

Alumno: SOLUCIONES

INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota hay que hacer las tres últimas preguntas de cada una de las tres evaluaciones.
- Todas las preguntas puntúan igual.
- Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

1. Dada $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$, se pide:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \sin x(-\sin x)}{1} = \boxed{1} \quad 0,75$

0,25 0,25

nota: se baja 0,1 por fallo, en la notación matemática

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=\pi$

$x=\pi \rightarrow f(\pi) = \frac{\sin^2 \pi}{\pi^2} = \frac{0}{\pi^2} = 0 \quad 0,25$

$f'(x) = \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)' = \frac{2 \sin x \cos x \cdot x^2 - \sin^2 x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x \sin x \cos x - 2 \sin^2 x}{x^3} \quad 0,25$

$f'(\pi) = \frac{2\pi \sin \pi \cos \pi - 2 \sin^2 \pi}{\pi^3} = 0 \quad 0,25$

$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \Rightarrow y - 0 = 0(x - \pi); \boxed{y = 0} \text{ i.e. tge horizontal}$

0,5

$1,25 + 1,25$

2. a) Hallar los valores de **a**, **b** y **c** para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$.

1.) $f(x)$ CONTINUA en $[0,4]$: en particular ha de ser continua en $x=2$. Vemos que en ese punto existe imagen. Estudiemos los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (cx + 1) = 2c + 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{continua}} 4 + 2a + b = 2c + 1 \quad (1)$$

NOTA: se baja 0,1 por fallos en la notación matemática

2.) $f(x)$ DERIVABLE en $(0,4)$: en particular ha de ser derivable en $x=2$:

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= (x^2 + ax + b)'_{x=2} = 2x + a \Big|_{x=2} = 4 + a \\ f'(2^+) &= (cx + 1)'_{x=2} = c \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{derivable}} 4 + a = c \quad (2)$$

$$3.) \left. \begin{aligned} f(0) &= b \quad (1^{\text{a}} \text{ rama}) \\ f(4) &= 4c + 1 \quad (2^{\text{a}} \text{ rama}) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{f(0)=f(4)} b = 4c + 1 \quad (3)$$

Resolvemos el sistema formado por (1), (2) y (3), para lo cual sustituimos b de (3) en (1):

$$4 + 2a + 4c + 1 = 2c + 1; \quad 4 + 2a + 2c = 0$$

Ahora sustituimos c de (2):

$$4 + 2a + 2(4 + a) = 0; \quad 4 + 2a + 8 + 2a = 0; \quad 4a = -12; \quad \boxed{a = -3} \xrightarrow{\text{sustituimos en (2)}} \boxed{c = 1} \xrightarrow{\text{sustituimos en (3)}} \boxed{b = 5}$$

b) Para la función obtenida en el apartado anterior hallar el valor o valores intermedios en que se verifica el teorema.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Acabamos de probar que esta función verifica las hipótesis del th. de Rolle en $(0,4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in (0,4) / f'(x) = 0$. Vamos a calcularlo:

$$1^{\text{a}} \text{ rama: } f'(x) = 2x - 3 = 0; \quad \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$2^{\text{a}} \text{ rama: } f'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No se aplica.}$$

3. Dada $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, hallar:

a) Extremos relativos.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0; \quad x(x-2) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \nearrow x=0 \\ \searrow x=2 \end{array} \right\} \text{ posibles M o m } 0,25$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} \quad \leftarrow \text{no es necesario simplificar más, puesto que sólo queremos sustituir en ella; sale } \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0) = \frac{2-0}{(-1)^3} = \frac{+}{-} < 0 \Rightarrow \boxed{M(0, -2)} \quad \leftarrow f(0) = \frac{2}{-1} = -2$$

$$f''(2) = \frac{2-0}{1^3} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{m(2, 2)} \quad \leftarrow f(2) = \frac{2}{1} = 2$$

b) Asintotas.

¿A.H.? $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \Rightarrow \nexists \text{ A.H. } 0,15$

¿A.V.? $x=1$ es una posible A.V. p.p. anula el denom. Comprobémoslo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0} = \infty \text{ o } -\infty \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ A.V.}} \quad 0,15$$

¿A.O.? $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad 0,25$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x(x-1)}{x-1} =$$

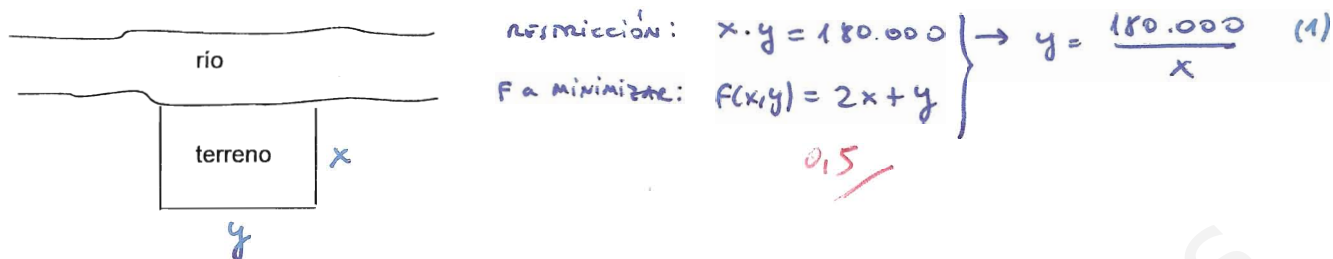
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2}{x-1} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x} = -1 \quad 0,25$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x - 1 \text{ A.O.}} \quad 0,25$$

nota: se baja 0,1 por fallo en la notación matemática

1,25 + 1,25

4. Un granjero desea vallar un terreno rectangular adyacente a un río. Dicho terreno debe tener 180000 m^2 . ¿Qué dimensiones habrá de tener el recinto de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?



$$\Rightarrow f(x) = 2x + \frac{180.000}{x}; \quad f'(x) = 2 - \frac{180.000}{x^2} = 0; \quad 2 = \frac{180.000}{x^2};$$

$$x^2 = 90.000 \Rightarrow x = \sqrt{90.000} = 300 \text{ m} \quad (\text{se desecha la soluc. } < 0 \text{ obviamente})$$

Comprobemos si se trata de un mínimo:

$$f''(x) = -180.000 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = -180.000 \cdot \frac{-2x}{x^4} = \frac{360.000}{x^3}$$

$$f''(300) = \frac{360.000}{300^3} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \text{se trata de un mínimo}$$

Nota: se baja al pto. si el resultado es correcto por los fallos "de concepto" en el procedimiento

Finalmente, obtenemos "y" sustituyendo $x = 300$ en (1): $y = \frac{180.000}{300} = 600 \text{ m.}$

Soluc: El lado cercano al río ha de ser de 300 m, y el lado opuesto 600 m

Alumno: SOLUCIONES

INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota hay que hacer las tres últimas preguntas de cada una de las tres evaluaciones.
- Todas las preguntas puntúan igual.
- Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

1. a) $\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$

raíces: 1 doble y 2

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow 1, 2$$

Obtenemos que el denominador tiene raíces reales (múltiples), por lo que hay que aplicar descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \text{② } (x-2)(x-1)^2$$

$$2x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)$$

$$x=1 \rightarrow -1 = -C; \quad C=1$$

$$x=2 \rightarrow 1 = A$$

$$x=0 \rightarrow 1 = A + 2B - 2C; \quad 1 = 1 + 2B - 2; \quad B=1 \quad \text{0,25/}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln|x-2| + \ln|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx = \\ &= \ln|x-2| + \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \ln|x-2| + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

0,25/ 0,25/ 0,25/

b) $\int (x^2 + 1) \sin 2x dx$

$$u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \sin 2x dx \rightarrow v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}$$

$$I = -\frac{\cos 2x}{2} (x^2 + 1) - \int -\frac{\cos 2x}{2} \cdot 2x dx = -\frac{(x^2 + 1) \cos 2x}{2} + \int x \cos 2x dx =$$

0,25/

$u=x \rightarrow du=dx$
 $dv=\cos 2x \cdot dx \rightarrow v=\frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2}$

$$= -\frac{(x^2 + 1) \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \cdot x - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot dx = -\frac{(x^2 + 1) \cos 2x}{2} + \frac{x \cdot \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \cdot dx =$$

0,25/

$$= -\frac{(x^2 + 1) \cos 2x}{2} + \frac{x \cdot \sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

0,25/

1,25+1,25

2. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt[3]{x}$. Hacer un dibujo.

Primero hallamos dónde se cortan ambas:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sqrt[3]{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 = \sqrt[3]{x} ; x^6 = x ; x^6 - x = 0 ; x(x^5 - 1) = 0 \rightarrow x=0 \\ \rightarrow x^5 - 1 = 0 ; x^5 = 1 ; x = 1 \end{array}$$

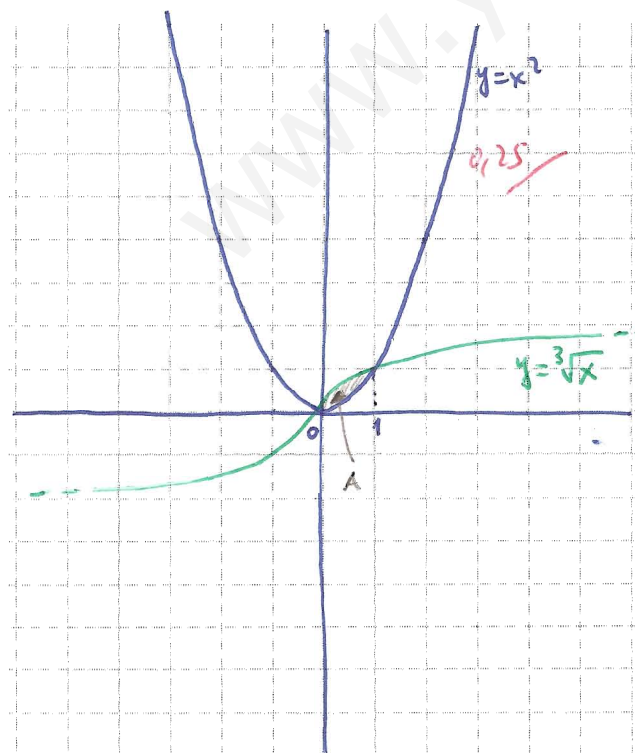
Por lo tanto, el recinto limitado por ambas curvas estará entre $x=0$ y $x=1$. Para ver cuál de las dos está por encima podemos dar un valor intermedio, p.ej. $x = \frac{1}{8}$:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 : \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} \\ y = \sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \frac{1}{64} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{x} > x^2 \quad \forall x \in (0,1)$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{1/3} - x^2) dx = \left[\frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{3\sqrt[3]{1}}{4} - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{12} \text{ u}^2}$$

x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$y = x^2$	...	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	...
$y = \sqrt[3]{x}$	...	-1,82	-1,21	-1,59	-1,15	-1,26	-1	0	1	1,26	1,44	1,59	1,71	1,82	...



2+0,5

3. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, hallar **razonadamente** A^{281} .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0,25/$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 0,25/$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \quad 0,25/$$

$A^5 = A^4 \cdot A = \mathbb{I} \cdot A = A$, con lo cual a partir de aquí se repite la serie, la cual consta de 4 términos. 0,25/

Para ver a cuál de los cuatro pertenece A^{281} hacemos la división y nos quedamos con el resto:

$$\begin{array}{r} 281 \overline{) 4} \\ \underline{-1} \\ 70 \end{array} \Rightarrow \boxed{A^{281} = A^1 = A} \quad 1,5/$$

4. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular aplicando las propiedades de los determinantes (es decir, sin desarrollar) los siguientes determinantes:

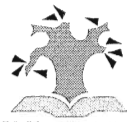
a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5}$ 0,25

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5}$ 0,5

Handwritten notes: $OPF. F_2 = 3F_1$ (for the first determinant), $OPF. F_1 = F_3$ (for the second determinant).

c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5}$ 0,5

Handwritten notes: $OPF. F_1 = F_3$ (for the first determinant), $F_2 = F_2 - F_3$ (for the second determinant).

 I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN FINAL MATEMÁTICAS II 3ª EVALUACIÓN	2º BACH. A CURSO 2013-2014	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia
---	--	---------------------------------------	--

Alumno: _____

INSTRUCCIONES:

- Para **recuperar 3 evaluaciones** se responderán a **las tres primeras preguntas** de dichas evaluaciones.
- Para **recuperar 2 evaluaciones** se responderán a **todas las preguntas** de tales evaluaciones.
- Para **recuperar 1 evaluación** se responderán a **todas las preguntas** de esa evaluación.
- Para subir nota hay que hacer las tres ^{primeras} ~~últimas~~ preguntas de cada una de las tres evaluaciones.
- Todas las preguntas puntúan igual.
- Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

1. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) Indicar **razonadamente** para qué valores de m existe A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -m - 1 + m = -1 \neq 0 \forall m \Rightarrow \boxed{\exists A^{-1} \forall m} \quad \begin{matrix} 0,25 \\ 0,75 \end{matrix}$$

b) Hallar dicha inversa en función de m .

$$\left. \begin{array}{lll} A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = -m & A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} = -m & A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m+1 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -m & -m & 1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0,05 \text{ cada adjunto} \\ 0,05 \end{matrix}$$

$${}^t \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -m & m & -1 \\ -m & m+1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t \text{Adj}(A) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -m & m & -1 \\ -m & m+1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -m & 1 \\ m & -m-1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0,25 \\ 0,75 \end{matrix}$$

1+1,5

2. a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a-1 \\ 3x - 2az = a-1 \end{cases} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ a & -1 & -1 & | & a-1 \\ 3 & 0 & -2a & | & a-1 \end{pmatrix}}_M = M^*$$

¿ $\text{rg } M$?

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 \geq 0; \quad a^2 + 2a - 3 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow a=1 \\ \searrow a=-3 \end{matrix}$$

$$a=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{La 4ª fila, al ser nula, sobre a efectos del rango} \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 \quad 0,25/$$

$$a=-3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ -3 & -1 & -1 & | & -4 \\ 3 & 0 & 6 & | & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$$

¿ $\text{rg } M^*$? Ordenamos C_1 y C_2 con C_4 :

$$|C_1(C_2, C_4)| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 12 - 12 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 3 \quad 0,25/$$

Resumiendo:

0,25	I) $a \neq 1$ y $a \neq -3 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 3 = \text{n. incógnitas}$	$\xrightarrow{\text{TH. ROUCHÉ-PROBARIUS}}$	sist. compat. d. todo (sol. única)
0,25	II) $a = 1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 < \text{n. incógnitas} = 3$	$\xrightarrow{\quad \quad \quad}$	sist. compat. infinito (uniparamétrica)
0,25	III) $a = -3 \Rightarrow \text{rg } M = 2 \neq \text{rg } M^* = 3$	$\xrightarrow{\quad \quad \quad}$	sist. incompatible

b) Resolverlo para $a=1$

En este caso acabamos de ver que el sistema será uniparamétrica; por lo tanto, eliminamos una ecuación (p.ej. E_3) y pasamos una de las incógnitas (p.ej. z) como parámetro:

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda \\ x - y = \lambda \end{cases} \quad 0,25/ \quad |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

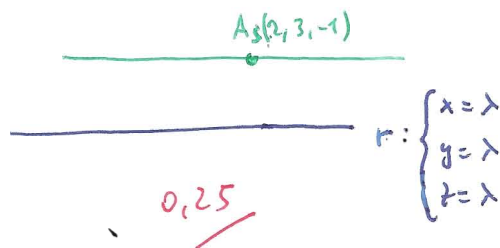
$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{-3}} = \frac{-\lambda - \lambda}{-3} = \frac{2\lambda}{3} \quad 0,25/$$

$$\boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-3}} = \frac{2\lambda - \lambda}{-3} = -\frac{\lambda}{3} \quad 0,25/$$

$$\boxed{z = \lambda} \quad 0,25/$$

3. a) Hallar la ecuación paramétrica y continua de la recta ^s que pasa por $A(2,3,-1)$ y es paralela a la recta $\left. \begin{matrix} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \right\} r$

Hacer un dibujo aproximado que explique cómo se ha obtenido lo anterior.



Como son paralelas, el vector director de la recta dada también lo será de la recta pedida:

$$\left. \begin{matrix} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{matrix} \right\} \text{paramétricas}$$

0,5

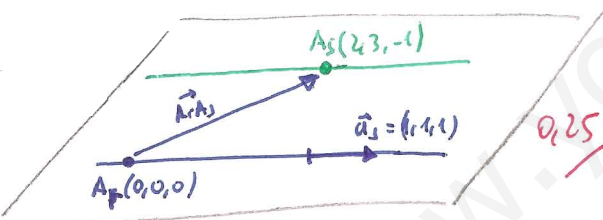
$$\Rightarrow \boxed{x-2 = y-3 = z+1}$$

continua

0,5

nota: se baja 0,1 si no se cuida el lenguaje matemático

- b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a ambas rectas. Hacer un dibujo como en el apartado anterior.



Como se ve en el dibujo, el plano pedido quedará determinado por un punto cualquiera de él (p.ej. $(0,0,0)$) y dos vectores direccionales. Uno puede ser el $(1,1,1)$. El otro lo obtenemos uniendo dos puntos de ambas rectas, es decir, $\overrightarrow{A_rA_s}$:

$$\left. \begin{matrix} A_r(0,0,0) \\ \vec{u}_s = (1,1,1) \\ \vec{A_rA_s} = (2,3,-1) \end{matrix} \right\} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad -4x + 3y + z = 0; \quad \boxed{4x - 3y - z = 0}$$

0,75

0,25

1,25 + 1,25

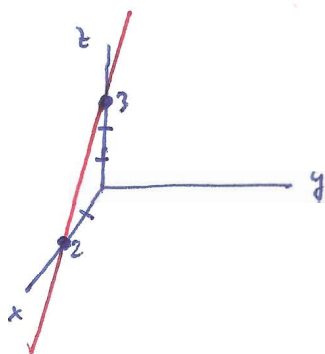
4. La recta $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -3\lambda \end{cases}$ corta a los ejes en dos puntos.

a) Hallar dichos puntos. Hacer un dibujo de la situación.

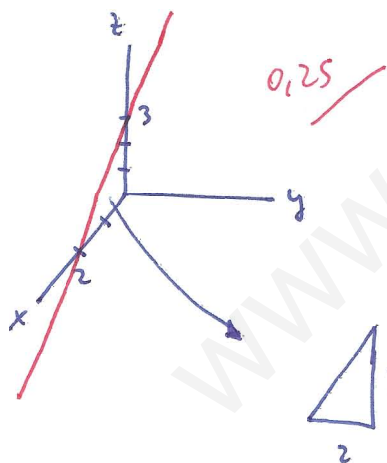
corte eje x : $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -3\lambda; \lambda=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{A(2,0,0)}$ 0,5

corte eje y : $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 + 2\lambda; \lambda = -1 \\ 0 = -3\lambda; \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no corta al eje } y$ 0,5

corte eje z : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 + 2\lambda; \lambda = -1 \\ 0 = -3\lambda; \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow z=3 \rightarrow \boxed{B(0,0,3)}$ 0,5



b) Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los dos puntos anteriores y el origen. Dibujar la situación.



se trata de un triángulo rectángulo:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = \boxed{3 \text{ u}^2}$$
 0,75

NOTA: se baja 0,25 si se hace de una forma más larga, por producto vectorial
" " " " " desviada la notación matemática