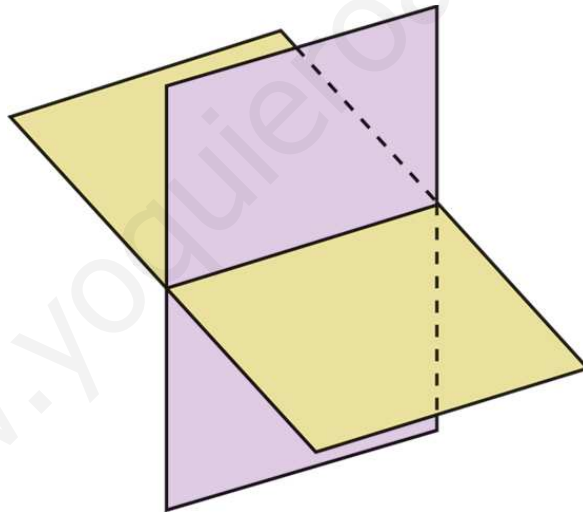


RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

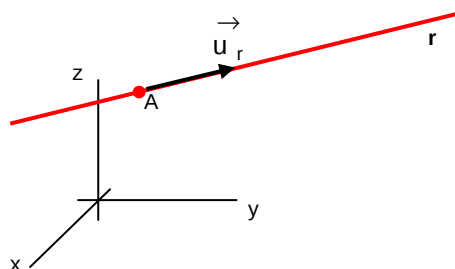


MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

**Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas**

I. ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y CONTINUA DE LA RECTA ¹

Determinación principal de una recta:



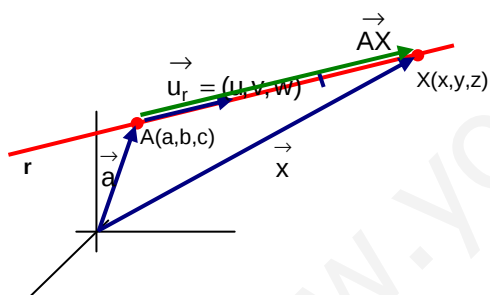
Es evidente que una recta r , tanto en el plano como en el espacio (ver dibujo), va a quedar determinada por un punto cualquiera de ella ($A \in r$) y un vector director, es decir, que tenga su misma dirección ($\vec{u}_r \neq \vec{0}$). Ambos elementos, punto y vector director, constituyen la **determinación principal** de la recta. En la práctica, escribiremos:

$$r = \{A, \vec{u}_r\}$$

¿Por qué utilizamos el calificativo "principal"? Porque, obviamente, no es la única forma de determinar una recta. Existen infinitas formas: por ejemplo, es evidente que sólo existe una recta que pase por dos puntos, o una recta paralela a otra dada y que pase por un punto exterior a ésta, o perpendicular a un plano y que pase por un punto dado, etc. Ahora bien, nótese que siempre nos darán dos datos para determinar una recta.

Ejercicio final tema: 1

Ecuación de la recta:



es decir:

Considerar la recta r de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}_r\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in r$, es decir, un punto cualquiera de r , que puede variar. Es evidente que si X está en la recta, entonces el vector $\vec{AX}$ será proporcional a $\vec{u}_r$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\vec{AX}$ es aproximadamente el triple que $\vec{u}_r$),

$$X \in r \Rightarrow \vec{AX} = \lambda \vec{u}_r \quad (1)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ se llama **parámetro**, y va a jugar un papel fundamental en todo el tema. Dando valores positivos y negativos a λ se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando la recta².

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{AX} \quad (2)$$

¹ Para reforzar todo lo tratado en este apartado, puede consultarse la pág. 157 del libro de ed. Anaya.

² Esto puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace, muy interesante y recomendable:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/Representacion_de_rectas.htm

Reemplazando $\vec{AX}$ de (1) en (2) obtenemos la **ecuación vectorial** de la recta:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}_r \quad (\text{donde } \lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{EC. VECTORIAL} \quad (3)$$

En la práctica, la ecuación vectorial no es útil en sí misma, pero sí si la descomponemos en sus tres coordenadas, obteniendo así las **ecuaciones paramétricas**:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \lambda u \\ y &= b + \lambda v \\ z &= c + \lambda w \end{aligned} \right\} \quad \text{EC. PARAMÉTRICAS} \quad (4)$$

Observaciones: 1ª) Dando valores a $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtienen los infinitos puntos (x,y,z) de la recta.

2ª) Y viceversa, a un mismo punto (x,y,z) le tiene que corresponder el mismo λ para las tres ecuaciones.

3ª) Desventaja: La forma paramétrica de una recta no es única, es decir, una misma recta tiene infinitas formas de ecuaciones paramétricas³, todas ellas válidas.

Si despejamos λ de las tres ecuaciones e igualamos, obtenemos la **ecuación continua**:

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w} \quad \text{EC. CONTINUA} \quad (5)$$

Observaciones: 1ª) Todo punto (x,y,z) que verifique las tres igualdades $\in r$, y viceversa.

2ª) Desventaja: La forma continua de una recta no es única, es decir, una misma recta tiene infinitas formas de ecuación continua, todas ellas válidas.

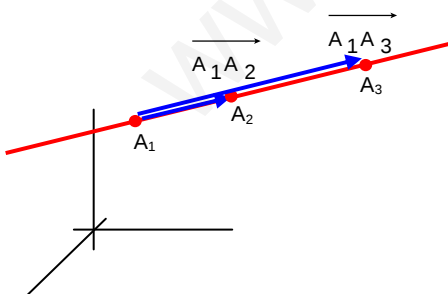
3ª) Si algún denominador es 0, la recta no se puede poner en continua sino, como veremos en el apartado III, en implícitas.

Ejercicios final tema: 2 a 6

Ejercicios PAEG: 1B sept 2002

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 176 y ss.: 10 y 11

Condición para que 3 (o más) puntos estén alineados⁴:



Como puede verse en el dibujo adjunto, es obvio que, para que tres puntos A_1 , A_2 y A_3 estén alineados, es condición necesaria y suficiente que al formar dos vectores cualesquiera con ellos⁵ –por ejemplo, $\vec{A_1A_2}$ y $\vec{A_1A_3}$ –, estos sean proporcionales. Si colocamos ambos vectores formando una matriz 2x3, ello querrá decir que su rango será 1:

³ Ello es debido a que, obviamente, una recta tiene infinitos posibles vectores directores, y también podemos sustituir infinitos puntos (a,b,c) en las ecuaciones paramétricas.

⁴ Ver pág. 155 del libro de ed. Anaya.

⁵ También valdría el par $\vec{A_1A_2}$ y $\vec{A_2A_3}$

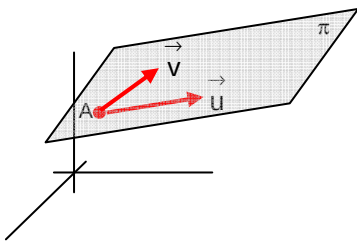
$$A_1, A_2, A_3 \text{ alineados} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_3} \propto \overrightarrow{A_1A_2} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} & \overrightarrow{A_1A_3} \end{pmatrix} = 1 \quad (6)$$

Ejercicio final tema: 7

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 176: 2 y 8 (ptos. alineados, sin parámetro); pág. 156: 1; pág. 176: 3 (con parámetro)

II. ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y GENERAL DEL PLANO ⁶

Determinación principal del plano:



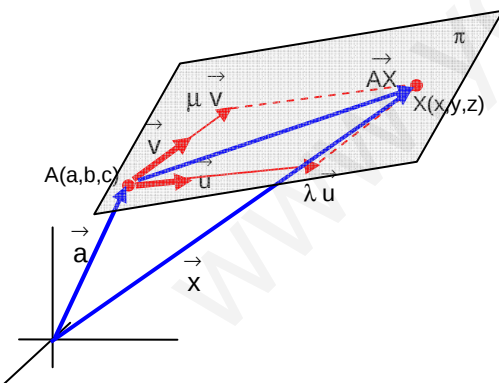
Como puede verse en el dibujo, un plano va a quedar determinado, por ejemplo, por un punto cualquiera sobre él ($A \in \pi$) y dos vectores no nulos y no proporcionales paralelos a él ($\vec{u}$ y $\vec{v}$), que llamaremos vectores direccionales del plano. Esta terna constituye la **determinación principal** del plano. En la práctica, escribiremos:

$$\pi = \{A, \vec{u}, \vec{v}\}$$

Al igual que en el caso de la recta, obviamente existen infinitas formas de determinar un plano: la más habitual es considerar el plano que pasa por tres puntos no alineados, o un plano paralelo a otro y que pase por un punto exterior a éste, o perpendicular a una recta y que pase por un punto dado, etc.

Ejercicio final tema: 8

Ecuación del plano:



Considerar el plano π de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in \pi$, es decir, un punto cualquiera de π , que puede variar. Es evidente que si X está en el plano, entonces el vector $\vec{AX}$ será combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\vec{AX}$ es aproximadamente $3\vec{u} + 2\vec{v}$), es decir:

$$X \in \pi \Rightarrow \vec{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad (7)$$

donde λ y $\mu \in \mathbb{R}$ son parámetros. Dando valores a ambos parámetros se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando el plano⁷.

⁶ Para reforzar todo lo tratado en este apartado, puede consultarse la pág. 164 del libro de ed. Anaya.

⁷ Esto también puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/representacion_de_planos.htm

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{AX} \quad (8)$$

Reemplazando $\vec{AX}$ de (7) en (8) obtenemos la **ecuación vectorial** del plano:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \quad (\text{donde } \lambda, \mu \in \mathbb{R}) \quad \text{EC. VECTORIAL} \quad (9)$$

En la práctica, también esta ecuación vectorial no es útil en sí misma, pero sí si la desglosamos en sus tres componentes, obteniendo así las **ecuaciones paramétricas** del plano; para ellos, suponemos $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \lambda u_x + \mu v_x \\ y &= b + \lambda u_y + \mu v_y \\ z &= c + \lambda u_z + \mu v_z \end{aligned} \right\} \quad \text{EC. PARAMÉTRICAS} \quad (10)$$

Observaciones: 1ª) Dando valores a λ y $\mu \in \mathbb{R}$ se obtienen los infinitos puntos (x,y,z) que constituyen el plano.

2ª) Y viceversa, a un mismo punto (x,y,z) le tiene que corresponder los mismos λ y μ en las tres ecuaciones.

3ª) Desventaja: Un mismo plano puede tener infinitas formas paramétricas, todas ellas igualmente válidas.

Por otra parte, nótese que (7) nos indica que $\vec{AX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son combinación lineal, es decir, si formamos el determinante de orden 3 formado por los tres vectores, éste valdrá cero:

$$\vec{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Rightarrow \det[\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

Y, desarrollando el determinante, y simplificando, siempre vamos a obtener una expresión del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{EC. GRAL. o IMPLÍCITA} \quad (12)$$

que se llama **ecuación general** o **implícita** del plano, y es la forma más comúnmente utilizada para expresar un plano.

Observaciones: 1ª) Los infinitos puntos (x,y,z) que forman el plano han de verificar la igualdad anterior, y viceversa: si un punto (x,y,z) verifica la igualdad, entonces $\in \pi$ (y, obviamente, en caso contrario, no pertenecerá).

2ª) Ventaja: La forma general o implícita es única (salvo simplificación de sus coeficientes).

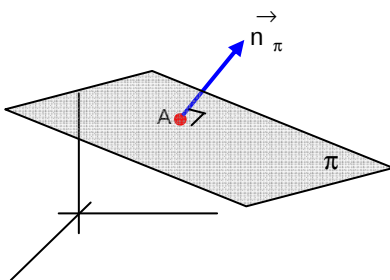
3ª) Veremos en el próximo subapartado que los coeficientes (A,B,C) representan las componentes de un vector $\perp \pi$, al que designaremos como $\vec{n}_\pi$, llamado **vector normal** del plano π .

Ejercicios final tema: 9 a 16

Ejercicios PAEG: 2A jun 99; 4B jun 2004 $\leftrightarrow$ 4A sept 97; 4A jun 2012 (+área triángulo+volumen tetraedro+optimización)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 165: 1; págs. 177 y ss.: 23 y 32 (ec. gral. del plano); **pág. 169: 1 y 2** (dibujar rectas y planos); págs. 177 y ss.: 20, **25, 26**, 29, **34, 35**, 43 y 46; pág. 185: 5

Vector normal del plano ($\vec{n}_\pi$)⁸:



Como puede verse en el dibujo adjunto, otra determinación muy habitual de un plano es dar un punto cualquiera sobre él ($A \in \pi$) y un vector $\vec{n}_\pi$ perpendicular al plano:

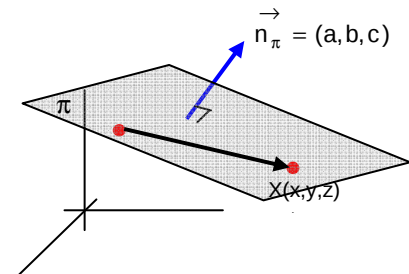
$$\pi = \left\{ A, \vec{n}_\pi \right\} \quad \text{Determinación normal del plano}$$

A continuación, vamos a probar algo que ya hemos adelantado en el subapartado anterior: **«Los coeficientes a, b y c de la ecuación general o implícita del plano, $ax+by+cz+d=0$, son las componentes de un vector $\perp$ a dicho plano».**

Dem:

Supongamos que nos dan la determinación normal del plano, es decir, nos dan:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (a, b, c) \\ A(x_0, y_0, z_0) \end{array} \right\}$$



como puede verse en el dibujo. Nótese que el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ es fijo, y supongamos un punto genérico $X(x, y, z)$ del plano, es decir, un punto que puede variar a lo largo del plano. Si consideramos el vector que une ambos puntos, es decir, $\vec{AX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, es evidente que dicho vector será $\perp$ a $\vec{n}_\pi$, con lo cual su producto escalar será nulo:

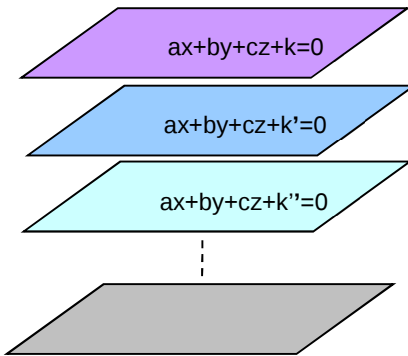
$$\vec{AX} \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{AX} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

Efectuamos el producto escalar, y, para simplificar, renombramos la cantidad constante $ax_0 - by_0 - cz_0$ como d:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d = 0$$

es decir, obtenemos la ecuación general o implícita del plano. (C.Q.D)

⁸ Ver pág. 165 del libro de ed. Anaya.



Consecuencia: Familia o Haz de planos paralelos

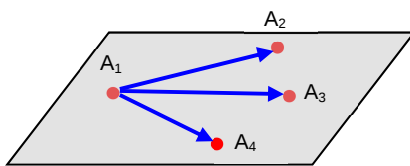
«La expresión $ax+by+cz+K=0$ representa una haz de infinitos planos, todos ellos paralelos, los cuales se obtienen dando valores a K »

Ejercicios final tema: 17 a 22

Ejercicios PAEG: 3B jun 2002; 4A sept 97; 3B jun 2002; 4B jun 2010

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 177 y ss.: 18, 21, 37, 41, 45 y 52; pág. 184: 1 a 4; págs. 206 y ss.: 31, 32, 33, 36, 40 y 62

Condición para que 4 puntos (o más) sean coplanarios:



Supongamos cuatro puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 no alineados⁹. Si además están sobre el mismo plano, es obvio que al formar tres vectores cualesquiera con ellos –por ejemplo, $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$ y $\vec{A_1A_4}$ (ver dibujo)¹⁰–, estos serán combinación lineal. Si colocamos los tres vectores formando una matriz 3×3 , ello querrá decir que su rango será¹¹ exactamente 2:

$$A_1, A_2, A_3 \text{ y } A_4 \text{ coplanarios} \Leftrightarrow \vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_3} \text{ y } \vec{A_1A_4} \text{ son comb. lin.} \Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} \vec{A_1A_2} & \vec{A_1A_3} & \vec{A_1A_4} \end{pmatrix} = 2 \quad (13)$$

o lo que es igual, que su determinante será cero.

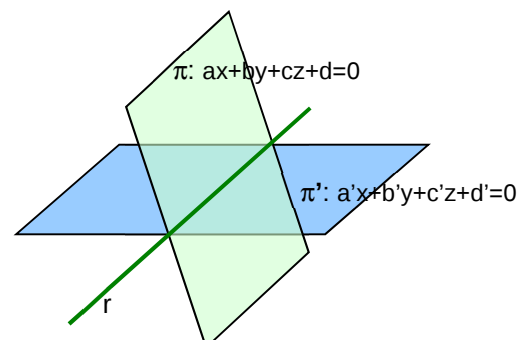
Ejercicios final tema: 23 y 24

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 177 y ss.: 27 (4 ptos. coplanarios, sin parámetro) y 36 (con parámetro)

III. ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LA RECTA (RECTA $\cap$ DE 2 PLANOS)¹²

Si dos planos π y π' son no paralelos, es decir, secantes, es evidente que van a definir una recta r , lo cual se conoce como **ecuación o forma implícita de la recta r** :

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{EC. IMPLÍCITA de la recta} \quad (14)$$



De nuevo, la desventaja de esta forma es que no es única: hay infinitas parejas de planos que definen la misma recta.

⁹ El caso en el que tres o más puntos están alineados ya se vio en el apdo. I.

¹⁰ Naturalmente, también valdrían otras ternas, como por ejemplo $\vec{A_2A_1}$, $\vec{A_2A_3}$ y $\vec{A_2A_4}$

¹¹ Nótese que no puede ser rango 1, porque ello supondría que están alineados.

¹² Ver págs. 158 y 185 del libro de ed. Anaya.

Ejemplo: Dados los planos $\begin{cases} 2x + y - 5z = -4 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$ se pide:

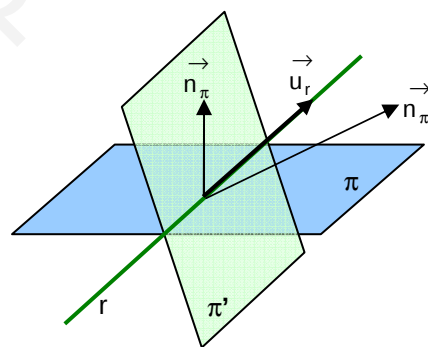
- Comprobar que son no paralelos, es decir, determinan una recta.
- Resolver el sistema para hallar así la ecuación paramétrica de dicha recta.

Ejercicio final tema: 25

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 177 y ss.: 16 y 58

Observaciones: 1ª) Si lo único que queremos de una recta expresada en implícita es extraer un posible vector director $\vec{u}_r$ de ella, entonces, viendo el dibujo adjunto, es evidente que bastará con hacer el siguiente producto vectorial:

$$\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_{\pi'} \quad (15)$$



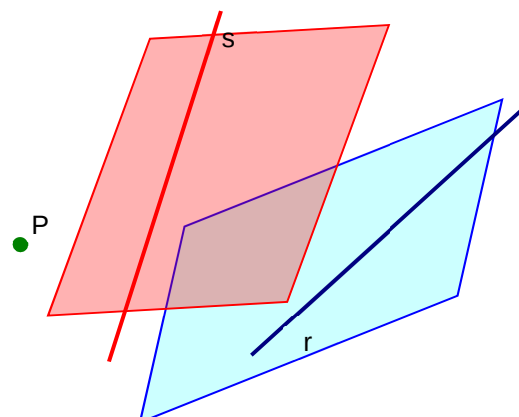
- Por otra parte, si lo que queremos es simplemente un punto cualquiera de la recta en forma implícita, podemos obtenerlo por tanteo, es decir, sin necesidad de resolver el sistema formado por dos planos, como en el **Ejercicio final tema: 24**

Ejercicios final tema: 26 a 29

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 159: 2 y 3; págs. 177 y ss.: 38 y 51; pág. 185: 6

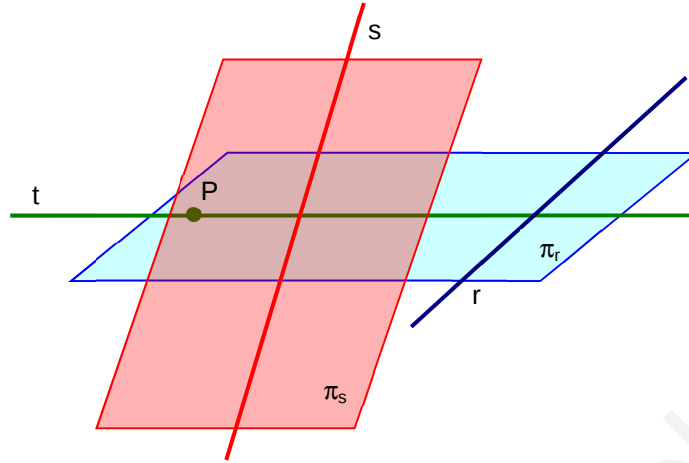
Recta que se apoya en dos rectas que se cruzan y en un punto:

Supongamos que nos dan dos rectas r y s que se cruzan en el espacio y un punto P exterior a ellas, y nos piden que hallemos la ecuación de la recta que se apoya en r y s y pasa por P . En el dibujo, hemos intentado mostrar que ambas rectas se cruzan trazando sendos planos auxiliares que las contienen.



1^{er} método: Utilizando la forma implícita de la recta:

Se trata de ir girando los planos auxiliares que contienen a ambas rectas de forma que sigan conteniendo a las rectas, pero además ambos pasen por P (es evidente que esto no siempre se podrá hacer, es decir, este problema no siempre tiene solución...):



Entonces, la recta pedida, t , será la intersección de los dos planos, es decir, vendrá dada en forma implícita por:

$$t: \begin{cases} \pi_r: \text{Plano que contiene a } r \text{ y pasa por } P \\ \pi_s: \text{Plano que contiene a } s \text{ y pasa por } P \end{cases}$$

Observaciones: 1^a) Como ya hemos dicho, este problema no siempre va a tener solución.

2^a) Hemos supuesto que las dos rectas se cruzan, pero lo dicho sería igualmente válido para el caso particular en que ambas rectas se corten.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$, y pasa por $P(1,0,2)$

2º método: Utilizando la forma paramétrica y continua de la recta:

- 1º Pasamos r a paramétricas, obteniendo así un punto genérico de r , que, por tanto, dependerá de un parámetro, p. ej. λ
- 2º Pasamos s a paramétricas, obteniendo así un punto genérico de s , que, por tanto, dependerá de un parámetro, p. ej. μ
- 3º Hallamos la recta que pasa por los dos puntos anteriores, en continua. Obtendremos así una expresión que depende de λ y μ
- 4º Descomponemos la expresión anterior en dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, un sistema, que resolvemos, para hallar λ y μ
- 5º Sustituimos esos valores de λ y μ en la forma continua del 3º paso, operamos y simplificamos. De esta forma, la recta pedida la daremos en forma continua.

Ejemplo: Volver a hacer el ejemplo anterior por este método. Comprobar que se obtiene la misma recta.

Ejercicios final tema: 30 a 32 (Recta que se apoya en otras dos y en un punto)
33 a 41 (Rectas y planos en general)
42 a 46 (Áreas y volúmenes)

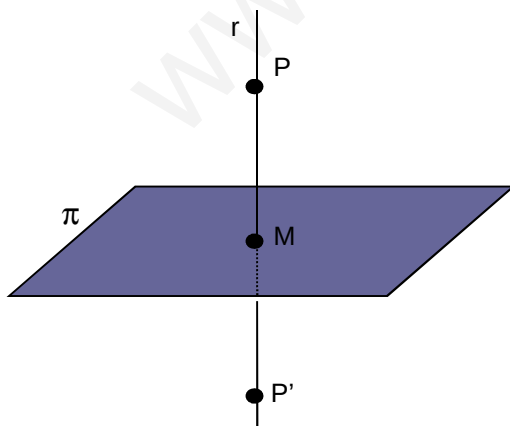
Ejercicios PAEG: 4A sept 2005; 4A jun 97; 4B jun 2009 (Rectas y planos en general)
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 179: 42 y 54 (Rectas y planos en general)
pág. 206 y ss.: 27, 46, 51, 52, 54 y 59 (Áreas y volúmenes)

IV. PROBLEMAS SOBRE PROYECCIONES

IV.1 Punto simétrico respecto a un plano.

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Nos dan el punto P y la ecuación del plano π , y tenemos que hallar P', punto simétrico de P respecto del plano π . Procederemos así:



1º) Hallamos la ecuación paramétrica de la recta $r \perp \pi$ y que pasa por P.

2º) Hallamos el punto M, **proyección ortogonal de P sobre π** , sustituyendo para ello las ecuaciones paramétricas recién obtenidas de r en la ecuación del plano.

3º) Utilizamos la fórmula del punto medio para hallar P':

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2M - P$$

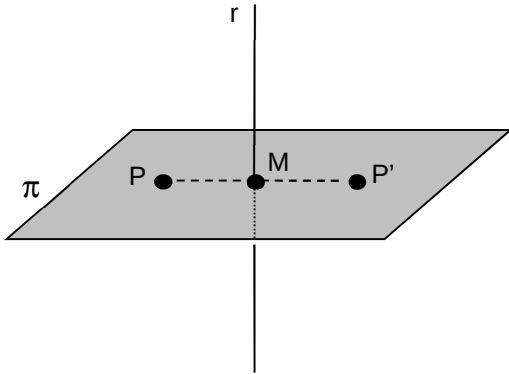
Ver **ejercicio resuelto** 2 pág. 199 del libro de ed. Anaya

Ejercicios final tema: 47 y 48

IV.2) Punto simétrico respecto a una recta.

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Nos dan la recta r y el punto P , y tenemos que hallar el punto simétrico P' respecto de dicha recta. Procederemos así:



1º) Hallamos la ecuación general del plano π que es $\perp$ a r y que contiene a P .

2º) Hallamos el punto M , **proyección ortogonal de P sobre r** , resolviendo para ello el sistema formado por r y π .

3º) Utilizamos la fórmula del punto medio para hallar P' :

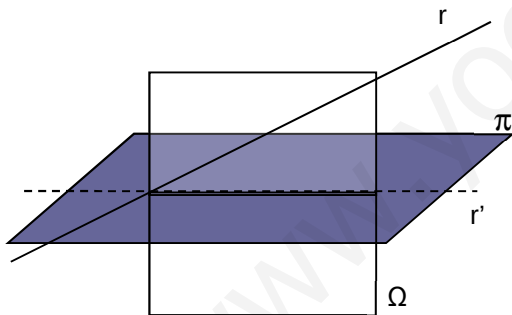
$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2M - P$$

Ver **ejercicio resuelto** 3 pág. 199 del libro de ed. Anaya

Ejercicios final tema: 49 y 50

IV.3) Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Nos dan la recta r y el plano π , y tenemos que hallar r' , proyección de r sobre π .



Para ello, calculamos en primer lugar el plano Ω que contiene a r y es $\perp$ a π . La recta r' será entonces la intersección de dicho plano y π , expresada por tanto en forma implícita:

$$r' = \Omega \cap \pi$$

Ver **ejercicio resuelto** 8 pág. 201 del libro de ed. Anaya

Ejercicios final tema: 51 y 52

Ejercicios PAEG: 4A sept 2012, 4B sept 98; 1B jun 2002; 2B sept 2000; 4B jun 2006 (proyección $\perp$ de P sobre π)
3B jun 2000; 3B jun 2001; 4B sept 2006 (proyección $\perp$ de P sobre r)

1A jun 99 (proyección $\perp$ de r sobre π)

Ejercicios libro ed. Anaya: **págs. 207 y ss.: 44, 47 y 57**

NOTA: En los ejercicios de Geometría se recomienda comenzar, antes de nada, por:

- Imaginarse la situación; podemos ayudarnos, para ello, de bolígrafos (para representar rectas), la mesa o una hoja de papel (planos), una goma de borrar (puntos), etc.
- O bien, **procurar representar gráficamente**, de una forma aproximada, **la situación**. Esto último es lo más recomendable (aunque en la PAEG no se exija...).

A continuación, tendremos que preguntarnos, ¿qué nos piden?:

- **Si nos piden una recta:** Tendremos que **obtener**, a partir de los datos, **un punto de ella y un posible vector director**.
- **Si nos piden un plano:** Tendremos que decidir, en función de los datos, cuál de las dos determinaciones más usuales nos interesa más:
 - **Un punto del plano y un vector normal** $\vec{n}_\pi$
 - **Un punto del plano y dos vectores direccionales.**

Por último, **se recomienda** vivamente **comprobar** que las ecuaciones obtenidas satisfacen los datos y las condiciones del enunciado.

Ecuación de la recta:

1. **Razonar** si las siguientes situaciones pueden ser, o no, una posible determinación de una recta. Puede ser útil un dibujo:
 - a) Recta $r \parallel$ a otra r' y que pasa por un punto P exterior a ésta última.
 - b) Recta $r \perp$ a otra r' y que pasa por un punto P exterior a ésta última.
 - c) Recta r que corta $\perp$ a otra r' y pasa por un punto P exterior a esta última.
 - d) Recta $r \perp$ a un plano π y que pasa por un punto P .
 - e) Recta $r \parallel$ a un plano π y que pasa por un punto P exterior a dicho plano.
 - f) Recta $r \cap$ de dos planos π y π' no paralelos.

(Sol: a) Sí; b) NO; c) Sí; d) Sí; e) NO; f) Sí)
2. Dado el punto $P(-1,1,2)$ y el vector $\vec{u} = (1,3,2)$, se pide:
 - a) Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua.
 - b) Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta.
 - c) Estudiar si los puntos $(-3,-5,-2)$ y $(2,10,6)$ pertenecen a la recta.

3. Dados los puntos $A(1,-2,4)$ y $B(3,2,10)$ se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos $(1,2,3)$ y $(2,1,0)$ pertenecen a la recta. (Soluc: c) NO; NO)
4. Con los datos del ejercicio anterior, hallar otras dos posibles formas paramétricas alternativas, y volver a hacer los apartados b y c.
5. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de los ejes de coordenadas.
6. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices $A(2,3,4)$, $B(1,-1,5)$ y $C(5,5,4)$. Hallar también las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.
(Sol: $M_a: (x-2)/2=(y-3)/-2=(z-4)/1$; $M_b: (x-1)/5=(y+1)/10=(z-5)/-2$; $M_c: (x-5)/7=(y-5)/8=(z-4)/-1$; $G(8/3, 7/3, 13/3)$)
7. (S) Determinar los valores de **m** para que los puntos $A(m,2,-3)$, $B(2,m,1)$ y $C(5,3,-2)$ estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. (Soluc: $m=6$)

Ecuación del plano:

8. Razonar si las siguientes situaciones pueden constituir una posible determinación de un plano. Intentar hacer un dibujo aclaratorio:
 - a) Plano π que contiene a una recta r y a un punto P exterior a ésta.
 - b) Plano π que contiene a una recta r y a un punto P de ésta.
 - c) Plano $\pi \perp$ a una recta r y que pasa por un punto P .
 - d) Plano $\pi //$ a otro π' y que contiene a un punto P exterior a éste último.
 - e) Plano $\pi //$ a una recta r' y que contiene a un punto P exterior a ésta.
 - f) Plano π que contiene a dos rectas r y r' paralelas.
 - g) Plano π que contiene a dos rectas r y r' secantes.
 - h) Plano π que contiene a una recta r y es paralelo a otra r' que se cruza con la anterior (esto es, ambas rectas no se tocan).
 - i) Plano $\pi \perp$ a otro π' y que pasa por dos puntos P y Q .
(Sol: a) Sí; b) NO; c) Sí; d) Sí; e) NO; f) Sí; g) Sí; h) Sí; i) Sí)
9. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por el punto $P(1,2,3)$ y los vectores $\vec{u} = (2,-1,5)$ y $\vec{v} = (3,2,4)$. (Soluc: $2x-y-z+3=0$)
10. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por los puntos $A(2,1,3)$, $B(1,1,1)$ y $C(5,1,8)$.
(Soluc: $y=1$)
11. Dados los puntos $A(5,-1,-1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-2,-3,0)$ se pide:
 - a) Hallar la ecuación paramétrica y general del plano que determinan. (Soluc: $x-2y+3z-4=0$)
 - b) Estudiar si los puntos $(3,1,1)$ y $(1,2,3)$ pertenecen a dicho plano. (Soluc: Sí; NO)

- c) Hallar otros dos puntos cualesquiera de este plano.
d) Comprobar que el vector formado por los 3 coeficientes de la ecuación general es $\perp$ al plano.

12. Hallar una ecuaciones paramétricas para el plano $x-2y+3z-1=0$ (Soluc: $x=1+2\lambda-3\mu$, $y=\lambda$, $z=\mu$)

13. Hallar la ecuación de los planos cartesianos OXY, OYZ y OXZ en paramétricas e implícita.

14. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x=2t$, $y=3+t$, $z=1-t$, y por el punto $A(2,-1,2)$.
(Soluc: $3x+4y+10z-22=0$)

15. (S) Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas r: $\left. \begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3 \\ z=1+2\lambda \end{array} \right\}$ s: $\left. \begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-\lambda \end{array} \right\}$

y que contiene al punto $P(2,3,4)$. (Soluc: $-2x-5y+z+15=0$)

16. (S) Dadas las rectas

$$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad s: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. (Soluc: $4x-7y-2z+13=0$)

Vector normal $\vec{n}_\pi$

17. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n}_\pi = (2, -3, 1)$ y que pasa por el punto $P(1, 1, -3)$
(Soluc: $2x-3y+z+4=0$)

18. Hallar la ecuación del plano paralelo a $x+2y+3z+4=0$ y que pasa por el punto $(3, 0, -1)$ (Soluc: $x+2y+3z=0$)

19. Comprobar que los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ del ejercicio 15 son $\perp$ al vector normal $\vec{n}_\pi$ del plano.

20. (S) Dada la recta

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$$

y los puntos $A(3, 1, 2)$ y $B(1, 5, 6)$, hallar la ecuación del plano que contiene los puntos A y B y es perpendicular a la recta r. (Soluc: $2x+3y-2z-5=0$)

21. (S) Hallar el plano que pasa por los puntos $A(0, 2, 0)$ y $B(1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $x-2y-z=7$.
(Soluc: $2x+y-2=0$)

22. (S) Dados el plano $\pi: 2x-3y+z=0$ y la recta r: $\left. \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array} \right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (Soluc: $5x+3y-z-12=0$)

23. Hallar el valor de a para que los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,a)$, $C(0,4,0)$ y $D(2,0,-2)$ sean coplanarios.

(Soluc: $\forall a \in \mathbb{R}$)

24. (S) ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros a , b y c para que los puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$ y $D(a,b,c)$ sean coplanarios? (Soluc: $a+b+c=2$)

Recta en implícitas:

25. a) Pasar la siguiente recta, expresada en implícitas, a paramétricas, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

b) Pasar $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ a implícitas.

c) Ídem con $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$

26. Dada $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ se pide: a) Hallar un posible vector director.

b) Hallar un punto cualquiera de r

c) Con la información anterior, indicar unas ecuaciones paramétricas para dicha recta.

27. (S) Dadas las rectas $r: \begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ 3x+y-z-1=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} 2x+y-3z-4=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s . (Soluc: $27x+17y-23z-17=0$)

28. (S) Se consideran el plano $\pi: 2x-y+z+1=0$, la recta $s: x-3y=0, z=1$ y el punto $A(4,0,-1)$. Hallar el plano que pasa por A , es paralelo a la recta s y perpendicular al plano π . (Soluc: $x-3y-5z-9=0$)

29. (S) Determinar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1,0,2)$ y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=z-2 \end{cases}$ (Soluc: $x=1-2\lambda, y=\lambda, z=2+3\lambda$)

Recta que se apoya en otras dos rectas y un punto:

30. (S) Determinar la recta que pasa por el punto $A(1,-1,0)$ y corta a las rectas

$$r: x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = z-1$$

(Soluc: $x=1+\lambda, y=-1+4\lambda, z=7\lambda$, o bien $3x+y-z-2=0, x-2y+z-3=0$)

31. (S) Dado el punto $P(1,1,1)$ y las rectas

$$\left. \begin{array}{l} r: x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} s: x=\mu \\ y=3\mu \\ z=2-\mu \end{array} \right\}$$

hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y corta a r y a s . (Soluc: $x=1, y=1+\lambda, z=1$)

32. Ídem con las rectas $r: \begin{cases} 3x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ y el punto $P(1,0,-1)$ (Soluc: $x=1+3\lambda, y=\lambda, z=-1+3\lambda$)

Rectas y planos, en general:

33. Hallar unas ecuaciones implícitas para los ejes de coordenadas.

34. Hallar las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta $\perp$ al plano $2x+3z-4=0$ y que pasa por $P(1,-1,2)$

35. (S) Consideremos el plano π de ecuación $20x+12y+15z-60=0$. Hallar:

- a) Los puntos A, B, C de intersección de π con los ejes coordenados OX, OY, OZ . (Sol: $A(3,0,0), B(0,5,0), C(0,0,4)$)
- b) La distancia entre la recta OB y el eje OX . (Sol: cero, pues ambas rectas se cortan)

36. (S) Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \quad s: x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

- a) Hallar n para que r y s sean paralelas.
- b) Para el valor de n obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas. (Soluc: $n=1; 11x+y-6z+8=0$)

37. Un plano corta a los ejes X, Y, Z en los puntos $x=a, y=b, z=c$ respectivamente. Deducir que su forma general o implícita es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

la cual se conoce como *ecuación segmentaria*.

38. (S) Dados los planos de ecuaciones $3x-y+z=1$ y $x+y-2z=0$, hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Explicar cómo se ha hecho. (Soluc: cualquier vector proporcional al $(1,7,4)$)

39. (S) Se considera el plano de ecuación $x+3y+z=7$, y los puntos $A(1,1,1)$ y $B(2,1,-1)$. Se pide ver que A y B están al mismo lado del plano. (Ayuda: calcular los planos paralelos al dado que pasan por A y B respectivamente, y comparar sus términos independientes)

40. (S) Hallar los valores de a para que los planos $-x+y+az=0$ y $ax+2y+2z=0$ corten al plano $x-y+z=1$ en dos rectas perpendiculares. (Soluc: $a=6$)

41. (S) Calcular un punto P de la recta $r: x=0, z=0$ de forma que el plano que contiene a P y a la recta $s: x+y=1, 2x-z=-1$ sea paralelo a la recta $t: y+z=1, -x+y+z=0$. (Soluc: $P(0,2,0)$)

Áreas y volúmenes:

42. (S) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $2x+y+3z-6=0$ con los ejes de coordenadas. (Soluc: $3\sqrt{14} u^2$)
43. (S) Un triángulo tiene vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ y el tercer vértice situado en la recta $x=2y, z=1$. Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$. (Soluc: Hay 2 soluc: $(0,0,1)$ y $(2,1,1)$)
44. (S) Hallar un plano que pasando por $A(0,2,0)$ y $B(0,0,2)$ corte al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo ABC valga 4. (Advertencia: Hay 2 soluciones) (Soluc: $x/\sqrt{6}+y/2+z/2=1$ y $x/-\sqrt{6}+y/2+z/2=1$)
45. (S) Determinar un punto de la recta $x/2=y=z/2$ que forme con los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ y $(0,1,-1)$ un tetraedro de volumen 1. (Soluc: Hay 2 soluc: $(4,2,4)$ y $(-4,-2,-4)$)
46. (S) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,3)$, siendo equilátero el triángulo formado por los puntos en que corta a los ejes cartesianos. Calcular el volumen determinado por dicho plano y los ejes coordenados. (Soluc: $x+y+z=6$; $36 u^3$)

Problemas de proyecciones:

47. (S) Dado el plano de ecuación $x+2y+3z=1$ y el punto $A(1,1,1)$, hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (la proyección ortogonal de A sobre él). (Soluc: $A'(9/14, 4/14, -1/14)$)
48. (S) Calcular el área del triángulo de vértices A' , B' , C' , proyección ortogonal del triángulo de vértices $A(1,1,1)$, $B(1,1,2)$, $C(1,2,1)$, sobre el plano $x+y+z=1$. (Soluc: $A'(1/3, 1/3, 1/3)$, $B'(0,0,1)$, $C'(0,1,0)$; área= $\sqrt{3}/6 u^2$)
49. (S) Hallar la proyección del punto $P(2,-1,3)$ sobre la recta $r: \begin{cases} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{cases}$ y calcular la distancia del punto P a la recta r. (Soluc: $P'(3,-2,4)$; distancia= $\sqrt{3} u$)
50. (S) Hallar el punto simétrico de $(2,0,3)$ respecto de la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ (Soluc: $(1,5,1)$)
51. (S) Dados los puntos $A(3,7,-2)$ y $B(-1,9,1)$, calcular la longitud del segmento $A'B'$, proyección ortogonal del segmento AB sobre el plano $x+3y-z-4=0$. (Soluc: $A'(1,1,0)$, $B'(-32/11, 36/11, 32/11)$; longitud= $\sqrt{318}/11 u$)
52. (S) Hallar las ecuaciones de la recta r' , proyección ortogonal de $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=3 \end{cases}$ sobre el plano $x-y+2z+4=0$ (Soluc: $3x-y-2z+1=0$, $x-y+2z+4=0$)