MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Otra matriz cuadrada B de orden n se dice que es la matriz inversa de A si se cumple que $A\cdot B = B\cdot A = I_n$. Se escribe entonces $B = A^{-1}$.

Si A y B son dos matrices cuadradas tales que $A\cdot B = I$, automáticamente se cumple $B\cdot A = I$.

$$\boxed{A^{-1} \text{ inversa de } A \iff A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I}$$

Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman matrices **regulares** o invertibles.
Las matrices cuadradas que no tienen matriz inversa se llaman matrices **singulares**.

Propiedades

Si A y B son matrices regulares, se cumple:

$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$	$(k\cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}\cdot A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$	$I^{-1} = I$

Cálculo de la matriz inversa mediante determinantes

Una matriz cuadrada A tiene inversa $\iff$ $\lvert A\rvert \neq 0$	$A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}\left(\text{Adj}(A)\right)^t$

Menor complementario de un elemento

El menor complementario de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada es el determinante de la matriz que obtenemos al suprimir la fila y la columna de dicho elemento. Lo representamos por M_{ij}.

Adjunto de un elemento

El adjunto de un elemento a_{ij} es el menor complementario de dicho multiplicado por 1 ó –1 según que la suma de sus subíndices (fila y columna) sea par o impar. Lo representamos por A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{si} \quad i+j \text{ es par} \\ -M_{ij} & \text{si} \quad i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Matriz Adjunta

Es la matriz que obtenemos al sustituir cada elemento por su adjunto.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS

1) Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$A_{11} = 7 \qquad A_{12} = -2$$
$$A_{21} = -3 \qquad A_{22} = 1$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}\left(\text{Adj}(A)\right)^t$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c.q.c.

2) Halla la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$A_{11} = 5 \qquad A_{12} = -2$$
$$A_{21} = -6 \qquad A_{22} = 3$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}\left(\text{Adj}(A)\right)^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c.q.c.

3) Determina la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists A^{-1}$$

El determinante de la matriz es nulo.

A no tiene inversa

www.yoquieroaprobar.es

4) Calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+3+2-1-0+1=5\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \exists\, A^{-1}$$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1$	$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(-1)=1$	$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$
$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-(-1)=1$	$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$	$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-4)=4$
$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$	$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$	$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7$

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & -7\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 4 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

c.q.c.

EJERCICIOS

1. Calcula, si existe, la matriz inversa de:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 10 & 4\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

2. Determina la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

3. Halla las inversas de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 6\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 6 & -1 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

RECUERDA

$$\exists\, A^{-1} \iff |A|\neq 0$$

$$\nexists\, A^{-1} \iff |A|=0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}\left(A^t\right)$$

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ b) No existe B^{-1} c) $C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

d) No existe D^{-1} e) $E^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

2. a) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-16 & 6 & -8\\ -3 & 1 & -1\\ 12 & -4 & 6\end{pmatrix}$ b) No existe B^{-1} c) $C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $D^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}0 & 0 & -5\\ 2 & -6 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ e) $E^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

3. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 13\\ 1 & -2 & -4\\ 2 & -3 & -8\end{pmatrix}$ c) $C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$

d) No existe D^{-1} e) $E^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

www.yoquieroaprobar.es