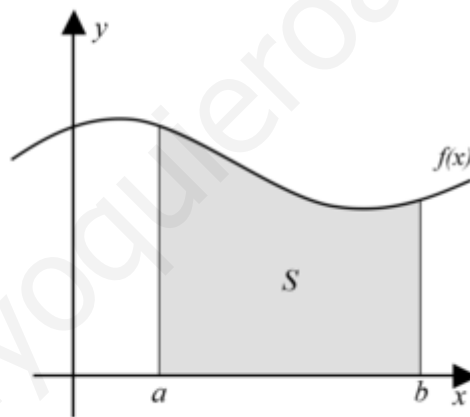


INTEGRAL DEFINIDA

APLICACIÓN al CÁLCULO de ÁREAS



MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

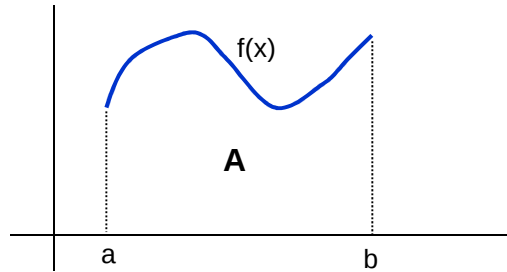
Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas



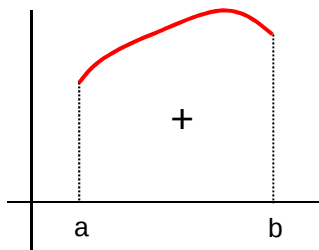
I) CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA (ver págs. 371 y 372 del libro de ed. Anaya)

DEF: $\int_a^b f(x) dx$ = área del recinto limitado por la curva $f(x)$, el eje x , y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$

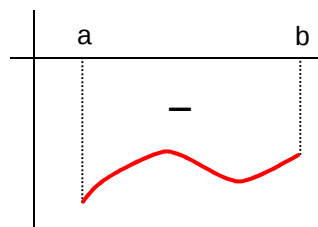
Gráficamente, coincide con el área A del dibujo¹:



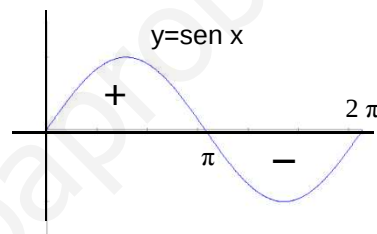
Signo de la integral definida: Hay 3 posibilidades:



Cuando la curva está por encima del eje x , el área es positiva (lógico pues $f(x) > 0$ en ese caso).



Si está por debajo, entonces la integral definida es negativa (ya que entonces $f(x) < 0$)



p.ej. $\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = 0$

¿Cómo se calcula?: Mediante la **REGLA DE BARROW**²: se trata de hallar una primitiva $F(x)$ mediante los procedimientos del tema anterior, y a continuación valorarla entre los extremos a y b :

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos justificativos: (ver más ejemplos justificativos en págs. 366 y 367 del libro de ed. Anaya)

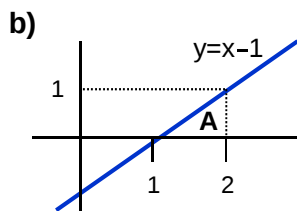


$$A = \int_1^3 2 \, dx =$$

(Puede comprobarse el resultado gráficamente)

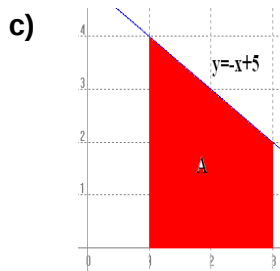
¹ La definición anterior puede entenderse intuitivamente si pensamos que $f(x) \cdot dx$ representaría el área de un rectángulo infinitesimal de altura $f(x)$ y anchura tan pequeña como queramos dx , por lo que la integral definida vendría a ser la suma de esos infinitos pequeños rectángulos. Para una comprensión más rigurosa de este hecho véanse las págs. 364 y 365 del libro de ed. Anaya.

² Isaac Barrow (1630-1677), eminente matemático inglés y profesor de Isaac Newton en Cambridge. Ver la justificación de esta regla, que se conoce como 2º Teorema fundamental del cálculo integral, en pág. 364 del libro de ed. Anaya.



$$A = \int_1^2 (x - 1) dx =$$

Compruébese que el área A del triángulo es efectivamente la calculada:



$$A = \int_1^3 (-x + 5) dx =$$

Podemos comprobar que coincide con área A del trapecio, la cual viene dada por:

$$A = \frac{B+b}{2}h =$$

Nótese, por consiguiente, que la integral definida tiene una utilísima aplicación al cálculo de áreas.

Ejercicio: Comprobar por Barrow que $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

Ejercicios PAEG: jun 2009 2B, sept 2008 2A, jun 2008 2B

Ejercicios final tema: 1 a 8

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 371: 2; pág. 372: 1 y 2; pág. 381: 1 a 3

II) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA (Ver estas y más propiedades en pág. 368 libro ed. Anaya)

- 1) Si $c \in [a, b]$: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ Esta propiedad nos será muy útil a la hora de hallar el área de un recinto compuesto como suma de dos o más subáreas. Su justificación es trivial, tanto gráficamente como aplicando la regla de Barrow.

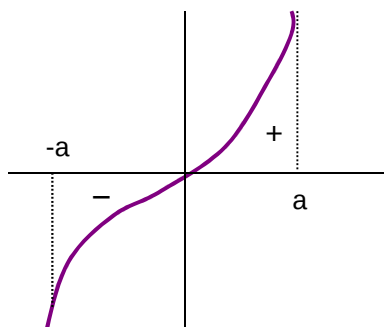
- 2) $\int_a^a f = 0$ Obvio y fácil de probar.

- 3) $\int_a^b f = -\int_b^a f$ Puede demostrarse aplicando la regla de Barrow.

- 4) $\int_a^b f \pm \int_a^b g = \int_a^b f \pm g$ Es una consecuencia inmediata de una propiedad análoga de la integral indefinida. Una aplicación de esto es el **ejercicio 9** del final del tema.

5) $\int_{-a}^a \text{función impar} = 0$

La interpretación gráfica es obvia:



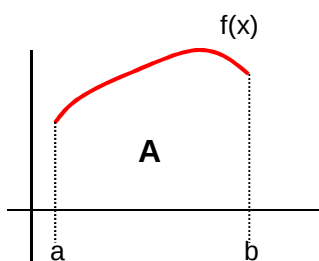
Las dos áreas son iguales pero de signo opuesto, por lo que su suma es cero.

Por ejemplo, podemos concluir que $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0$ sin necesidad de hacer la integral.

III) ÁREA BAJO f (ver pág. 373 del libro de ed. Anaya)

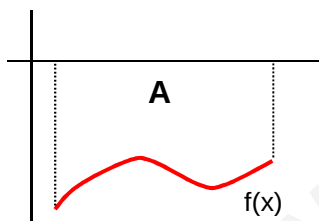
En cada uno de los tres casos vistos en el apartado I habrá que proceder de forma distinta:

1) f es positiva:



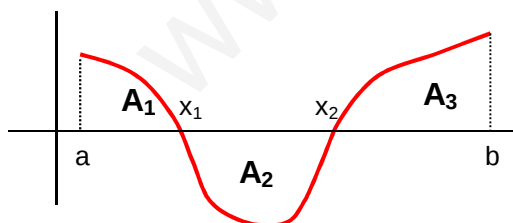
$$A = \int_a^b f(x) \, dx \quad (\text{por la propia definición de la integral definida})$$

2) f es negativa:



$$A = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \quad \text{o bien:} \quad A = - \int_a^b f(x) \, dx$$

3) f es positiva y negativa (se alterna):



por la propiedad 1

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^{x_1} f + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \int_{x_2}^b f$$

NOTA: En general **habrá que hallar los puntos en que f(x) corta al eje x** (x_1 y x_2 en el ejemplo anterior) **pues no sabemos de antemano si f(x) cambia de signo**³. También, a veces conviene representar f(x), pues puede formar con respecto al eje x dos o más subáreas (ver p. ej. ejercicio 15 del final del tema)

³ Recordar que para obtener los puntos en que una función corta al eje x hay que resolver la ecuación $f(x)=0$

Ejemplo: Hallar el área limitada por la parábola $y=x^2-4x$ y el eje x (Un esbozo de la gráfica no es obligatorio, pero puede ser útil...)

Nótese que en este ejemplo la integral en sí resulta negativa, pues la parábola está por debajo del eje x , pero el valor absoluto la convierte en **positiva**, como debe ser **por tratarse de un área**.

NOTA: Si nos pidieran el **área respecto al eje y** , entonces intercambiaríamos la x con la y (véase el ejercicio 38), ¡pero no olvidemos que los límites de integración estarán ahora en el eje y ! Todo esto puede comprobarse gráficamente mirando al trasluz la hoja en la que hemos dibujado el recinto.

Ejercicios PAEG: 1B sept 2004, 1A jun 2004, 2B sept 2008, 2B sept 2009

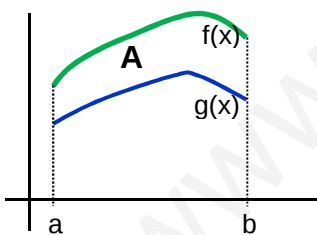
Ejercicios final tema: 10 a 16

Ejercicios libro ed. Anaya (los resaltados en negrita se recomiendan): pág. 374: 1; pág. 381: 4 a 8, 22, **30** y 42 (se recomienda ver también los ejercicios resueltos: 1 pág. 374 y 2, 3 y 4 pág. 376)

IV) ÁREA LIMITADA POR DOS CURVAS (ver pág. 373 del libro de texto de ed. Anaya)

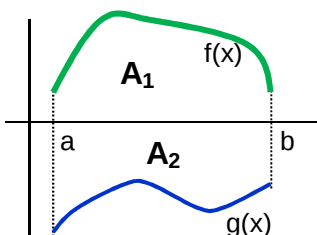
Existen tres posibilidades:

1) Ambas curvas son positivas⁴ y no se cortan:



$$A = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$$

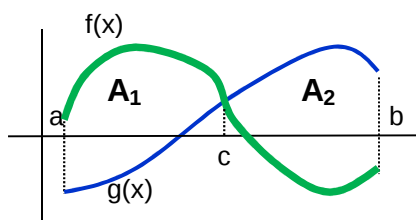
2) Ambas curvas son de distinto signo y no se cortan:



$$A_T = A_1 + A_2 = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$$

⁴ Nótese que llegaríamos a la misma fórmula si ambas curvas fueran negativas, es decir, situadas bajo el eje X

3) Ambas curvas se cortan:



En este caso hay que hallar los puntos de corte y separar en varias integrales; por ejemplo, en el caso de la figura:

$$A_T = A_1 + A_2 = \int_a^c (f - g) + \int_c^b (g - f)$$

Como conclusión, en general tendremos que resolver previamente el sistema formado por ambas funciones para hallar el punto o los puntos donde se cortan. Además, conviene dibujar el recinto pues a veces hay que hallar el área pedida como suma de varias subáreas, por dos razones: o bien porque se obtienen dos o más recintos separados (p. ej. ejercicio 26 final tema), o bien porque se obtiene un recinto único delimitado superior e inferiormente por curvas distintas (problemas 35 y ss. final tema, o junio 97 2A).

Ejemplo: Problema 4B sept 97

NOTA: En algunos problemas, una vez dibujado el recinto, convendrá intercambiar la x con la y para hacer lo anterior con respecto al eje y (como en el problema 1B junio 98). Otra solución puede ser subdividir el recinto en sectores.

Ejercicios final tema: 18 y ss.

Ejercicios PAEG (por orden de complejidad):

- Jun 2012 2A, jun 2001 1A, jun 2003 3A, jun 99 1B, sept 99 4B, sept 2007 2B, jun 2007 2B, sept 2006 2B, jun 2006 2B, jun 2010 2A ← área entre rectas y/o parábolas
- sept 98 2A, jun 2002 3A ← hallar previamente la recta tangente
- sept 2000 1A, sept 2002 4A ← valor absoluto
- sept 2012 2B, jun 2011 2B, jun 2000 4A, Jun 97 2A, jun 98 1B, sept 98 2A ← varios recintos
- sept 2011 2B, jun 2013 2ª (+ recta tangente) ← con parámetro

Ejercicios libro: pág. 374: 2; pág. 381 y ss.: 9 a **15**, **18**, 21, **24**, 31, 33, 34 y **43** (cálculo de áreas)

pág. 382 y ss.: 23, 25, 26, 27, 35 a 41 y 68 (teórico-prácticos, con parámetros, etc.)

(se recomienda ver también los ejercicios resueltos: 2 pág. 374 y 5 a 8 pág. 377 y ss.)

■ Integral definida:

1. Enunciar la regla de Barrow. Calcular: $\int_1^3 |x| dx$ (Soluc: 4)
2. Calcular: $\int_0^1 x \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$ $\left(\text{Soluc: } \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^3} - a^3}{3b^2} \right)$
3. Calcular: $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \operatorname{sen} x^2 dx$ (Soluc: 1/2)
4. Calcular: $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$ (Soluc: $\pi/4 - 1/2$)
5. Calcular: $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-2x} dx$ $\left(\text{Soluc: } \frac{3}{4} - \frac{7}{4e^2} \right)$
6. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ $\left(\text{Soluc: } \ln \frac{4}{3} \right)$
7. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$ $\left(\text{Soluc: } \ln \sqrt[3]{2} + \frac{\pi \sqrt{3}}{9} \right)$
8. Hallar el valor de $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x dx$ sin necesidad de integrar, **razonadamente**. (Soluc: 0)
9. Sean: $a = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}^2 x dx$ $b = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx$
Calcular **a+b** y **a-b** y obtener los valores de **a** y **b**. (Soluc: $a=(\pi^2+4)/16$; $b=(\pi^2-4)/16$)

■ Área bajo una curva:

10. Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2 + 4}$, las rectas $x=2$, $x=2\sqrt{3}$ y el eje x. (Soluc: $\pi/24 u^2$)
11. Hallar los valores de a, b y c en el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ de forma que $P(1)=4$, $P'(1)=8$ y $P(2)+15P(0)=0$
Representar la función y calcular el área finita comprendida entre la curva y el eje x.
(Soluc: $P(x)=3x^2+2x-1$; $32/27 u^2$)
12. Calcular el área limitada por la curva $y = \ln^2 x$, las rectas $x=1$, $x=e^2$ y el eje x. (Soluc: $2e^2 - 2 u^2$)
13. Calcular el área limitada por la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ y las rectas $y=0$, $x=0$, $x=\sqrt{2}/2$. (Soluc: $(\pi+2)/8 u^2$)
14. Calcular el área comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los

puntos de inflexión de dicha curva. (Soluc: $\pi/3$ u²)

15. Dada la función $y = \frac{x}{x^2 + 2}$, calcular el área encerrada por la curva, el eje x y las rectas perpendiculares al eje x que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada. (Soluc: $\ln 2$ u²)

16. Considerar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$. Representarla y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^1 f(x) dx$ b) $\int_1^4 f(x) dx$ c) $\int_{-2}^4 f(x) dx$

17. Considérese la función

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

y sea $F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad 1 \leq x \leq 2$

a) Hallar una expresión explícita para F(x) (Soluc: $F(x)=x-1$)

b) Dibujar F(x)

■ Área entre dos curvas:

18. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las líneas $y=x$, $y=x(6-x)$ (Soluc: $125/6$ u²)

19. Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas $y=x^2$, $y=-2x^2+3$ (Soluc: 4 u²)

20. Dibujar la curva $y=x^2-3x-10$, y calcular el área del recinto limitado por esta curva y la recta $y=2x-4$ (Soluc: $343/6$ u²)

21. Hallar el área de la región limitada, para $x>0$, por $y=x^3$ y la recta $y=8x$ (Soluc: 16 u²)

22. Calcular el área comprendida entre las curvas $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4+4x^3-8x^2+4x-1$, sin necesidad de representarlas. (Soluc. $37/12$ u²)

23. Sean $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1-x|$. a) Dibujar sus gráficas en los mismos ejes y hallar sus puntos de intersección. b) Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas. (Soluc. $13/24$ u²)

24. Calcular el área de la región del semiplano $y \geq 0$ limitada por la curva $y=\ln x$, su tangente en $x=1$ y la recta $x=3$. (Soluc: la tangente es $y=x-1$; el área es $4-3\ln 3$ u²)

25. Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ (Soluc: $1/3$ u²)

26. Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^3$ e $y=\sqrt[3]{x}$ (Soluc: 1 u²)

27. Hallar el área de la región acotada del plano limitada por las parábolas $y=x^2-x$, $y^2=2x$. (Soluc: 2 u²)

28. Calcular el área de la región situada entre la recta $x=1$ y las curvas $y=x^2$ e $y=8/x$ (Soluc: $8\ln 2 - 7/3 u^2$)
29. Hallar el área del recinto acotado por las curvas $y=x^3$, $y=16/x$ y la recta $x=1$ (Soluc: $16\ln 2 - 15/4 u^2$)
30. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y=e^{3x}$ y la cuerda de la curva que une el punto de abscisa $x=0$ con el de abscisa $x=1$ (Soluc: $(e^3+5)/6 u^2$)
31. Sea $a>0$. Hallar, en función de a , el área limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=ax$ (Soluc: $a^3/6 u^2$)
32. Se considera la función $y = \frac{2x^2}{9-x^2}$
- Dibujar su gráfica indicando su dominio de definición.
 - Calcular el área de la región acotada limitada por la curva anterior y la recta $y=1$ (Soluc: $6[\sqrt{3} + \ln(2-\sqrt{3})] u^2$)
33. Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva $y=x^2$ y las rectas $y=x$, $x=0$, $x=2$ (Soluc: $1 u^2$)
34. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=x^{1/3}$, entre $x=-1$ y $x=1$ (Soluc: $3/2 u^2$)

Ejercicios con varios recintos (más elaborados):

35. Calcular el área del recinto limitado por las rectas $y=x$, $y=2x$ y la parábola $y=x^2$ (Soluc: $7/6 u^2$)
36. Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\ln x$, el eje x y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x=e$. (Soluc: $(e-2)/2 u^2$)
37. Se considera la función $y=x^{3/2}$
- Dibujar la gráfica.
 - Calcular la recta tangente en $x=1$ a la gráfica dibujada y calcular el área limitada por dicha gráfica, la tangente y el eje x . (Soluc: tangente: $3x-2y-1=0$; área: $1/15 u^2$)
38. Hallar el área limitada por la curva $x=16-y^2$ y el eje y (Soluc: $256/3 u^2$)
39. Hallar el valor de la constante b para que la función $f(x)=x^3-2x^2+bx$ tenga por tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular entonces el área de la región limitada por esa tangente y la gráfica de f . (Soluc: $b=1$; $4/3 u^2$)
40. Hallar el valor del parámetro a para que el área limitada por las gráficas de las funciones $f_1(x)=\sqrt{ax}$ y $f_2(x)=x^2/a$ en el primer cuadrante sea igual a tres unidades. (Soluc: $a=3$)
41. Sabiendo que el área comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=bx$ es 1, calcular el valor de b . (Soluc: $b = 1/\sqrt[3]{3}$)
42. Calcular el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y=x^2+ax$ y la recta $y+x=0$ es 36 (Soluc: $a=5$)