CONTINUIDAD DE FUNCIONES

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función ***f* es continua en *a*** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1) Existe *f(a)*, es decir, $a \in Dom\ f$.
2) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es finito.
3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si falla alguna de estas condiciones, diremos que la función es **discontinua en *a***.

$$f \text{ continua en } a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ \exists f(a) \\ 2)\ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \quad \text{(finito)} \\ 3)\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

CONTINUIDAD LATERAL

Una función ***f* es continua por la izquierda en *a*** si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Una función ***f* es continua por la derecha en *a*** si y sólo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Teorema

Una función es continua en un punto si y sólo si la función es continua por la izquierda y por la derecha en dicho punto.

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Una función ***f* es continua en un intervalo abierto (*a*, *b*)** si y sólo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo

Una función ***f* es continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*]** si y sólo si:

- *f* es continua en el intervalo abierto (*a*, *b*).
- *f* es continua por la derecha en *a*.
- *f* es continua por la izquierda en *b*.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

1. La función constante $f(x) = k$ es continua en todo su dominio *D*(*f*) = ℝ.
2. La función identidad $f(x) = x$ es continua en todo su dominio *D*(*f*) = ℝ.
3. Si *f* y *g* son funciones continuas en *a*, se cumple:
   a) $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son continuas en *a*.
   b) f / g es continua en *a* si y sólo si *g*(*a*) ≠ 0.
   c) $f^{\,g}$ es continua en a si y sólo si *f*(*a*) > 0.
4. Si *f* es continua en *a* y *g* continua en *f(a)*, entonces $g \circ f$ es continua en *a*.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

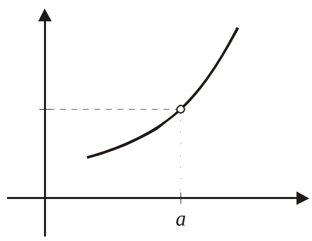
Las siguientes funciones son continuas en su dominio.

1) Las funciones polinómicas $f(x) = P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ son continuas en todo ℝ.
2) Las funciones racionales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en todo ℝ excepto en los puntos que anulan al denominador, o sea, las discontinuidades de una función racional están en las raíces del denominador, *Q*(*x*) = 0.
3) Las funciones irracionales $f(x) = \sqrt[n]{x}$ son continuas en (0, +∞) si *n* es par y en ℝ si *n* es impar.
4) Las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con a >0 y a ≠ 1, son continuas en ℝ.
5) Las funciones logarítmicas $f(x) = log_a x$, con a >0 y a ≠ 1, son continuas en (0, +∞).
6) Las funciones trigonométricas seno y coseno, $f(x) = sen\, x$ y $g(x) = cos\, x$, son continuas en ℝ, y la función tangente $h(x) = tg\ x$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi,\ \forall k \in Z \right\}$. Los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ son los puntos de discontinuidad de la función tangente.
7) Las funciones definidas a intervalos pueden presentar discontinuidades en los extremos de los intervalos.

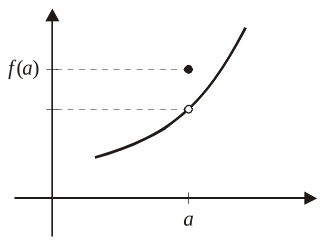
TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Si *f* no es continua en *a* puede ser debido a una de las siguientes causas:

1) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y es finito, pero o no existe *f(a)* o si existe no coincide con el valor del límite. En este caso diremos que ***f*** tiene una **discontinuidad evitable** en ***a***.



$\exists \lim_{x\to a} f(x)$ y $\nexists f(a)$



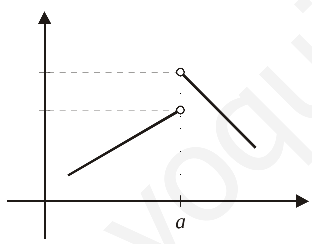
$\exists \lim_{x\to a} f(x),\ \exists f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

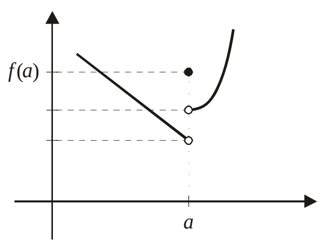
2) Existen los límites laterales y son finitos, pero distintos. Diremos, en tal caso, que ***f*** tiene una **discontinuidad de salto finito** en ***a***.

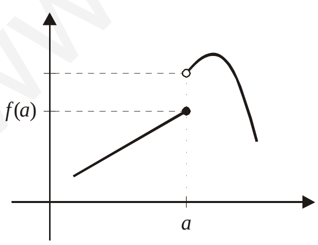
$$\exists \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ (finito)} \quad \text{y} \quad \exists \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ (finito)}$$

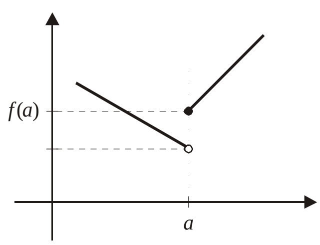
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$\text{Salto en a } = \left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right|$$



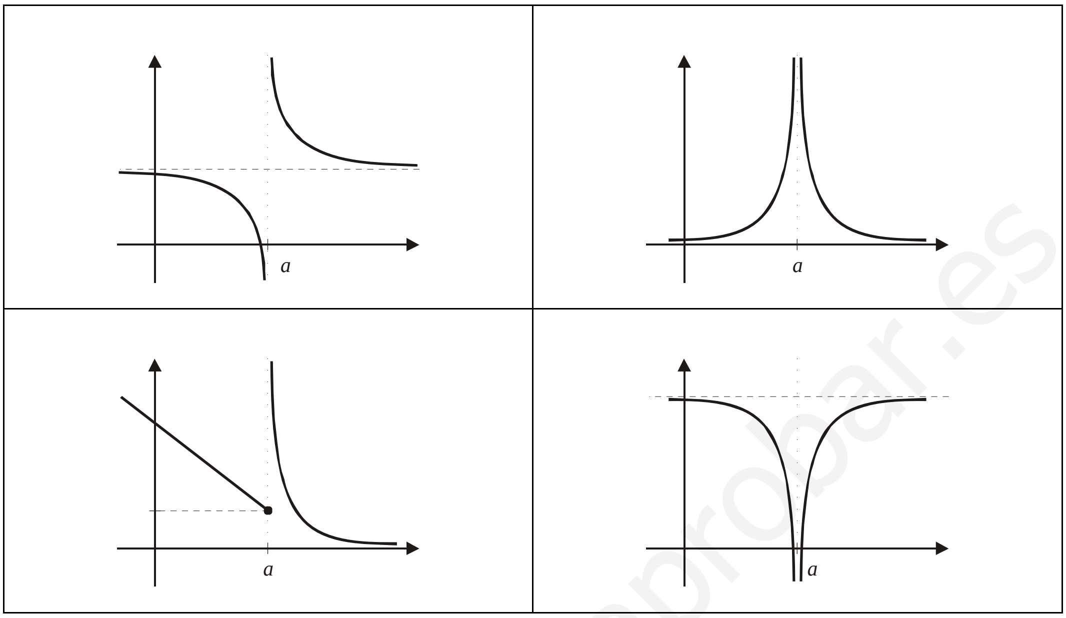






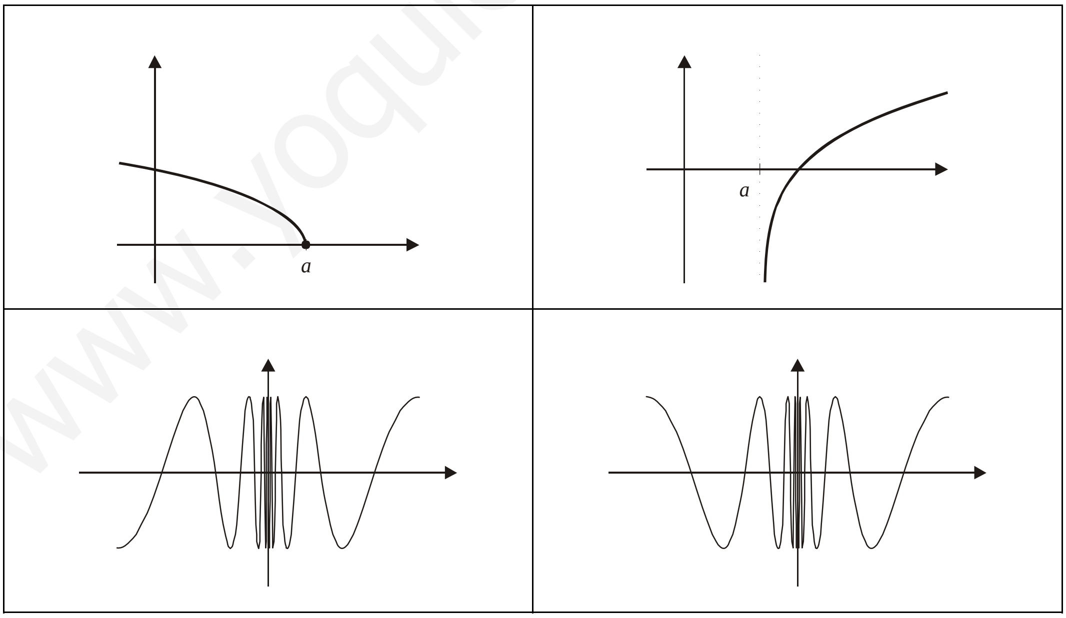
3) Los límites laterales existen, pero, al menos, uno de ellos es infinito (+∞ ó -∞). En este caso diremos que la función ***f*** tiene una **discontinuidad de salto infinito** en ***a***.

$$\left(\exists \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{y} \quad \exists \lim_{x\to a^+} f(x) \right) \quad \text{y} \quad \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \right)$$



4) Alguno de los límites laterales en *a* no existe. Diremos entonces que ***f*** tiene una **discontinuidad esencial** en ***a***.

$$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{ó} \quad \nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$$



TEOREMAS RELATIVOS A LA CONTINUIDAD

Teorema de conservación del signo

Si una función f es continua en un punto a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a, en el que la función f tiene el mismo signo que $f(a)$.

Teorema de Bolzano

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Una de las aplicaciones más importantes del teorema de Bolzano es la determinación de ceros de funciones y raíces de ecuaciones.

Teorema de los valores intermedios

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, para cualquier valor d comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Teorema de Weierstrass

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$. Es decir, existen dos valores c y d pertenecientes a $[a, b]$ tales que para todo $x \in [a, b]$ se cumple que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.
$m = f(c)$ y $M = f(d)$ serán, respectivamente, el mínimo y el máximo absolutos en $[a, b]$.

Teorema de acotación

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces $f([a, b]) = [m, M]$. Por lo tanto, la función f está acotada en $[a, b]$: $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$.

Teorema

Si f es una función continua en $[a, b]$ y, además, f es creciente o decreciente en $[a, b]$, f alcanza el máximo y el mínimo absolutos en los extremos del intervalo.

Teorema de continuidad de la función recíproca.

Si una función f es continua e inyectiva en un intervalo I, entonces:

a) f es estrictamente creciente o decreciente en I.
b) f^{-1} es continua y estrictamente creciente o decreciente en $f(I)$, según que f sea estrictamente creciente o decreciente en I.