



SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. (Jun 2004) Resolver la ecuación matricial $C(A+X)B=I$, donde

(2,5 pts.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(A+X)B = I$$

$$C^{-1}C(A+X)B = C^{-1}I$$

$$(A+X) \cdot B = C^{-1}$$

$$(A+X)B \cdot B^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$A+X = C^{-1} \cdot B^{-1}$$

$$X = (B \cdot C)^{-1} - A \quad (0,5/ \quad *)$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = D \quad ; \quad |D| = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{ll} D_{11} = 1 & D_{12} = -1 \\ D_{21} = -1 & D_{22} = 2 \end{array} \right\} \quad \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(0,5/} {}^t\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot {}^t\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (0,5/)$$

Sustituimos en (*):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. (Jun 2000) Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del parámetro a , y resolverlo cuando sea posible: (2,5 pts.)

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{cases}$$

I) Discusión:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{array} \right) = M^*$$

$\text{rang } M^*?$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } M^* \geq 2$$

$$|f_1, f_2, f_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } M = 3 \quad \forall a \quad 0,25$$

$\text{rang } M^*?$

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a+5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollamos por } C_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix}$$

$$= -2a + 6 - 3(a+5) + 4(a+5) + 9 - a = -2a + 6 - 3a - 15 + 4a + 20 + 9 - a = -2a + 20 = 0 \Rightarrow a = 10 \quad 0,5$$

la que cambia $\nearrow$ $F_1 + F_2$ $\nearrow$ no cambia

Soluc: I) $a = 10 \Rightarrow \text{rang } M = 3 = \text{rang } M^* = 4$ $\Rightarrow$ n° incógnitas $\Rightarrow$ sist. compat. d. todo. (soluc. única) $\Rightarrow$ th. Rouché-Frobenius

II) $a \neq 10 \Rightarrow \text{rang } M = 3 \neq \text{rang } M^* = 4 \Rightarrow$ sist. incompatible $0,5$

II) Resolución: A la vista de la discusión, sólo se puede resolver si $a = 10$, en cuyo caso es compatible d. todo, es decir, tipo Cramer. Según acabamos de ver al estudiar $\text{rang } M$, $|f_1, f_2, f_3| \neq 0 \Rightarrow$ cogemos f_1, f_2 y f_3 , y prescindimos de f_4 : $0,25$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \quad \text{visto antes} \quad |M| = -3 \quad 0,25$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-10 - 3 - 20}{-3} = \frac{-33}{-3} = 11 \quad 0,25$$

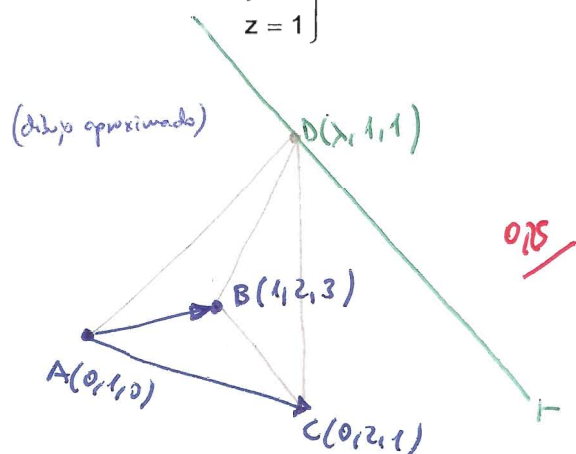
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-20 + 5 - 3}{-3} = \frac{-18}{-3} = 6 \quad 0,25$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3 - 10 - 5}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4 \quad 0,25$$

1,25 + 1,25

3. Un tetraedro tiene por vértices $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y el cuarto vértice está situado en determinado punto

D de la recta $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ de forma que su volumen es $\frac{5}{2} u^3$. Hallar dicho punto. (2,5 pto.)



El tetraedro queda determinado por los siguientes tres vectores:

$$\vec{AB} = (1, 1, 3)$$

$$\vec{AC} = (0, 1, 1)$$

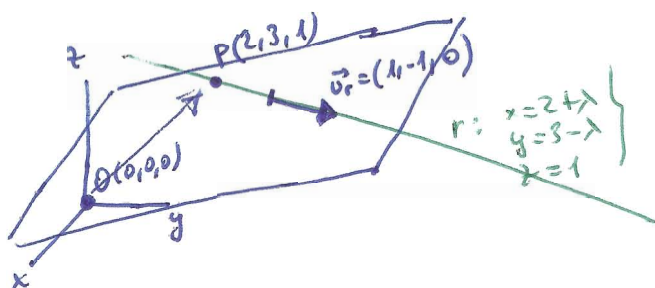
$$\vec{AD} = (\lambda, 0, 1)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |1 + \lambda - 3\lambda| = \frac{1}{6} |1 - 2\lambda| \stackrel{\text{enunciado}}{=} \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow |1 - 2\lambda| = 15 \begin{cases} 1 - 2\lambda = 15; -14 = 2\lambda; \lambda = -7 \rightarrow D_1(-7, 1, 1) \\ 1 - 2\lambda = -15; 16 = 2\lambda; \lambda = 8 \rightarrow D_2(8, 1, 1) \end{cases}$$

4. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\left. \begin{aligned} x &= 2 + \lambda \\ y &= 3 - \lambda \\ z &= 1 \end{aligned} \right\}$ (2,5 ptos.)

(dibujo aproximado)



Como puede verse en el dibujo, el plano pedido se puede obtener mediante un punto de él (tenemos dos, el origen y el punto P de la recta), y dos vectores direccionales; uno de ellos es el de la recta, $\vec{u}_r$, y el otro $\vec{OP}$:

0,5/

$$\left. \begin{aligned} O(0,0,0) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ \vec{OP} = (2, 3, 1) \end{aligned} \right\}$$

1,5/

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad -x - y + 5z = 0; \quad \boxed{x + y - 5z = 0}$$

0,5/

desarrolla por Laplace por F_1