I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	PARCIAL 2ª EVALUACIÓN **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

1. *(UCLM, junio 2004)* Un alambre de 100 m de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Hallar la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima. *(2,5 puntos)*

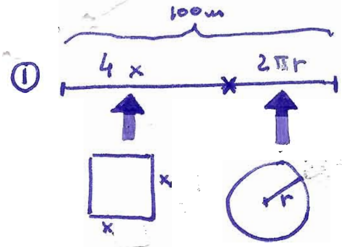
2. Dada $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

a) Hallar los posibles M y m, y los intervalos de crecimiento.
b) Hallar los posibles P.I., y los intervalos de curvatura.
c) Hallar las posibles asíntotas.
d) Representarla gráficamente. *(2,5 puntos)*

3. **a)** $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ *(UCLM, sept 2005)* **b)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$ *(2,5 puntos)*

4. **a)** $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+x+1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}\,dx$ *(2,5 puntos)*

NOTA: Se ruega cuidar la ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático.

① 

RESTRICCIÓN: $4x + 2\pi r = 100$ ← 0.5

F. A MINIMIZAR: $A = x^2 + \pi r^2$

$\Rightarrow r = \dfrac{100-4x}{2\pi} = \dfrac{50-2x}{\pi}$

TOTAL: 2,5

$$A(x) = x^2 + \pi\cdot\left(\frac{50-2x}{\pi}\right)^2 = x^2 + \cancel{\pi}\cdot\frac{2500-200x+4x^2}{\pi^{\cancel{2}}} = x^2 + \frac{2500-200x+4x^2}{\pi}$$

$$A'(x) = 2x + \frac{-200+8x}{\pi} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{200-8x}{\pi};\ 2\pi x = 200-8x;\ (2\pi+8)x = 200;\ x = \frac{200}{2\pi+8} = \frac{100}{\pi+4}$$ ← 1

$A''(x) = 2 + \dfrac{8}{\pi} > 0 \Rightarrow$ se confirma que es un mínimo; $\boxed{L_{\square} = 4x = \dfrac{400}{2\pi+8} \simeq 56{,}01\,m} \Rightarrow \boxed{L_{O} = 100 - L_{\square} \simeq 43{,}99\,m}$

0,5   0,5

---

② $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ a) $f'(x) = \dfrac{(3x^2+2x)(x^2-1)-(x^3+x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \boxed{\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}} = 0 \Rightarrow$ ← 0,25

$x^4 - 3x^2 = 0$; $x^2(x^2-3) = 0$ → $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ posibles Mom ← 0.125

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (x^4-3x^2)\,2\,\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} = \boxed{\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}}$$ 0,25

$f''(\sqrt3) = \dfrac{2(\sqrt3)^3+6\sqrt3}{8} > 0 \Rightarrow m\left(\sqrt3,\ 1+\frac32\sqrt3\right)$ ← 0,25

$f''(-\sqrt3) = \dfrac{-2(\sqrt3)^3-6\sqrt3}{8} < 0 \Rightarrow M\left(-\sqrt3,\ 1-\frac32\sqrt3\right)$

$f(\sqrt3) = \dfrac{3\sqrt3+3-1}{2} = \dfrac{3\sqrt3+2}{2} = 1+\frac32\sqrt3$

$f(-\sqrt3) = \dfrac{-3\sqrt3+3-1}{2} = \dfrac{-3\sqrt3+2}{2} = 1-\frac32\sqrt3$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ este método no decide

b) $f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3+6x = 0;\ 2x(x^2+3) = 0$ → $x = 0$ posible P.I. ← 0,125; $x^2+3 = 0$ ∄ soluc.

$$f'''(x) = \frac{(6x^2+6)(x^2-1)^{\cancel{3}} - (2x^3+6x)\,3\,\cancel{(x^2-1)^2}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{6}\,4}};\quad f'''(0) = \frac{6\cdot(-1)}{(-1)^4} = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow \boxed{P.I.(0,1)}$$ 0,25 convexo-cóncavo

c) ¿A.H.? $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1} = \infty \Rightarrow$ ∄ A.H. ← 0,125

TOTAL: 2,5

¿A.V.? $x^2-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm1\ A.V.}$ ← 0,125

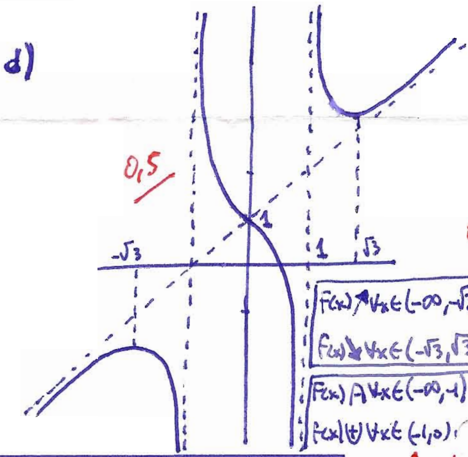
¿A.O.? $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2-1}{x^3-x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x^2-1-x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-1}{x^2-1} = 1$

0,25 $\boxed{y = x+1\ A.O.}$

d) 0,5



0,125

$f(x)$ ↗ $\forall x \in (-\infty,-\sqrt3)\cup(\sqrt3,\infty)$

$f(x)$ ↘ $\forall x \in (-\sqrt3,\sqrt3)$

$f(x)$ ∩ $\forall x \in (-\infty,-1)\cup(0,1)$

$f(x)$ ∪ $\forall x \in (-1,0)\cup(1,\infty)$

← 0,125

---

③ a) $$\int \frac{x+\sqrt x}{x^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2}\,dx + \int\frac{\sqrt x}{x^2}\,dx = \int\frac1x\,dx + \int x^{-3/2}\,dx = \ln|x| + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = \boxed{\ln|x| - \frac{2}{\sqrt x} + C}$$ ← 1

b) $$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int\frac{t}{t^2+1}\,2t\,dt = 2\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt = 2\cdot\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\left[\int\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{t^2+1}}\,dt - \int\frac{1}{t^2+1}\,dt\right] = 2(t - \operatorname{arctg} t)$$

$= \boxed{2\left(\sqrt{x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right) + C}$ ← 1,25

CAMBIO DE VARIABLE $x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2+1 \Rightarrow t = \sqrt{x-1}$; $dx = 2t\cdot dt$ 0,25

---

④ a) $$I = \int\frac{2x+7}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{2x+1+6}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int\frac{6}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1) + 6\cdot\int\frac{dx}{x^2+x+1}\ (*)$$ ← 0,25

$x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1\pm\sqrt3\, i}{2} = -\dfrac12 \pm \dfrac{\sqrt3}{2} i \Rightarrow$ CAMBIO DE VARIABLE $x + \dfrac12 = \dfrac{\sqrt3}{2} t \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt3 t - 1}{2}$; $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt3}$ ← 0,25

$dx = \sqrt3/2\,dt$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \int\frac{\sqrt3/2\,dt}{\left(\frac{\sqrt3 t-1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt3 t-1}{2} + 1} = \frac{\sqrt3}{2}\int\frac{dt}{\frac{3t^2-2\sqrt3 t+1}{4} + \frac{\sqrt3 t-1}{2} + 1} = \frac{\sqrt3}{2}\int\frac{dt}{\frac{3t^2-\cancel{2\sqrt3 t}+1+\cancel{2\sqrt3 t}-2+4}{4}} = \frac{\sqrt3}{2}\int\frac{dt}{\frac{3t^2+3}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac43\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt3}{3}\operatorname{arctg} t = \boxed{\frac{2\sqrt3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}}$$; sustituimos en (*): $I = \boxed{\ln(x^2+x+1) + 4\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3} + C}$ ← 1

b) $$\int\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x}\,dx = \int\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\cos x}\,dx = \int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{sen}x\cdot(\cos x)^{-2}\,dx = -\int\underbrace{(-\operatorname{sen}x)}_{u'}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{u}{}^{-2}\,dx = -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} = \frac{1}{\cos x} = \boxed{\sec x + C}$$ ← 1

I.E.S. "Fernando de Mena"	**PARCIAL 2ª EVALUACIÓN** **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A** **CURSO 2005-2006**	Junta de Comunidades de Castilla -La Mancha

1. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

2. **a)** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

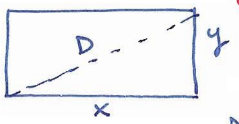
3. $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13}\,dx$

4. $\int \frac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4}\,dx$

5. $\int (x^2+1)\,e^{-x}\,dx$

INSTRUCCIONES: *Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!*

(1)



0.25/ $2x+2y=12$ (RESTRICCIÓN) ; $x+y=6;\ y=6-x$

$D=\sqrt{x^2+y^2}$ (Función a minimizar) ; $D(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2}=\sqrt{x^2+36-12x+x^2}=$

$D(x)=\sqrt{2x^2-12x+36}\ ;\ D'(x)=\dfrac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}=0 \Rightarrow 4x-12=0;\ x=3$ m. posible Mom 0.75/

$\Downarrow$

$y=3$ m 0.25/

$D'(x)=\dfrac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12x+36}} \Rightarrow D''(x)=\dfrac{2\sqrt{2x^2-12x+36}-(2x-6)\cdot\dfrac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}}{2x^2-12x+36}\ ;$

0.75/

$D''(3)=\dfrac{2\sqrt{18}}{18}>0 \Rightarrow$ se confirma que es un mínimo ; $\boxed{\text{Soluc: se trata de un cuadrado de lado 3 m.}}$

(2) a) $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x}{x^{1/2}}dx+\int\frac{2}{x^{1/2}}dx=\int x^{1/2}dx+2\int x^{-1/2}dx=$

$=\dfrac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+2\cdot\dfrac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+4\sqrt{x}+C_1}$ 1/

b) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4}dx=\int\frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{4}2\int\frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx=\boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C_1}$ 1/

(3) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2-6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6+8}{x^2-6x+13}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx+\int\frac{8}{x^2-6x+13}dx\right]$ (*) 0.5/

$x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\dfrac{6\pm 4i}{2}=3\pm 2i \Rightarrow$ cambio de variable: $x-3=2t \Rightarrow x=2t+3$

$dx=2dt$

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2-6x+13}dx=\int\frac{2dt}{(2t+3)^2-6(2t+3)+13}=2\int\frac{dt}{4t^2+\cancel{12t}+9-\cancel{12t}-18+13}=2\int\frac{dt}{4t^2+4}=\frac{2}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=$

$=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}$; sustituimos en (*): $I=\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+\dfrac{1}{2}8\cdot\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}=$

1/

$=\boxed{\ln\sqrt{x^2-6x+13}+2\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C_1}$ 0.5/

(4)

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3+2x^2\qquad+3 & x^3-3x^2+4 \\ \hline -x^4+3x^3\qquad\quad -4x & x \\ \qquad\quad 2x^2-4x+3 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^4-3x^3+2x^2+3=x\cdot(x^3-3x^2+4)+(2x^2-4x+3)$

$\dfrac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4}=x+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4} \Rightarrow$

0.5/

$\Rightarrow I=\displaystyle\underbrace{\int x\,dx}_{x^2/2}+\int\frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4}dx$; (*)

raíces -1 y 2 doble

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$ doble

$\dfrac{2x^2-4x+3}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$ 0.25/

$2x^2-4x+3=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C\cdot(x+1)$

$x=-1\rightarrow\quad 9=9A\Rightarrow A=1$

$x=2\rightarrow\quad 3=3C\Rightarrow C=1$ 0.25/

$x=0\rightarrow\quad 3=4A-2B+C;\ 3=4-2B+1;\ 2B=2;\ B=1$

0.25/ 0.25/

$\displaystyle\int\frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=\ln(x+1)+\ln(x-2)+\int(x-2)^{-2}dx=\ln(x+1)(x-2)+\frac{(x-2)^{-1}}{-1}=$

0.25/

$=\ln(x^2-x-2)-\dfrac{1}{x-2}+C_1$; sustituimos en (*): $\boxed{I=\dfrac{x^2}{2}+\ln(x^2-x-2)-\dfrac{1}{x-2}+C_1}$ 0.25/

(5) $\displaystyle\int(x^2+1)e^{-x}dx=-(x^2+1)e^{-x}-\int-2x\,e^{-x}dx=-\frac{x^2+1}{e^x}+2\int xe^{-x}dx=$ 0.5/

$u=x^2+1\Rightarrow du=2x\,dx$; $u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-\int -e^{-x}dx=-e^{-x}$; $dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$

0.5/

$=-\dfrac{x^2+1}{e^x}+2\cdot\left[-xe^{-x}-\displaystyle\int -e^{-x}dx\right]=-\dfrac{x^2+1}{e^x}+2\left[-\dfrac{x}{e^x}+\displaystyle\int e^{-x}dx\right]=-\dfrac{x^2+1}{e^x}+2\left(-\dfrac{x}{e^x}-e^{-x}\right)=-\dfrac{x^2+1}{e^x}-\dfrac{2x}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}=$

0.5/

$=\boxed{\dfrac{-x^2-2x-3}{e^x}+C_1}$ 0.5