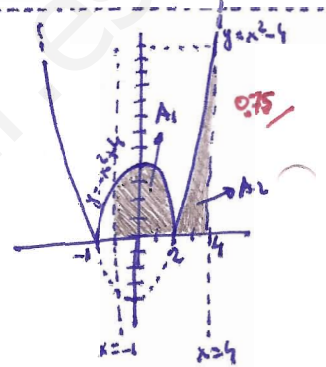
$$A_2 = \int_1^3 \left[(x+1) - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 1 \right) \right] dx = \int_1^3 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 2 \right) dx = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - 2x = \left[-\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x \right]_1^3 = \left(-6 + 12 - 6 \right) - \left(-\frac{2}{9} + \frac{4}{3} - 2 \right) = \frac{8}{9} u^2 \quad \underline{0.75}$$

(18) ^{pieces to} $y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{if } x \in (-\infty, -2] \\ -x^2 + 4 & \text{if } x \in (-2, 2) \\ x^2 - 4 & \text{if } x \in (2, \infty) \end{cases}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 4$	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
$y = 1x^2 - 4$	5	0	3	4	3	0	5	12

$$A_1 = \int_{-1}^2 (-x^2 + 4) dx = -\frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(-\frac{1}{3} - 4\right) = 9 \quad \text{0.75}$$

$$A_2 = \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{32}{3} \quad \text{Ans}$$



2A

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = -1 + m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$ 0.25

$$\mu = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \cap A = 2$$

$$\mu = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \eta A = 2$$

conclusion:

$\text{I) } m \neq \pm 1 \Rightarrow \text{rg } A = 3$	$\leftarrow 0.25$
$\text{II) } m = \pm 1 \Rightarrow \text{rg } A = 2$	$\leftarrow 0.75$

b) $m = 0$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \Rightarrow A^{45} = (A^3)^{15} = (-I)^{15} = -I$$

2B) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases}$
 $a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 4 \end{cases}$
 $a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = 4 \end{cases}$
 Soluci: $a = 4$ verifica ambas condiciones a la vez

b) $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2$ $\det(A^t) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$

3A a) $(x+a)^2 = x^2 + xa + 1$; $(x+a)(x+a) = x^2 + xa + 1$; ~~$x^2 + xa + xa + a^2 = x^2 + xa + 1$~~ ;

$$AX + A^2 = \mathbb{I}; \quad A(X+A) = \mathbb{I} \quad ; \quad A^{-1} \cdot A(X+A) = A^{-1} \cdot \mathbb{I} \quad ; \quad X + A = A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} - A} \quad 1.25$$

b) $BX + B^2 = \mathbb{1}$; $B(X+B) = \mathbb{1}$; $B^{-1}B(X+B) = B^{-1}\mathbb{1}$; $X+B = B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B^{-1} - B}$ (*) 0.25/

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; |B| = -1; \quad \begin{matrix} B_{11} = 0 \\ B_{12} = -1 \\ B_{21} = -1 \\ B_{22} = 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj}(B) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right.$$

substituyendo en (A): $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}$ 0.5/

[3B] $XA - 2B = X$; $XA - X = 2B$; $X(A - \mathbb{I}) = 2B$; llamamos $C = A - \mathbb{I} \Rightarrow XC = 2B$; $XC C^{-1} = 2B C^{-1}$

$X = 2B \cdot C^{-1}$ (*) 0.25/

$C = A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 0.25/; $|C| = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \exists C^{-1}$

$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\left. \begin{matrix} \text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \end{matrix} \right\}$ 0.5/

substituyendo en (*): $X = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 1/

[4A] a) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ a & -1 & -1 & | & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & | & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{M} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 0$; $a^2 + 2a - 3 = 0 \xrightarrow{a=1} a=3$ 0.25/

$a=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow r_M = 2$; $r_M = r_{M^*}$ p.g. C_4 al ser todo ceros, se puede suprimir a efectos del rango 0.125/

$a=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ -3 & -1 & -1 & | & -4 \\ 3 & 0 & -6 & | & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow r_M = 2$; $r_{M^*} = 3$; $|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 12 \neq 0 \Rightarrow r_{M^*} = 3$ 0.125/

conclusión: I) $a \neq 1$ y $a \neq 3 \Rightarrow r_M = r_{M^*} = 3 = n$ ind. $\xrightarrow{\text{m. de Gauss-Jordan}}$ sist. comp. dtdo. 0.25/

II) $a=1 \Rightarrow r_M = r_{M^*} = 2 < 3$ no ind. $\xrightarrow{\text{m. de Gauss-Jordan}}$ sist. comp. ind. tdo. (inparamétrico) 0.25/

III) $a=3 \Rightarrow r_M \neq r_{M^*} \xrightarrow{\text{m. de Gauss-Jordan}}$ sist. incompatible 0.25/

b) se solve. $\Rightarrow$ sist. comp. ind. tdo. $\Rightarrow a=1 \rightarrow$ solve una ecuación, y pasamos una desigualdad como parámetro:

$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ x - y = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = \frac{-2\lambda}{-3} = \frac{2}{3}\lambda$ 0.5/; $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{-\lambda}{-3} = \frac{\lambda}{3}$ 0.5/; $|z| = \lambda$ 0.25/

[4B] $\begin{cases} -x - y - z = -2 \\ (a-1)x + (a-1)y - 2z = -2 \\ ax + (a+1)y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -2 \\ a-1 & a-1 & -2 & | & -2 \\ a & a+1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a-1 & a-1 & -2 \\ a & a+1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - (a+1)(a-1) + a(a-1) - 2(a+1) = 2a - a^2 + 1 + a^2 - a - 2a - 2 = -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ 0.25/

$a=-1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & -2 \\ -2 & -2 & -2 & | & -2 \\ -1 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow r_M = 2$; $r_{M^*} = 3$; $|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 4 - 2 \neq 0 \Rightarrow r_{M^*} = 3$ 0.25/

conclusión: I) $a \neq -1 \Rightarrow r_M = r_{M^*} = 3 = n$ ind. $\xrightarrow{\text{m. de Gauss-Jordan}}$ sist. comp. dtdo. 0.5/

II) $a = -1 \Rightarrow r_M \neq r_{M^*} \xrightarrow{\text{m. de Gauss-Jordan}}$ sist. incompatible 0.5/

b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & a-1 & -2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2 + 2(a+1) + a-1 - 4(a+1)}{-a-1} = \frac{-a-1}{-a-1} = 1$ 0.5/

$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ a-1 & -2 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4a - (a-1) - 2a - 2}{-a-1} = \frac{a-1}{-a-1} = \frac{1-a}{a+1}$ 0.5/

$\begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ a-1 & a-1 & -2 \\ a & a+1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-(a-1) + 2a - 2(a+1)(a-1) + 2a(a-1) - 2(a+1) + a-1}{-a-1} = \frac{-2a}{-a-1} = \frac{2a}{a+1}$ 0.5/

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Hallar la matriz inversa de $A-I$, siendo I la matriz unidad de orden 3
b) Resolver la ecuación matricial $XA-2B=X$

2. a) Discutir el sistema
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{array} \right\} \text{ en funci3n del par3metro } a.$$

- b) Resolverlo para $a=1$

3. Dados los puntos $A(1,-2,0)$, $B(-2,4,4)$ y $C(3,-1,-1)$

- a) Hallar el 3ngulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
b) Hallar el volumen del tetraedro que tiene por v3rtices los tres puntos anteriores y el origen.
c) Hallar un vector $\perp$ a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$
d) Hallar la ecuaci3n param3trica y continua de la recta $\perp$ al plano determinado por A, B y C, y que pasa por B

4. Dadas las rectas
$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ y } \frac{x+1}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-2}$$

- a) Razonar que son paralelas, pero no coincidentes.
b) Hallar la ecuaci3n general del plano que definen.

INSTRUCCIONES: Se podr3 bajar la nota por mala presentaci3n (desorden en las respuestas, mala caligraf3a, tachones, etc.) y faltas de ortograf3a y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

$$①) A - I = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = C; \det C = 24 + 12 + 12 + 2 - 72 + 24 = 2 \Rightarrow \exists C^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -12 & C_{12} &= -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 & C_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -14 \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18 & C_{22} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13 & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -20 \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 14 & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -10 & C_{33} &= \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Adj}(C) &= \begin{pmatrix} -12 & 9 & -14 \\ -18 & 13 & -20 \\ 14 & -10 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -12 & -18 & 14 \\ 9 & 13 & -10 \\ -14 & -20 & 16 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow C^{-1} &= \frac{1}{\det(C)} \cdot {}^t\text{Adj}(C) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -12 & -18 & 14 \\ 9 & 13 & -10 \\ -14 & -20 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{1.5} \end{aligned}$$

$$b) XA - 2B = X$$

$$XA - X = 2B$$

$$X(A - I) = 2B$$

$$X \cdot C = 2B \Rightarrow X = 2B \cdot C^{-1} \quad \text{0.5/}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -12 & -18 & 14 \\ 9 & 13 & -10 \\ -14 & -20 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -31 & 24 \\ -1 & -3 & 2 \\ -50 & -74 & 58 \end{pmatrix} \quad \text{0.5/}$$

$$② \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ a & -1 & -1 & | & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & | & a-1 \end{pmatrix} = M^*$$

$$a) \text{rang } M?$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 0; a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\text{I) } a \neq 1 \text{ y } a \neq -3 \Rightarrow \text{rang } M = 3 = \text{rang } M^* = n: \text{incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{II) } a = 1 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } M = 2$$

$$\text{III) } a = -3 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } M = 2$$

$$\text{rang } M^* \text{ para } a = 1? \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } M^* = \text{rang } M \text{ (por ampliamos con una columna de ceros)}$$

$$\text{rang } M^* \text{ para } a = -3? \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}; k_1, c_2, c_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } M^* = 3$$

$$\text{en resumen: I) } a \neq 1 \text{ y } a \neq -3 \Rightarrow \text{rang } M = 3 = \text{rang } M^* = n: \text{incógnitas} \xrightarrow[\text{-Resolviendo}]{\text{Resolviendo}} \text{S.C.D.} \quad \text{0.5/}$$

$$\text{II) } a = 1 \Rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M^* = 2 < 3 \Rightarrow \text{S.C.I. uniparamétrico} \quad \text{0.5/}$$

$$\text{III) } a = -3 \Rightarrow \text{rang } M \neq \text{rang } M^* \Rightarrow \text{S.I.} \quad \text{0.5/}$$

b) Para $a = 1$ es S.C.I. $\Rightarrow$ para resolverlo por Cramer, sobre una ecuación (p.ej. la 3ª), y pasamos una incógnita al otro miembro como parámetro (p.ej. la z):

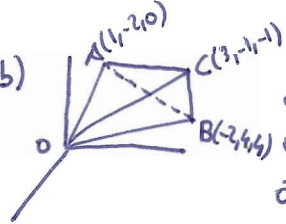
$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= \lambda \\ x - y &= \lambda \end{aligned} \right\} |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad \begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2\lambda}{-3} = \frac{2}{3}\lambda \\ \overline{y} &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{\lambda}{-3} = -\frac{1}{3}\lambda \\ \overline{z} &= \lambda \end{aligned}$$

(notar que se trata de un sist. homogéneo; además, es mejor no dividir la 3ª ecuación, pero así despejamos x directamente!)

③ a) $\vec{AB} = B - A = (-3, 6, 4)$
 $\vec{AC} = C - A = (2, 1, -1)$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-6 + 6 - 4}{\sqrt{9+36+16} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{-4}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{6}} \approx -0,2091$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos(-0,2091) \approx \boxed{102^\circ 4' 7''} \quad 0.5$$

b) 

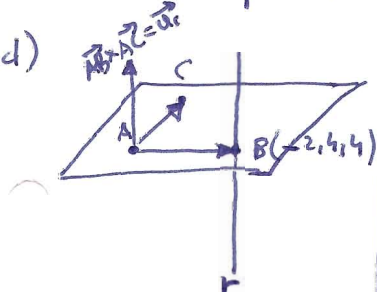
$$\vec{OA} = (1, -2, 0)$$

$$\vec{OB} = (-2, 4, 4)$$

$$\vec{OC} = (3, -1, -1)$$

$$Vol_{OABC} = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-20| = \boxed{\frac{10}{3} u^3} \quad 0.75$$

c) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 15\vec{k} = (-10, 5, -15) \rightarrow \boxed{(2, -1, 3)} \quad 0.25$

d) 

la recta queda determinada por: $B(-2, 4, 4)$
 $\vec{u}_r = (2, -1, 3)$

$$\begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

CONTINUA 1

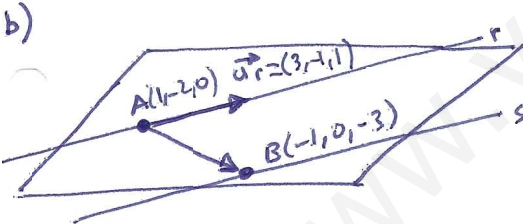
PARAMÉTRICAS

④ a) $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \frac{x+1}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-2}$

son paralelos pues sus vectores directores son proporcionales:
 $\vec{u}_r = (3, -1, 1)$
 $\vec{u}_s = (-6, 2, -2) \quad 0.25$

pero no son coincidentes p.q. si escogemos un punto de r, p.e.j. $(1, -2, 0)$ y lo sustituimos en s, vemos que no pertenece a ella:

$$\frac{2}{-6} \neq \frac{-2}{2} \neq \frac{3}{-2} \quad 0.75$$

b) 

Vemos en el dibujo que el plano queda determinado por:

$$\begin{cases} A(1, -2, 0) \\ \vec{u}_r = (3, -1, 1) \\ \vec{AB} = B - A = (-2, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x-1) - 7(y+2) - 4z = 0;$$

$$-x - 7y - 4z - 13 = 0;$$

$$\boxed{x + 7y + 4z + 13 = 0} \quad 1.5$$

1. Resolver la ecuación matricial $AX-BCX=A$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) Discutir el sistema
$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$
 en función del parámetro m .
- b) Resolverlo para $m=1$
3. Dados los puntos $A(-1,-1,0)$, $B(-1,1,4)$, $C(0,-1,1)$ y $D(1,2,-1)$
- a) Hallar el volumen del tetraedro que tiene por vértices los puntos anteriores.
- b) Hallar la ecuación general del plano determinado por los puntos A, B y C
- c) Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta perpendicular al plano anterior y que pasa por D.
4. Dadas las rectas
$$\begin{cases} x = -4 + 6\lambda \\ y = -5 + 8\lambda \\ z = 8 - 4\lambda \end{cases} \text{ y } \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{-1}$$
- a) Razonar que se cortan en el punto $P(2,3,4)$
- b) Hallar la ecuación general del plano que definen.

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

① $AX - BCX = A; (A - BC) \cdot X = A; D = A - BC \Rightarrow D \cdot X = A; D^{-1} \cdot D \cdot X = D^{-1} \cdot A; \boxed{X = D^{-1} \cdot A}$

$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; |D| = -1$

$\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}; D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot \text{Adj}(D) = - \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$X = D^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$

② a) $\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ } \text{rg } M?$
 $\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 1 - m^2 - 1 - m(m+2) + m(m-1) = 2m - m^2 - m^2 - 2m + 1 - m = -m^2 - m = 0;$
 $m^2 + m = 0; m(m+1) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ or } m = -1$

$m \neq 0 \text{ y } m \neq -1 \Rightarrow \text{rg } M = 3 = \text{rg } M^*$

$m = 0 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$

$m = -1 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$

$\text{rg } M^* \text{ para } m = 0 \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; |K_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 3$

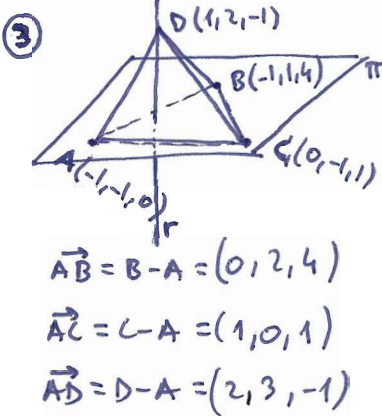
$\text{rg } M^* \text{ para } m = -1 \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; |K_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 3$

conclusion: I) $m \neq 0 \text{ y } m \neq -1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 3 = n: \text{independencia} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

II) $m = 0 \text{ o } m = -1 \Rightarrow \text{rg } M \neq \text{rg } M^* = 2 \Rightarrow \text{S.I.}$

b) para $m = 1$ es S.C.D. (soluc. única): $|M| = -m^2 - m \xrightarrow{m=1} |M| = -2$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}; \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1; \begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$



a) $\text{Vol}_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3 \text{ u}^3$

b) El plano π queda determinado por $\{A, \vec{AB} \text{ y } \vec{AC}\}$:
 $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; 2(x+1) + 4(y+1) - 2z = 0$
 $2x + 4y - 2z + 6 = 0$
 $\boxed{x + 2y - z + 3 = 0}$

c) A la vista del dibujo, el vector director de la recta pedida es el $\vec{n}_\pi$ del plano anterior; por lo tanto, la recta queda determinada por:

$$\left. \begin{array}{l} D(1, 2, -1) \\ \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 2, -1) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}} \quad \text{continúa} \quad \underline{1}$$

paramétricos

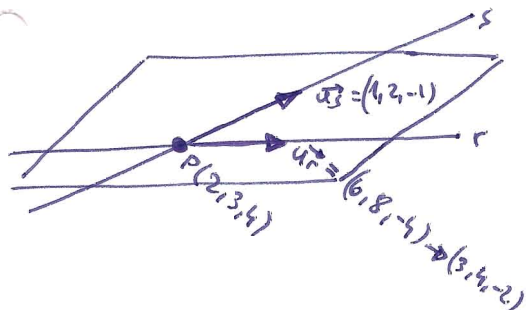
4) $\left. \begin{array}{l} x = -4 + 6\lambda \\ y = -5 + 8\lambda \\ z = 8 - 4\lambda \end{array} \right\} r ; s: \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{-1}$

a) sustituyendo en r: $\left. \begin{array}{l} 2 = -4 + 6\lambda \rightarrow \lambda = 1 \\ 3 = -5 + 8\lambda \rightarrow \lambda = 1 \\ 4 = 8 - 4\lambda \rightarrow \lambda = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P \in r$

sustituyendo en s:

$$\frac{-1}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow s \in r \quad \underline{0.75}$$

además, como sus vectores directores no son proporcionales, concluimos que las rectas se cortan:



b) A la vista del dibujo, el plano queda determinado por

$$\left. \begin{array}{l} P(2, 3, 4) \\ \vec{u}_r = (3, 4, -2) \\ \vec{u}_s = (1, 2, -1) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y-3 & z-4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right| = 0 ; \quad \underline{0.75}$$

$$0 \cdot (x-2) + y-3 + 2(z-4) = 0 ; \quad \boxed{y + 2z - 11 = 0} \quad \underline{1}$$

1. a) Resolver:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, utilizar las propiedades de los

determinantes para hallar el valor de $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix}$

2. Resolver la ecuación matricial $CX+AB=C$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ ax + y - z = 0 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $a=1$

4. Dados $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$

a) Hallar a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean $\perp$ a $\vec{w} = (a, 1, b)$

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{x} = (-1, 1, 0)$ y unitario.

1) a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrolla por } C_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{0 \text{ por } F_3 = 2F_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - 4F_1, F_3 - 3F_1, F_4 - 4F_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2, F_4 - F_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 20 + 6 + 45 - 40 - 15 - 24 = \boxed{2} \quad 1/$

b) $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} 2 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{8} \quad 1/$

2) $CX + AB = C; CX = C - AB; \underset{1}{C^{-1} \cdot C} \cdot X = C^{-1} \cdot (C - AB) \Rightarrow X = C^{-1} \cdot (C - AB) \quad (*) \quad 0.25$

$C - AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & -8 \\ 1 & -4 & 11 \end{pmatrix} \quad 0.5$

$\det C^{-1}$? $\det C = 1 \Rightarrow \exists C^{-1}$;

$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$
 $C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$
 $C_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$
 $\text{Adj } C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow {}^t \text{Adj } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix} = C^{-1} \quad 1.5$
 $\text{Sustituyendo en (*):}$
 $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & -8 \\ 1 & -4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 36 & -81 \\ 5 & -23 & 55 \\ 9 & -40 & 92 \end{pmatrix} \quad 0.75$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 3 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 6a + 5a - 3a^2 - 9 + 10 = -3a^2 + 11a - 8 = 0 \xrightarrow{a=1} \xrightarrow{a=8/3}$

i) $a \neq 1 \text{ y } a \neq 8/3 \Rightarrow \text{rg } M = 3 = \text{rg } M^* = 3 \Rightarrow \text{S.C.D.} \quad 0.5/$

ii) $a=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{rg } M = 2 \text{ p.e. } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$
 $|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 2$

$a=1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 < 3 \Rightarrow \text{S.C.I.} \quad 0.5/$
 uniparamétrica

iii) $a=8/3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8/3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{rg } M = 2 \text{ p.e. } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$
 $|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8/3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 3$

$a=8/3 \Rightarrow \text{rg } M \neq \text{rg } M^* \Rightarrow \text{S.I.} \quad 0.5/$

b) $a=1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 \Rightarrow \text{solera una ecuación, p.e.j. } F_2) \text{ y pasamos la 2 para eliminar } \lambda:$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 - \lambda \\ x + y = \lambda \end{cases} \quad |M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\lambda-2\lambda}{1} = \frac{1-3\lambda}{1} = 1-3\lambda; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{3\lambda-1+\lambda}{1} = \frac{-1+4\lambda}{1}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

4) $\vec{u} = (-1, 2, 1) \quad \vec{v} = (1, 1, 0)$

a) 1ª forma: $\vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (-1, 2, 1) \cdot (a, 1, b) = 0; -a + 2 + b = 0$
 $\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (a, 1, b) = 0; a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \boxed{b = -3}$

otra forma: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, -3) \text{ comparándolo con } \vec{w} = (a, 1, b) \Rightarrow \boxed{a = -1} \quad \boxed{b = -3} \quad 0.75/$

b) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{(-1, 2, 1) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{-1+2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 73^\circ 13' 17''} \quad 0.5/$

c) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1) \perp \vec{u} \text{ y } \vec{v}; \text{ porque sea unitario lo dividimos por su módulo: } |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

soluc: $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad 0.75/$
 $\left(\text{nota: también vale el opuesto: } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \right) \right)$

1. a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$, utilizar las propiedades de los determinantes, indicando paso a paso las

transformaciones realizadas, para hallar el valor de $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix}$

- a) Resolver por Laplace, haciendo ceros previamente: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

2. Resolver la ecuación matricial $AB=XC$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

3. a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} 3x + y + az = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

- b) Resolverlo para $a=0$

□ Elige una de estas dos preguntas:

4. Dados $\vec{u} = (a, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, a)$ y $\vec{w} = (a, -2, 1)$, se pide:

a) Hallar a para que $\vec{w}$ sea $\perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Hallar a para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios.

5. Hallar la ecuación general o implícita del plano que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y contiene a la recta

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$$

1 a) $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 4c & 2b \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3d & 6f & 3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & 2c & b \\ d & 2f & e \\ g & 2i & h \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 = 4$ 1.25

$\downarrow$
0 p4. $F_1 = -3F_2$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2+C_4 \\ C_3-5C_4}} \begin{vmatrix} 3 & 6 & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -7 & 2 \\ 4 & 9 & -28 & 6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 28 \end{vmatrix} = -3(84 + 56 + 108 - 72 - 63 - 112) = -3 \cdot (-1) = 3$ 1.25

2 $A \cdot B = X \cdot C \Rightarrow A \cdot B \cdot C^{-1} = X$ 0.5 $a+c = 6+2-9+2 = 1 \Rightarrow 3C^{-1}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ 0.25

$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $C_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $C_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$ $C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$ $C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8$

$\text{Adj } C = C^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ 1.25/

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -11 \\ -48 & 33 & 55 \\ 78 & -54 & -88 \end{pmatrix}$ 0.5

3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & a & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ a & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ a) $|M| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + a + 2a - a^2 - 3 - 2 = -a^2 + 3a - 2 = 0$ $\begin{matrix} a=1 \\ a=2 \end{matrix}$

I) $a \neq 1 \neq 2 \Rightarrow \text{rg } M = 3 = \text{rg } M^* \Rightarrow \text{S.C.D.}$ 0.25/

II) $a=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ $\text{rg } M = 2$ p4. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$K_1, C_2, C_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 + 6 - 3 - 2 - 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 3$ 0.5/

III) $a=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ $\text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 \neq 3$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{S.C.I.}$ 0.5/

b) $a=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 3 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ $|M| = -2$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 0.5/

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 0.5/ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ 0.25/

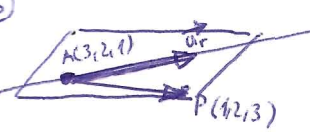
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-6}{-2} = 3$ $\begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = \frac{4}{-2} = -2$

4 a) $\vec{w} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, -2, 1) \cdot (a, 2, 3) = a^2 - 4 + 3 = a^2 - 1 = 0$ $a^2 = 1$ $a = \pm 1$

$\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (a, -2, 1) \cdot (3, 2, a) = 3a - 4 + a = 4a - 4 = 0$ $a = 1$

parce que se verifica a la vez las de ser 1.25

b) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanares $\Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 3 & 2 & a \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $2a + 2a^2 - 18 - 6a + 2a^2 - 6 = 4a^2 - 4a - 24 = 0$ $a^2 - a - 6 = 0$ $\begin{matrix} a=-2 \\ a=3 \end{matrix}$ 1.25

5  $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ $P(1, 2, 3)$ $\vec{u}_r = (1, 2, 3)$ $\vec{AP} = (-2, 0, 2)$ 0.5/

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $4(x-1) - 8(y-2) + 4(z-3) = 0$ $4x - 8y + 4z = 0$ $x - 2y + z = 0$ 1.5