



PARCIAL 3ª EVALUACIÓN
MATEMÁTICAS II

2º BACH. A
CURSO 2013-2014



Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. (sept 2001) Resolver la ecuación matricial $AX - BCX = A$, donde

(2,5 pts.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX - BCX = A; (A - BC)X = A; \text{ renombramos } A - BC = D \Rightarrow DX = A \Rightarrow X = D^{-1} \cdot A \quad 0,5$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

$$|D| = -6 + 3 + 3 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1} \quad 0,25$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad D_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad 0,05$$

$$D_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \downarrow$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad D_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 \quad \downarrow$$

NOTA: si no se indican los menores de orden 2 y 3 escriben directamente los adjuntos cambia pensar que se han obtenido por medio de la calculadora, y se restará nota

$$X = D^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix} \quad 0,75$$

NOTA: Si no se llega al resultado correcto debido a algún pequeño fallo de cálculo (no de procedimiento) pero el procedimiento está bien, se puntuará con 1,25

2,5

2. a) (sept 2009) Discutir, en función de $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones
- $$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

(1, 5 pts.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array} \right) = M^*$$

¿rg M?

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 9 - 10 + 9 - 6\lambda - 5\lambda = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = 1 \quad (*)$$

$$\lambda = \frac{8}{3}$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2; \text{ ¿rg } M^*?$$

$$|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 20 - 18 - 5 = 0$$

nota: se baja 0,25 si se calculan más, menores de los necesarios

0,25

$$\lambda = \frac{8}{3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 8/3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2; \text{ ¿rg } M^*?$$

$$|C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 8/3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 20 - 18 - 5 = 5 \neq 0$$

0,25

Soluc: I) $\lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq \frac{8}{3} \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 3 = \text{n.º incógnitas}$

$\xrightarrow{\text{m. de Cramer - Moebius}}$ Sist. compat. dtdo. (soluc. única)

0,25

II) $\lambda = 1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 < 3 = \text{n.º incógnitas}$

$\xrightarrow{\text{m. de Cramer - Moebius}}$ Sist. compat. indtdo. (uniparamétrico)

0,25

III) $\lambda = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{rg } M = 2 \neq \text{rg } M^* = 3 \Rightarrow \text{sist. incompatible}$

0,25

- b) Resolverlo para $\lambda = 0 \Rightarrow \text{sist. compat. dtdo. (soluc. única)}$

$\xrightarrow{\text{substituir en (*)}}$ $|M| = 8$

(1 pto.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{3 + 3 - 12}{8} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

0,25

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{18 - 5}{8} = \frac{13}{8}$$

0,25

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{20 - 18 - 5}{8} = \frac{-3}{8}$$

0,25

se baja por tanto 0,25 si se vuelve a calcular $|M|$, en vez de utilizar (*)

1, 5+1

2,5

3. (jun 2008) Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1+\lambda,2,1-\lambda)$ y $C(1+\lambda,1+\lambda,2+\lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) Probar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90° , independientemente del valor de λ . (1 pto.)

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B-A = (1+\lambda, 2, 1-\lambda) - (1, 1, 1) = (\lambda, 1, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} &= C-A = (1+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda) - (1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, 1+\lambda) \end{aligned} \right\} 0,25$$

Probar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son $\perp$ equivale a ver que su producto escalar es 0: 0,25

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\lambda, 1, -\lambda) \cdot (\lambda, \lambda, 1+\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \lambda(1+\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \quad \forall \lambda \quad (\text{c.q.d.})$$

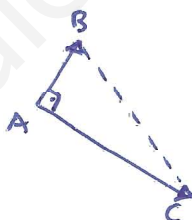
0,25 0,25

NOTA: Se baja 0,25 si se llega al mismo resultado pero por un procedimiento más extenso, p.ej.

aplicando $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$

b) Determinar los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3. (1,5 ptos.)

Acabamos de probar lo siguiente:



La hipotenusa es $\overrightarrow{BC} = C-B = (1+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda) - (1+\lambda, 2, 1-\lambda) = (0, \lambda-1, 1+2\lambda)$ 0,25

$$\|\overrightarrow{BC}\| = 3 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (\lambda-1)^2 + (1+2\lambda)^2} = 3 \quad 0,25$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 + 4\lambda + 4\lambda^2 = 9 \quad 0,25$$

$$(*) \quad 5\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 9 \quad 0,25$$

$$5\lambda^2 + 2\lambda - 7 = 0$$

$$0,25$$

$$\boxed{\lambda = 1} \quad 0,25$$

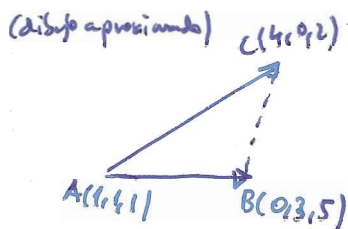
$$\boxed{\lambda = -7/5} \quad 0,25$$

nota: se baja 0,25 si se llega a la ec. (*) por un procedimiento mucho más largo (Pitágoras, etc...)
- se puntúa 0,5 si el procedimiento es correcto pero hay algún pequeño fallo de cálculo (no procedimental)

(1+1,5)

2,5

4. a) (jun 2005) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A(1,1,1), B(0,3,5) y C(4,0,2). (resultado con 2 decimales) (1 pto.)



$$\vec{AB} = B - A = (0, 3, 5) - (1, 1, 1) = (-1, 2, 4)$$

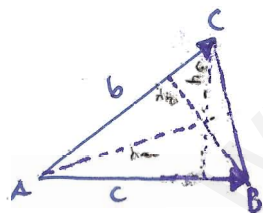
$$\vec{AC} = C - A = (4, 0, 2) - (1, 1, 1) = (3, -1, 1) \quad 0,25$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \|(6, 13, -5)\| = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 169 + 25} = \frac{\sqrt{230}}{2} \text{ u}^2 \quad 0,5 \quad 0,25 \quad \approx 27,58 \text{ u}^2$$

- b) Hallar las longitudes de las tres alturas de dicho triángulo. (Ayuda: Utilizar que $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}bh$) (resultado con 2 decimales) (1 pto.)

(dibujo aproximado)

altura correspondiente al lado c:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot h_c \Rightarrow \frac{\sqrt{230}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{21} \cdot h_c \Rightarrow h_c = \sqrt{\frac{230}{21}} \approx 3,31 \text{ u} \quad 0,5$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

altura correspondiente al lado b:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AC}\| \cdot h_b \Rightarrow \frac{\sqrt{230}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{11} \cdot h_b \Rightarrow h_b = \sqrt{\frac{230}{11}} \approx 4,57 \text{ u} \quad 0,5$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

altura correspondiente al lado a:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{BC}\| \cdot h_a \Rightarrow \frac{\sqrt{230}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{34} \cdot h_a \Rightarrow h_a = \sqrt{\frac{230}{34}} = \sqrt{\frac{115}{17}} \approx 2,60 \text{ u} \quad 0,5$$

$$\vec{BC} = C - B = (4, 0, 2) - (0, 3, 5) = (4, -3, -3) \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$$

$1 + 1,5$
 $2,5$

NOTA: Se baja 0,25 si se mezclan decimales y radicales en una misma igualdad