DETERMINANTES

El francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), además de desarrollar importantes contribuciones a la teoría de determinantes, fue de hecho el primero en utilizar el término «determinante», en 1801.

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I. DEFINICIÓN

Determinantes[1] de orden 2: «Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de dicha matriz, que se designa como det(A), o también $|A|$, como el resultado de la siguiente regla:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

la cual se conoce como **regla de Sarrus**[2]»

Observaciones: **1ª)** El determinante así definido puede resultar un número positivo, negativo o nulo

2ª) El determinante tiene que ser necesariamente de una matriz cuadrada.

3ª) La razón de definir así esta nueva herramienta es su enorme utilidad, que se verá en este tema y siguientes, fundamentalmente la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la Geometría.

Ejercicio 1: Calcular los siguientes determinantes de orden 2 (Obsérvese el primer ejemplo):

a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-(-2)\cdot 4=14$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=$

c) $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}=$

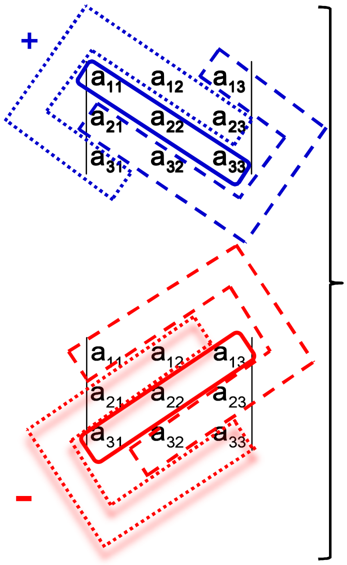
f) $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1/2 \end{vmatrix}=$

g) $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=$

Ejercicios final tema: 1 y 2
Ejercicio PAEG: 3B jun 2010
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 95: 1 y 2

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 78 a 80 del libro de ed. Anaya.
[2] Fue ideada por el matemático francés Pierre Frédéric Sarrus en 1833.

Determinantes[3] de orden 3: En este caso la regla de Sarrus consiste en sumar los 6 posibles productos de 3 elementos en los que interviene un elemento de cada fila y columna (es decir, las 6 diagonales); los 3 productos a los que no se les cambia el signo (**+**) y los 3 a los que sí (**–**) vienen dados por el siguiente esquema:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{+} \underbrace{- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}_{-}$$

Ejercicio 2: Calcular los siguientes determinantes de orden 3 (Obsérvese el primer ejemplo):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 4 = 4 + 18 + 12 - 9 - 4 - 24 = \boxed{-3}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 1)*

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 25)*

d) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 34)*

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 36)*

f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 0)*

[3] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver pág. 89 del libro de ed. Anaya.

g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 0)*

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 0)*

Ejercicios final tema: 3

¿Existirá una regla de Sarrus para determinantes de orden 4? La respuesta es que sí, pero resulta tan complicada –consta de 24 elementos– que no es muy práctica; en su lugar veremos en el apdo. III un método mucho más cómodo, la llamada «Regla de Laplace».

Reseña histórica: En su sentido original, el determinante determina –de ahí su nombre– la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, y fue introducido en este sentido para el caso de orden 2 por el italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) en 1545 como una regla para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. El alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hizo lo propio en 1693 en relación con los sistemas de ecuaciones lineales de mayor orden. Por lo tanto, los determinantes surgen siglos antes que las matrices: recuérdese que en el tema anterior vimos que el inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) fue quien utilizó por primera vez el término "matriz" en 1848-1850, dando a entender que la matriz era "la madre de los determinantes".

Las contribuciones más prolíficas a la teoría de los determinantes fueron las del matemático francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien, por ejemplo, demostró por primera vez que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Además, utilizó por primera vez el término «determinante», en 1801. El desarrollo de un determinante por cofactores fue empleado por primera vez por el matemático francés Pierre de Laplace (1749-1827) en 1772. Por su parte, el inglés Arthur Cayley (1821-1895) es el inventor de la notación actual de los determinantes mediante barras (1841) y establece la fórmula para el cálculo de la inversa de una matriz mediante determinantes (1858).

II. PROPIEDADES de los DETERMINANTES [4]

① **«Si permutamos dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo[5]»**

Ejemplo justificativo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Permutando, por ejemplo c_1 y c_3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

[4] Ver págs. 82 y 83 del libro de ed. Anaya.

[5] Esta propiedad es fácil de demostrar aplicando la regla de Sarrus.

② **«Si dos filas (o columnas) son iguales, el determinante es nulo[6]»**

Ejemplo justificativo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

③ **«Si todos los elementos de una fila (o columna) son nulos, el determinante es cero[7]»**

④ **«Si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una fila (o columna), el valor del determinante queda multiplicado por dicho número[8]»**

De las 6 líneas posibles, indiquémoslo, por ejemplo, para c_2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k\cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k\cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo justificativo: En un ejemplo anterior hemos visto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24$$

Ahora bien, utilizando esta propiedad en sentido inverso, es decir, sacando factor común 3 de f_2, resulta más fácil su cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Observaciones: **1ª)** Como pudo advertirse en el ejemplo anterior, esta propiedad es muy útil a la hora de simplificar, cuando se pueda, un determinante de coeficientes elevados antes de calcularlo, a base de extraer factor común de una (o varias) línea(s):

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \underset{\text{extrayendo de } f_1}{5} \cdot \underset{\text{de } f_2}{2} \cdot \underset{\text{de } f_3}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

2ª) Esta propiedad se puede aplicar en el otro sentido, es decir, para introducir –cuando convenga– un factor multiplicativo en un determinante. ¡IMPORTANTE! **Dicho factor multiplicativo podemos introducirlo en la fila o columna que deseemos, pero sólo en una:**

[6] Esta propiedad es una consecuencia de la anterior.
[7] Esta propiedad es obvia debido a la regla de Sarrus.
[8] De nuevo fácil de demostrar aplicando Sarrus.

$$3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2/3 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1/3 & 2\end{vmatrix}=$$

3ª) ¡CUIDADO! Conviene no confundir esta propiedad con la idea, vista en el tema anterior, de que para multiplicar una constante por una matriz se multiplicaban todos los elementos de dicha matriz.

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2/3 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1/3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 9 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

4ª) CONSECUENCIA: «Si dos filas (o columnas) son proporcionales, el determinante es cero».

Efectivamente, si dos filas (o columnas) son proporcionales, entonces podemos extraer la constante de proporcionalidad de una de ellas, con lo cual pasará a tener dos filas (o columnas) iguales, y debido a la 2ª propiedad el determinante valdrá cero.

Ejemplo justificativo:

Podemos predecir, sin necesidad de desarrollarlo, que el siguiente determinante vale cero:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -2 & -6\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

Ya que $c_3=3c_2$. Compruébese.

⑤ **Descomposición en sumandos a partir de los elementos de una fila (o columna):** La siguiente descomposición es válida[9] cualesquiera que sean las filas (o columnas), y el nº de sumandos; nosotros aquí la indicamos para la f_2 y 3 sumandos:

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d+e+f & g+h+i & j+k+l\\ m & n & p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & g & j\\ m & n & p\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c\\ e & h & k\\ m & n & p\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c\\ f & i & l\\ m & n & p\end{vmatrix}$$

Observaciones: 1ª) Como ya se ha indicado, la descomposición es válida ya sea por cualquier fila o columna, y por el nº de sumandos que deseemos. Por ejemplo, comprobémoslo desarrollando el siguiente determinante cuyo valor (-24) ya conocemos, por f_3 y 2 sumandos:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 1+1 & 1+0 & 1+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\quad+\quad=-24$$

[9] La demostración por Sarrus es sencilla pero muy laboriosa.

O por c_1 y 3 sumandos:

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\boxed{0}+0&2&-1\\1+\boxed{1}+1&-6&9\\1+\boxed{1}+0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-6&9\\1&1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boxed{0}&2&-1\\\boxed{1}&-6&9\\\boxed{1}&1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&-6&9\\0&1&3\end{vmatrix}=\quad+\quad+\quad=-24$$

También funciona con restas; comprobémoslo desarrollando por f_1:

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\boxed{1}&2-\boxed{0}&1-\boxed{2}\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&1\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boxed{1}&\boxed{0}&\boxed{2}\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\quad-\quad=-24$$

2ª) ¡CUIDADO! No se puede descomponer a la vez por dos filas (o columnas), sino que hay que descomponer primero por una y luego por otra:

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&3\\2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1+1&0+1&2+1\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}\neq\cancel{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}}=\quad+\quad=\quad\neq$$

INCORRECTO

Lo correcto es lo siguiente:

Desarrollamos por f_2

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&3\\2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1+1&0+1&2+1\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}=$$

Desarrollamos ambos por f_3

$$=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&2\end{vmatrix}+\cancel{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\quad+\quad+\quad+\quad=$$

0, porque $f_2=f_3$

3ª) La utilidad de esta propiedad se verá más adelante, a la hora de calcular ciertos determinantes simplificándolos previamente...

⑥ **«Si una fila (o columna) es combinación lineal de las restantes, el determinante es cero, <u>y viceversa</u>[10]»**

Para entender esta propiedad, primero tenemos que recordar qué se entiende por combinación lineal. Por ejemplo, una combinación lineal de las filas de una matriz es una expresión de este tipo:

$$\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3+\ldots \quad \text{donde } \alpha, \beta, \gamma\ldots \in \Re$$

Por ejemplo, son combinaciones lineales las siguientes:

$$f_1=f_2+f_3 \qquad c_3=c_2+2c_3 \qquad f_1=3f_2-f_3 \qquad c_2=3c_3$$

Y no lo son expresiones como $f_1=f_2+5$, $f_3=f_1\cdot f_2$, $c_2=2+c_1+c_3$, etc.

[10] Esta propiedad fue demostrada por primera vez por el alemán Heinrich F. Scherk (1798-1855), en 1825.

Por último, nótese que, por ejemplo, $f_1=f_2-f_3$ es equivalente a $f_2=f_1+f_3$ o $f_3=f_2-f_1$

Ejemplo justificativo: Vamos a inventarnos un determinante cuyas filas cumplan, por ejemplo, la combinación lineal $f_3=f_1+f_2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 4 & -4 & 8 \end{vmatrix}$$

Pues bien, puede comprobarse que su valor es 0.

Observaciones: 1ª) Lo curioso de este teorema es que el inverso también se cumple: si un determinante es nulo hay una combinación lineal. Por ejemplo, en el ejercicio 2, apdo. h, obtuvimos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, hay por fuerza una combinación lineal en sus filas. ¿Cuál es?

2ª) Pero más sorprendente es que si hay combinación lineal por filas también debe haberla por columnas ¿Podría encontrarse en el caso de los dos determinantes nulos anteriores?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 4 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

En el primer caso es bastante obvia, no tanto en el segundo. Encontrar la combinación lineal en algunos casos puede llegar a ser un reto[11]…

3ª) Esta propiedad es una de las grandes aplicaciones de los determinantes, y el motivo de que los vayamos a utilizar hasta final de curso: son como una especie de herramienta o test que nos permite detectar si hay o no combinación lineal.

⑦ **«El determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes[12]»**:

$$\boxed{\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

«El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta[13]»:

$$\boxed{\det(A) = \det(A^t)}$$

Una última propiedad:

$$\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A} \quad \text{donde A es una matriz de orden n}$$

[11] De todas formas, más adelante veremos un método para obtener la combinación lineal de forma algebraica, es decir, sin recurrir a nuestra mayor o menor vista "matemática"…

[12] Esta propiedad fue demostrada por primera vez por el francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857). La demostración es complicada.

[13] La demostración, al igual que la de la siguiente fórmula, es trivial. Inténtese…

Ejercicio justificativo: De la 1ª fórmula:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

De la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

De la 3ª:

$$2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

⑧ **«Si a una fila (o columna) le sumamos (o restamos) una combinación lineal de las restantes, el determinante no varía[14]»**

Ejemplo justificativo: Vamos a partir de uno de los determinantes del ejercicio anterior, de valor conocido:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Y, por ejemplo, vamos a sumar a f_1 la combinación lineal f_2+f_3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_1=f_1+f_2+f_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

la que cambia

no varían

la que cambia

no varían

Puede comprobarse que el valor del determinante no ha variado.

Observaciones: 1ª) En la combinación lineal no tienen por qué figurar todas las restantes filas (o columnas); de hecho, no es habitual que ello ocurra. Por ejemplo, en el determinante anterior, hubiera sido mucho más útil sumar a c_1 la columna c_3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_1=c_1+c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

la que cambia

no varía

[14] La demostración de esta propiedad, que no es complicada, se basa en las anteriores.

De esta forma, hemos creado varios ceros, lo cual es, obviamente, muy útil a la hora de calcular determinantes. Y esta es precisamente la idea del método de Gauss, que veremos a continuación.

2ª) Es importante hacer notar que la(s) fila(s) o columna(s) de la combinación lineal no varían, y que la que cambia es aquella a la que sumamos (o restamos, que también puede ser) la combinación lineal. También hay que tener en cuenta que la fila (o columna) a la que sumamos (o restamos) la combinación lineal no se puede ver multiplicada por ningún número, ni cambiada de signo, porque entonces sí que varía el determinante. Por ejemplo, no podemos hacer $f_2=2f_2-f_3$, o $c_1=-c_1+c_3$, etc.

Consecuencia: MÉTODO de GAUSS para calcular determinantes de cualquier orden: «Consiste en, mediante la utilización de la propiedad anterior, transformar la matriz en triangular inferior o escalonada; el determinante será entonces igual al producto de los elementos de la diagonal[15]». Por ejemplo, para orden 4:

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c\cdot d$$

Ejemplo justificativo: Aunque no es lo habitual, vamos a aplicar el método de Gauss para calcular un determinante de orden 3 cuyo valor ya conozcamos, como por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

En primer lugar, y como se trata de hacer ceros debajo de la diagonal, es muy recomendable conseguir tener un 1 (también vale un -1) en la esquina superior izquierda de la matriz; en este caso lo conseguimos permutando f_1 y f_3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrows f_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que, debido a la propiedad ①, hemos cambiado de signo el determinante. Este 1 en esa posición se llama pivote (de hecho, este método a veces se llama "pivotal"). Una vez conseguido el pivote, hacemos ceros debajo de él:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_2=f_2+2f_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3=f_3-3f_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \underset{\text{Por Sarrus}}{=} -(-6) = 6$$

la que cambia — no varía (la del pivote)

[15] Ideado por el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Trivial, por ejemplo, en el caso de orden 3, por Sarrus: $\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c$

Pero para lo que resulta verdaderamente útil este método es para determinantes de orden 4 o superior; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrows f_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2=f_2-2f_1 \\ f_3=f_3-2f_1 \\ f_4=f_4-f_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{f_2 \leftrightarrows f_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{f_4=f_4+2f_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{f_4=f_4-(1/2)f_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix} = -6$$

Nótese que este método pivotal es ordenado, es decir, el pivote va saltando por la diagonal, y se trata en cada paso de hacer ceros debajo de él. Además, como puede verse en el penúltimo paso, el pivote no tiene por qué ser necesariamente 1 (o –1). Una desventaja de este método es que a veces se hace laborioso conseguir un pivote…

Ejercicios final tema: 4 a 14

Ejercicio PAEG: 3B jun 2013, 3A jun 2013, 3A sept 2012, 3B jun 2010 (+ matrices), 3A sept 2008, 1B jun 2003, 4B jun 2002, 3B jun 2005, 3A sept 2006, 1B sept 2010 (+ intervalos concavidad)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 83: 3 y 4; págs.. 95 y ss.: 8, 14, 20, 38 y 39 (propiedades de los determinantes), 3 y 15 (ecuaciones con determinantes)

III. DESARROLLO de un DETERMINANTE por los ELEMENTOS de una FILA [16]

Supongamos una matriz cuadrada:

Menor complementario del elemento a_{ij}: «Es el determinante que resulta de suprimir la fila **i** y la columna **j** de la matriz A; se designa como $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$»

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \longrightarrow \alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \ldots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \longrightarrow \alpha_{42} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \ldots$$

etc…

Adjunto del elemento a_{ij}: «Es el menor complementario $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ precedido del signo + o – según que la suma de la fila **i** y la columna **j** sea par o impar, respectivamente. Se designa como $\mathbf{A_{ij}}$»:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}}$$

[16] Ver págs. 85 y ss. del libro de ed. Anaya.

En realidad, el signo al que hay que afectar el menor complementario α_{ij} se calcula más fácilmente mediante la "regla del tablero de ajedrez"; por ejemplo, para una matriz cuadrada de orden 4:

$$\begin{pmatrix} {}^{+}* & {}^{-}* & {}^{+}* & {}^{-}* \\ {}^{-}* & {}^{+}* & {}^{-}* & {}^{+}* \\ {}^{+}* & {}^{-}* & {}^{+}* & {}^{-}* \\ {}^{-}* & {}^{+}* & {}^{-}* & {}^{+}* \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: Escoger un determinante de orden 3 de valor conocido y hallar los adjuntos correspondientes a una línea –por ejemplo, A_{11}, A_{12} y A_{13}, correspondientes a la 1ª fila–. Calcular a continuación la expresión $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ y comprobar que se obtiene $|A|$.

Supongamos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ cuyo valor es, como vimos, -24

Para ver el signo correspondiente a cada adjunto según la regla del tablero de ajedrez señalamos dichos signos en la fila donde vamos a hacer el desarrollo, es decir, f_1:

$$A=\begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}{-1} \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{11}=\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-18-9=-27$$

$$A=\begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}{-1} \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-(9-18)=9$$

$$A=\begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}{-1} \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3+12=15$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot(-27)+2\cdot 9+(-1)\cdot 15= \\ =-27+18-15=-24=|A|$$

Puede comprobarse que si hacemos un desarrollo tal por cualquiera de las otras 5 líneas se obtendrá siempre el valor del determinante. Esto es precisamente lo que descubrió el francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827):

MÉTODO de LAPLACE para calcular determinantes de cualquier orden: «El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila (o columna) cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes[17]».

[17] Ver demostración en pág. 86 del libro de ed. Anaya.

Ejercicio 4: Desarrollar el determinante anterior por Laplace por otra línea y comprobar que se obtiene $|A|$.

Ejercicio 5: Desarrollar por Laplace el siguiente determinante de un ejemplo anterior, y comprobar que se obtiene el mismo resultado (–6):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: Adviértase que conviene desarrollar por una línea que contenga el mayor número de ceros posible)

- Nótese que con el método de Laplace podemos justificar la validez del método de Gauss. En efecto, si en el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

hacemos un desarrollo por Laplace por c_1 obtendremos trivialmente $a \cdot b \cdot c \cdot d$ (C.Q.D.)

■ Como es fácil de advertir, a la hora de hacer un desarrollo por Laplace por una línea conviene tener el mayor número posible de ceros; de ahí la conveniencia del siguiente

MÉTODO PRÁCTICO (o Método mixto) para calcular determinantes de cualquier orden: «Antes de desarrollar por una fila (o columna) por Laplace conviene hacer el mayor número posible de ceros en ella, aplicando la propiedad ⑧, es decir, sumando combinaciones lineales apropiadas[18]»

Ejercicios final tema: 15 a 22

Ejercicio PAEG: 3B jun 2009

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 87: 3; pág. 88: 1; págs.. 95 y ss.: 9, 10 y 43 (cálculo de determinantes de orden 4 o superior); pág. 97: 19 (cálculo de determinantes en función de un parámetro)

IV. MATRIZ INVERSA [19]

IV.1 DEFINICIÓN y CÁLCULO

Recordar: El inverso de 2 es 2^{-1} porque $2\cdot 2^{-1}=2^{-1}\cdot 2=1$. De la misma forma se define la inversa de una matriz:

Definición: «La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A se designa como $\mathbf{A^{-1}}$ y es aquella que verifica:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\mathbb{1}}$$

Dada A, no siempre existe A^{-1}, pero si existe se dice que A es **regular** o **inversible**; en caso contrario, A se llama **singular** »

¿Cómo se calcula? Necesitamos previamente la siguiente definición:

Matriz adjunta de una matriz cuadrada A: «Es la matriz formada por los adjuntos correspondientes $\mathbf{A_{ij}}$. Se designa como **Adj(A)**»:

La matriz inversa se calcula mediante la siguiente fórmula[20]: $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot {}^{t}\mathrm{Adj}(A)}$

Consecuencia: $\boxed{\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0}$

Observaciones: **1ª)** Por lo tanto, en la práctica es preferible comenzar por calcular |A| para ver si $\exists\, A^{-1}$, y en caso afirmativo calcular a continuación la adjunta.

2ª) Existe otro método, debido a Gauss, para calcular la inversa, quizá más laborioso.[21]

[18] Ver pág. 88 del libro de ed. Anaya.

[19] Ver págs. 58 y 111 del libro de ed. Anaya.

[20] Ver demostración en pág. 112 del libro de ed. Anaya. El inglés Arthur Cayley (1821-1895) fue quien estableció esta fórmula, en 1858.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}\longrightarrow |A|=4-8-6+8=-2\Longrightarrow \exists A^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}{}^{+}2&{}^{-}{-2}&{}^{+}2\\{}^{-}2&{}^{+}1&{}^{-}0\\{}^{+}3&{}^{-}{-2}&{}^{+}2\end{pmatrix}\rightarrow\left[\begin{matrix}A_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&2\end{pmatrix}=\boxed{2} & A_{12}=-\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}=\boxed{-4} & A_{13}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}=\boxed{-7}\\ A_{21}=-\begin{pmatrix}-2&2\\-2&2\end{pmatrix}=\boxed{0} & A_{22}=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}=\boxed{-2} & A_{23}=-\begin{pmatrix}2&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\boxed{-2}\\ A_{31}=\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{-2} & A_{32}=-\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}=\boxed{4} & A_{33}=\begin{pmatrix}2&-2\\2&1\end{pmatrix}=\boxed{6}\end{matrix}\right]\rightarrow \mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&-4&-7\\0&-2&-2\\-2&4&6\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow {}^{t}\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-2&4\\-7&-2&6\end{pmatrix}\longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot{}^{t}\mathrm{Adj}(A)=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-2&4\\-7&-2&6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&-2\\7/2&1&-3\end{pmatrix}}$$

Comprobación: $$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&-2\\7/2&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}=$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&-3&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow |A|=6-6=0\Longrightarrow \boxed{\nexists A^{-1}}$$

IV.2 USO de DERIVE PARA MATRICES y DETERMINANTES

- **Introducir una matriz:**
- **Hallar su determinante:** DET[ ] + =
- **Trasponer una matriz:** [ ]` + =
- **Adjunta de una matriz:** ADJOINT[ ] + =
- **Inversa de una matriz:** [ ]^(-1) + =

[21] Ver pág. 58 del libro de ed. Anaya. Para calcular la inversa de una matriz de orden 4 es preferible por matriz adjunta; para orden 5 o superior, compensa más por Gauss…

▪ **Potencia de una matriz:** [ ]^n + **=**

Ejercicios final tema: 23 a 34

Ejercicio PAEG: 3B sept 2005, 1B sept 2003, 3B jun 99, 3A jun 2008

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 59: 1 y 2; pág. 72: 16 a 18; pág. 112: 1 y 2; pág. 120: 9 y 10 ← Cálculo de A^{-1}
pág. 120: 12, 28, 29, 30 y 37 ← Cálculo de A^{-1} con parámetro

IV.3 ECUACIONES MATRICIALES

«Son aquellas en las que la incógnita **X** y los coeficientes **A**, **B**, **C**... son matrices». También existen los sistemas matriciales. Recordemos que no existe la división de matrices; por tanto, para despejar **X** hay que multiplicar por una determinada matriz inversa **por el mismo lado en ambos miembros** (pues el producto de matrices no es conmutativo):

Ejemplo: Supongamos la siguiente ecuación matricial:

$$AX+B=C \quad \text{donde A, B, C y X son matrices}$$

Comenzamos a despejar **X** aplicando las propiedades permitidas de matrices vistas en el tema anterior:

$$AX=C-B$$

A continuación, para despejar **X**, en este caso tenemos que multiplicar ambos miembros **y por el mismo lado** –en concreto el izquierdo– por A^{-1}:

$$A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$$

Y teniendo en cuenta que, por la definición de matriz inversa, $A^{-1}A=\mathbb{1}$, nos queda:

$$\mathbb{1}\,X=A^{-1}(C-B)$$

Finalmente, y como la matriz $\mathbb{1}$ es el elemento neutro del producto:

$$\boxed{X=A^{-1}(C-B)}$$

NOTA: En el antepenúltimo paso hubiera sido incorrecto proceder de la siguiente forma:

$$\cancel{A^{-1}AX=(C-B)A^{-1}}$$

¿Por qué?

Ejercicios final tema: 35 a 49

Ejercicio PAEG: 2B sept 2002, 3B sept 2007, 3A jun 2006, 3A jun 2004 ← Matrices de orden 2
1B jun 2001, 3B sept 2000, 3B jun 97, 3A sept 99, 1B sept 2001, 3B sept 2004, 2B sept 98, 1A jun 98, 3B sept 97, 3A jun 2009, 3A sept 2010, 3A sept 2009 ← Matrices de orden 3

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 121 y ss.: 21 a 25 y 32; pág. 74: 36

V. RANGO de una MATRIZ [22]

Definición: «Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** (se suele abreviar como **l.d.**)cuando uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, son **linealmente independientes** (**l.i.**)»:

NOTA: Alguno de los coeficientes de la combinación lineal puede ser 0 (lo cual, por cierto, es lo habitual…)

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 1 & 3 & 7\\ 5 & 0 & -1 & 7 & 12\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow f_3=f_1+f_2\\ \leftarrow f_4=f_2+f_3\end{array}$$

En este caso cualquiera de los siguientes conjuntos de vectores fila: $\{f_1, f_2\}$, $\{f_1, f_3\}$, $\{f_1, f_4\}$, $\{f_2, f_3\}$, $\{f_2, f_4\}$ y $\{f_3, f_4\}$ es l.i. Ahora bien, en el momento en que introduzcamos en cualquiera de ellos un vector de los restantes pasará a ser l.d.; por ejemplo, $\{f_1, f_2, f_3\}$ es l.d. porque hay combinación lineal.

Por cierto, si $f_4=f_2+f_3$, y $f_3=f_1+f_2$, ¿qué relación hay entre $\{f_1, f_2, f_4\}$? Compruébese.

¿Y entre $\{f_1, f_3, f_4\}$?

Definición: «**Rango** de una matriz = nº de filas (o columnas) l.i.»

En el ejemplo anterior, $\text{rg}\,A=2$, ya que hemos visto que como máximo hay 2 vectores fila l.i.

Observaciones: **1ª)** «El rango por filas coincide con el rango por columnas»[23]

Lo que dice este teorema es que si, por ejemplo, en la matriz anterior había a lo sumo 2 filas l.i, también habrá como máximo 2 columnas l.i. Por cierto, ¿Podría encontrarse alguna de las combinaciones lineales por columnas?

2ª) Vamos a reescribir, por motivos prácticos, y a la luz de la definición de dependencia lineal, la propiedad ⑥:

$$\boxed{|A|=0 \Leftrightarrow \text{sus filas (o columnas) son l.d.}}$$

Por lo tanto, un determinante es una magnífica herramienta a modo de test para descubrir la posible existencia de combinación lineal[24] y, por tanto, para hallar el rango de un conjunto de vectores, o lo que es lo mismo, de una matriz.

22 El rango de una matriz también se llama característica. Ver págs. 63 a 65 y 89-90 del libro de ed. Anaya.

23 Ver demostración de este teorema en pág. 67 del libro de ed. Anaya.

24 Nótese que con ello descubrimos la existencia de combinación lineal. Cómo es en concreto la combinación es otro asunto; ahora bien, normalmente basta únicamente con saber si hay o no combinación.

Cálculo práctico del rango de una matriz: Existen 3 métodos:

1º Por determinantes[25] (Orlando menores)[26]:

Definición: «Dada una matriz, un menor de orden **k** es cualquier determinante de orden **k** que podemos obtener suprimiendo filas y/o columnas»:

Ejemplo: En la matriz del ejemplo anterior algunos menores de orden 2 serían los señalados con recuadro:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 1 & 3 & 7\\ 5 & 0 & -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$$ que resulta de suprimir f_3, f_4, c_3, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1$$ que resulta de suprimir f_1, f_4, c_1, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 7 & 12\end{vmatrix}=-26$$ que resulta de suprimir f_2, f_3, c_1, c_2 y c_3

Ejemplos de menores de orden 3 serían:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 1 & 3 & 7\\ 5 & 0 & -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir f_4, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir f_1, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}-2 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 7\\ 0 & 7 & 12\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir f_2, f_3, c_1, c_2 y c_3

Por cierto, era de esperar que todos los menores de orden 3 fueran nulos ¿Por qué?

Menores de orden 4 hay claramente cinco, todos ellos obviamente nulos; he aquí dos ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 1 & 3 & 7\\ 5 & 0 & -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 4\\ 3 & -1 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1 & 7\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir c_5

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 3 & 7\\ 5 & -1 & 7 & 12\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir c_2

25 Ver pág. 89 del libro de ed. Anaya.

26 Según la R.A.E. orlar es añadir algo alrededor de una hoja, párrafo, imagen, etc.

Este ejemplo nos conduce al siguiente resultado:

«El rango de una matriz es igual al orden del mayor menor no nulo de dicha matriz»

Y en este hecho se basa el siguiente

Procedimiento ordenado para hallar el rango de una matriz (Orlando menores):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

1º) Empezamos eligiendo un menor de orden 2 no nulo (p. ej. el recuadrado), que, por tanto, nos garantiza que $\text{rg}\,A \geq 2$, es decir, al menos f_1 y f_2 son l.i.:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,A \geq 2$$

(Si todos los menores de orden 2 que pudiéramos formar cubriendo ordenadamente toda la matriz fueran nulos, concluiríamos que $\text{rg}\,A = 1$)

2º) Al menor anterior le vamos orlando sucesivamente el resto de columnas y la siguiente fila, es decir, f_3: vamos calculando sucesivamente cada uno de los tres menores de orden 3 posibles, es decir, $|c_1\ c_2\ c_3|$, $|c_1\ c_2\ c_4|$ y $|c_1\ c_2\ c_5|$, y en cuanto encontremos uno de ellos no nulo $\Rightarrow \text{rg}\,A \geq 3$

Ahora bien, si estos tres menores fueran nulos concluiríamos que f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2 y pasaríamos a repetir el procedimiento anterior con f_4: si los tres menores de orden 3 fueran también nulos, como no nos quedan más filas $\Rightarrow \text{rg}\,A = 2$; pero si alguno fuera no nulo $\Rightarrow \text{rg}\,A \geq 3$

(En este ejemplo concreto podemos comprobar que los seis menores de orden 3 que podemos formar y que cubren ordenadamente la matriz son todos nulos $\Rightarrow \boxed{\text{rg}\,A = 2}$)

3º) Formaríamos los dos menores de orden 4 posibles que cubren ordenadamente la matriz y que resultan de orlar el menor de orden 3 anterior no nulo: si ambos son nulos $\Rightarrow \text{rg}\,A = 3$; en caso contrario, y como ya no nos quedan más filas para orlar $\Rightarrow \text{rg}\,A = 4$

Observaciones: **1ª)** $\text{rg}\,A_{mxn} = \min(m,n)$

Por lo tanto, si por ejemplo la matriz es 4x5 y hemos obtenido que el rg es 4, significa que hay 4 columnas l.i., es decir, cualquier columna es combinación lineal de las cuatro restantes.

2ª) Si, por ejemplo, todos los menores de orden 3 que puedan formarse cubriendo ordenadamente la matriz son nulos, el rango se queda en 2, es decir, por razones obvias de dependencia lineal el rango no puede saltar a 4 (pues todos los menores de orden 4 por fuerza serían nulos).

3ª) El procedimiento es de abajo a arriba, es decir, empezamos estudiando si el rango al menos es 2, y vamos subiendo. Ahora bien, si hay un parámetro en la matriz y hay que estudiar el rango en función de éste se recomienda proceder de arriba abajo, por el motivo que veremos cuando hagamos los ejercicios del final del tema.

4ª) La única matriz de rango 0 es la matriz nula, **O**.

5ª) Para hallar el rango con Derive: RANK[ ]^n + **=**

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

1º) Empezamos eligiendo el menor de orden 2 recuadrado, que, al ser no nulo, nos garantiza que $\text{rg}\,A \geq 2$, es decir, al menos f_1 y f_2 son l.i.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A \geq 2$$

2º) Al menor anterior le vamos orlando sucesivamente el resto de columnas y la siguiente fila, es decir, f_3:

$$|c_1\ c_2\ c_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2+2+1-1=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|c_1\ c_2\ c_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10+1-6-3+5-4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}\,A \geq 3$$

(Nótese que ya no es necesario hallar $|c_1\ c_2\ c_5|$; ahora bien, si estos tres menores hubieran sido nulos concluiríamos que f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2 y pasaríamos a repetir el procedimiento anterior orlando con f_4).

3º) Calculamos a continuación los dos menores de orden 4 posibles que cubren ordenadamente la matriz y que resultan de orlar el menor de orden 3 anterior no nulo:

$$|c_1\ c_2\ c_3\ c_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \qquad\qquad = 0$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|c_1\ c_2\ c_4\ c_5| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \qquad\qquad = 9 \neq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{rg}\,A = 4}$$

(Si ambos hubiesen sido nulos $\Rightarrow$ $\text{rg}\,A=3$)

2º Por Gauss [27] (i.e. por matrices):

3 transformaciones permitidas entre matrices (el rango no varía):

1ª) Podemos permutar 2 filas (o columnas) y el rango de la matriz no varía.

En efecto, si existe combinación lineal, evidentemente el hecho de que permutemos dos filas (o columnas) no va a hacer que ésta desaparezca; simplemente, cambiará de expresión.

2ª) Podemos multiplicar (o dividir) **una fila (o columna) por un número** (≠0) y el rango no varía.

En efecto, si existe combinación lineal, el hecho de que multipliquemos una fila (o columna) por un número (≠0) tampoco va a hacer que ésta desaparezca; en todo caso, cambiará de expresión.

3ª) A una fila (o columna) podemos sumarle (o restarle) **una combinación lineal de las restantes** y el rango no varía.

Ídem.

3 supresiones permitidas en una matriz (el rango no varía):

1ª) Podemos suprimir filas (o columnas) nulas y el rango de la matriz no varía.

En efecto, un vector fila (o columna) formado íntegramente por 0 no puede aportar nada a efectos de combinación lineal.

2ª) Podemos suprimir una fila (o columna) proporcional a otra y el rango no varía.

En efecto, el hecho de que exista una fila (o columna) proporcional a otra no aporta nada al rango de la matriz, es decir, si suprimimos una de las dos (¡No las dos!) evidentemente el rango no variará. Por ejemplo:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2 \quad \text{porque} \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

¡CUIDADO! En general, si hay n filas (o columnas) proporcionales entre sí, se suprimen n-1 (¡no todas!), y nos quedamos con una.

3ª) Podemos suprimir una fila (o columna) que sea combinación lineal de las restantes y el rango no varía.

La razón es análoga a la del caso anterior:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ \cancel{3} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{7} \\ \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{7} & \cancel{12} \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{porque} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$f_3=f_1+f_2$

$f_4=f_2+f_3$

Por último, a veces se utiliza el hecho de que $\mathbf{rg\,A = rg\,A^t}$, de obvia justificación.

[27] Ver pág. 66 del libro de ed. Anaya.

Cálculo del rango por Gauss: «Mediante las 6 operaciones anteriores hacemos 0 debajo de la diagonal; el rango será entonces igual al nº de elementos no nulos en ella»

Por ejemplo, supongamos que hemos aplicado las 6 operaciones permitidas y llegamos a la siguiente matriz triangular:

$$\ldots = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

ya que, en efecto, el menor $|c_1\ c_2\ c_3|$ es no nulo. Hay que hacer hincapié en que, a la hora de hacer el recuento final de elementos no nulos sobre la diagonal, hay casos en los que se puede evitar algún 0 a base de permutar columnas. Por ejemplo, supongamos que al aplicar Gauss llegamos a la siguiente matriz:

$$\ldots = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Podríamos concluir equivocadamente que el rango es 2. Ahora bien, si permutamos columnas y seguimos triangularizando la matriz:

$$\ldots = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrows c_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{f_3=f_3-2f_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

En cambio, en el siguiente caso:

$$\ldots \underset{\text{suprimimos } f_2 \text{ por ser } \propto \text{a } f_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrows c_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

De todas formas, y como ya comentamos al hablar del cálculo de determinantes, lna desventaja del método de Gauss es que a veces se hace laborioso conseguir un pivote.

3º Método mixto (método práctico): «Se recomienda calcular el rango por menores, pero aplicando, cuando proceda, alguna de las seis operaciones permitidas»

Ejercicios final tema: 50 a 53

Ejercicio PAEG: 3A jun 2007, 3A sept 2004, 3A sept 98, 4B jun 98 ← Rango en función de un parámetro

3B jun 2012 ← teórico + matriz inversa

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 73: 29; págs.. 96 y ss.: 12, 13, 16 a 18 (rango en función de un parámetro); pág. 64: 2 a 5; págs. 73 y ss.: 27 y 28 (dependencia lineal de vectores)

53 EJERCICIOS de DETERMINANTES	2º BACH.

Cálculo de determinantes. Propiedades:

1. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 33 & 55 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

*(Soluc: **a)** 30; **b)** -66; **c)** 0; **d)** 0; **e)** 0; **f)** 0; **g)** 2; **h)** -50; **i)** 0; **j)** 0; **k)** 0; **l)** 0)*

2. Hallar el valor del determinante de: **a)** La matriz nula de orden 2 **b)** La identidad de orden 2 **c)** Cualquier matriz diagonal de orden 2 *(Soluc: **a)** 0; **b)** 1; **c)** el producto de los elementos de la diagonal)*

3. Calcular los siguientes determinantes de orden 3 aplicando la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

*(Soluc: **a)** -15; **b)** -36; **c)** -11; **d)** 0; **e)** -168; **f)** 385; **g)** -114; **h)** 3; **i)** 14; **j)** 1000)*

4. Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, utilizar las propiedades de los determinantes para hallar razonadamente:

a) $|2A|$ **b)** $|A^t|$ **c)** $|-5A|$ **d)** $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} b & 3a & c \\ h & 3g & i \\ 2e & 6d & 2f \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} a & b-2a & a-c \\ d & e-2d & d-f \\ g & h-2g & g-i \end{vmatrix}$

*(Soluc: **a)** 32; **b)** 4; **c)** -500; **d)** 4; **e)** 12; **f)** -4; **g)** 8; **h)** 16; **i)** 24; **j)** -4)*

5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcular razonadamente el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ *(Soluc: 200)*

6. Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

7. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *(Soluc: todos valen 5)*

8. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

9. Justificar que si A es una matriz cuadrada de orden 3 y k un número real, entonces $\det(kA)=k^3\det(A)$

10. Justificar, mediante una matriz de orden 3, que $\det A=\det A^t$

11. Resolver el problema 22 de los ejercicios del tema anterior mediante determinantes
(Ayuda: aplicar que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes)

12. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix}=0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}=0$

(Ayuda: Previamente hacer ceros debajo de la diagonal) *(Soluc: **a)** x=±1; **b)** x=b, x=c)*

13. ***(S)*** Resolver la ecuación $\det(A-x\mathbb{1})=0$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, $\mathbb{1}$ la matriz unidad de dimensión 3 y $x\in\Re$ la incógnita. *(Soluc: x=0, x=1, x=4)*

14. Calcular por **Gauss** (es decir, haciendo ceros bajo la diagonal) los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 6 \\ 5 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 1 & 20 & 5 & 1 \\ -4 & -12 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 13 & 2 & 15 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & 5 \\ 9 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 10 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ -5 & 13 & 12 & 0 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(*Sol: **a)** 8; **b)** -2; **c)** $(x+1)^3$; **d)** 48; **e)** 2; **f)** -3; **g)** 140; **h)** 364; **i)** -4254; **j)** -2098; **k)** -1312; **l)** 10*)

15. Calcular por el método más conveniente (preferentemente por **Laplace**, haciendo ceros previamente):

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 & 4 \\ -4 & -4 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 5 & -6 \\ -4 & -6 & 15 & 4 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(*Sol: **a)** -286; **b)** -72; **c)** 0; **d)** 2; **e)** 1899; **f)** 6; **g)** -52; **h)** 7; **i)** -10; **j)** -2; **k)** 0; **l)** -5*)

16. ***(S)*** Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(*Soluc: 50(b–a)(c–a)(c–b)*)

17. ***(S)*** Calcular:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

(Ayuda: extraer previamente factores del determinante) (*Soluc: $2a^2b^4c^2$*)

18. ***(S)*** Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: hacer ceros en la uª columna) (*Soluc: -abc*)

19. ***(S)*** Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la uª fila las restantes, y después sacando factor común)

(Soluc: $3(x+1)(3-x)^3$)

20. ***(S)*** Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la 4ª fila las demás, y extrayendo factor común) *(Soluc: 4a+1)*

21. ***(S)*** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: hacer ceros debajo de la diagonal, factorizando los polinomios que vayamos obteniendo, para así poder sacar factores comunes) *(Soluc: x=1)*

22. Resolver la siguiente ecuación, sabiendo que una solución es $x=-(a+b+c+d)$:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: sumar a la 1ª col. las otras, y después sacar factor común)

(Soluc: las otras raíces son x=a, x=b, x=c y x=d)

Matriz inversa:

23. Definir matriz inversa. Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices, y **comprobar** el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(Sol: ***a)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***c)*** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; ***d)*** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; ***e)*** $\nexists$; ***f)*** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***g)*** $\nexists$; ***h)*** $\begin{pmatrix} 1/2 & -2 & -1/2 \\ -7/8 & 17/4 & 11/8 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$; ***i)*** *no se puede)*

24. Calcular, para los valores del parámetro **a** que lo haga posible, la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Soluc: para $a \neq 5$ existe inversa)

25. Averiguar para qué valores del parámetro **t**, la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para t=2, si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

(Soluc: para t=1 o t=3 no tiene inversa)

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro **m** existe A^{-1} *(Soluc: $\exists A^{-1}\ \forall m$)*

b) Hallar dicha inversa para m=1

27. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de **a** y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$$

28. ***(S)*** Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$

29. ***(S)*** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz *simétrica* P no singular tal que $B=P^{-1}AP$

30. ***(S)*** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de **a** y **b** la matriz A tiene inversa? Determinar la matriz A^{-1}.

(Soluc: para $a \neq 0$ y $b \neq 0$ $\exists A^{-1}$)

31. ***(S)*** Determinar para qué valor o valores de **x** tiene inversa la matriz

$$\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

y calcularla en función de **x**. *(Soluc: para $x\neq0$ existe inversa)*

32. Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases A, B y C, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:

	Peso (g)	**Precio (€)**
A	250	1
B	500	1,80
C	1000	3,30

A una farmacia se le ha suministrado 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 € ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia? (Obligatorio utilizar matrices).

(Soluc: 2 tipo A, 2 tipo B, 1 tipo C)

33. ***(S)*** Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2+2A+\mathbb{I}=0$, comprobar que A es invertible.

34. Demostrar que $|A^{-1}| = 1/|A|$

Ecuaciones matriciales:

35. ***(S)*** Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

36. ***(S)*** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar una matriz X tal que A·X+B=A

37. ***(S)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

38. ***(S)*** Resolver la ecuación matricial X·A=B+C, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

39. Resolver la ecuación matricial AX+B=C, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

40. Resolver la ecuación matricial AB=XC siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}_{3x2}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}_{2x3}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}_{3x3}$$

41. Resolver la ecuación matricial ***A·X·A = B*** siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

42. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ -2 & 3 & 3\\ 1 & 6 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz inversa de A−𝟙, siendo 𝟙 la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial XA−2B=X

43. Resolver la ecuación matricial CX+AB=C siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

44. Resolver la ecuación matricial AX−BCX=A siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

45. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial **ABX−CX=2C**

46. Resolver la ecuación matricial $A^2X-B=A^2$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(Ayuda: calcular primero A^2 y renombrarla como C)

47. ***(S)*** Resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

48. Despejar X en las siguientes ecuaciones matriciales:

a) AX=B *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot B$]*

b) XA=B *[Soluc: $X= B\cdot A^{-1}$]*

c) AX−B=A *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot(A+B)= \mathbb{I}+A^{-1}\cdot B$]*

d) BXB=C *[Soluc: $X=B^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$]*

e) AXB=C *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$]*

f) XA=B−A *[Soluc: $X=(B-A)\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}-\mathbb{I}$]*

g) CX+2B=A *[Soluc: $X=C^{-1}\cdot(A-2B)$]*

h) XA−3B=X *[Soluc: $X=3B\cdot D^{-1}$ donde $D=A-\mathbb{I}$]*

i) BX+AB=C *[Soluc: $X=B^{-1}\cdot(C-AB)$]*

j) AX+C=BCX *[Soluc: $X=D^{-1}\cdot C$ donde $D=BC-A$]*

k) ABX+2C=CX *[Soluc: $X=D^{-1}\cdot 2C$ donde $D=C-AB$]*

l) $AX+B^2=C$ *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot(C-B^2)$]*

m) $A^2X=BC$ *[Soluc: $X=D^{-1}\cdot BC$ donde $D=A^2$]*

n) $AX-B^3C=A$ *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot(A+B^3\cdot C)= \mathbb{I}+A^{-1}B^3C$]*

49. TEORÍA: **a)** ¿Existe la división de matrices? ¿Cuál es, entonces, la forma de despejar la matriz **X** en una expresión de la forma

$$\mathbf{A\cdot X+B=C}$$

, donde **A** y **B** son matrices?

b) Si una matriz **A** tiene inversa, ¿cuál es la relación entre $|A^{-1}|$ y $|A|$?

c) Comprobar que

$$\boxed{{}^{t}\mathrm{Adj}(A)=\mathrm{Adj}(A^{t})}$$

es decir, la traspuesta de la adjunta es la adjunta de la traspuesta. Utilizar una matriz cuadrada de orden 3.

d) Probar que

$$\boxed{\det\left[{}^{t}\mathrm{Adj}(A)\right]=\left[\det(A)\right]^{n-1}}$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n.

e) Comprobar, utilizando matrices cuadradas de orden 3:

$$\boxed{(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}}$$

Rango de una matriz. Independencia lineal:

50. Definir rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $D=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 10 & -2 & 4 & 6 \\ 15 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ **e)** $E=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ **g)** $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **h)** $H=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **i)** $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **j)** $J=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

k) $K=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ **l)** $L=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **m)** $M=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -5 \\ -8 & 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$ **n)** $N=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

o) $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **p)** $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ **q)** $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

*(Soluc: **a)** rgA=3; **b)** rgB=2; **c)** rgC=3; **d)** rgD=1; **e)** rgE=2; **f) rgF=**2; **g)** rgG=2; **h)** rgH=1; **i)** rgI=3; **j)** rgJ=3; **k)** rgK=2; **l)** rgL=2; **m)** rgM=1; **n)** rgN=3; **o)** rgO=0; **p)** rgP=2)*

51. Calcular, según los valores del parámetro **a**, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 2a & a \\ 0 & a & 3a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} a & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & a & 3 & a-1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & a-2 & 4 & a & 4 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & a & -3 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ a & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & a+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

*(Soluc: **a)** a≠1 y a≠-2⇒ rg=3; a=1⇒ rg=1; a=-2⇒ rg=2; a≠0 y a≠3/5⇒ rg=3; **b)** a=0⇒ rg=1; a=3/5⇒ rg=2; **c)** rg=3 ∀a; **d)** a≠2 y a≠3⇒ rg=4; a=2 o a=3⇒ rg=3; **e)** a≠3⇒ rg=3; a=3⇒ rg=2; **f)** rg=3 ∀a; **g)** a≠2⇒ rg=4; a=2⇒ rg=3; **h)** a≠2⇒ rg=4; a=2⇒ rg=3)*

52. Calcular el rango de los siguientes vectores fila. Caso de ser linealmente dependientes, hallar una relación de dependencia:

u=(2,1,7,3)
v=(1,1,3,0)
w=(1,–4,8,15)

(Ayuda: aplicar Gauss) *(Soluc: rg=2; -5**u**+9**v**+**w**=0)*

53. Explicar por qué si en un conjunto de vectores está el $\vec{0}$, entonces son linealmente dependientes. Poner un ejemplo.