

	PARCIAL 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2013-2014	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Departamento de Educación y Ciencia
---	---	---------------------------------------	---

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. a) (jun 2010) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ (Ayuda: es inmediata) (1 pto.)

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \boxed{\arctg(\sin x) + C} \quad 0,75$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctg u \quad 0,25$$

- b) (jun 2009) $\int \frac{x+36}{4+9x^2} dx$ (1,5 ptos.)

Como el denominador es cuadrático y carece de raíces IR, en principio va a ser una integral de tipo arctg; en concreto, se trata del caso sencillo, pues carece de término en x. Ahora bien, como el numerador es un binomio de 1º grado, en realidad va a ser el caso Ln-arctg:

$$\int \frac{x+36}{4+9x^2} = \frac{1}{18} \int \frac{18(x+36)}{4+9x^2} dx = \frac{1}{18} \left[\int \frac{18x}{4+9x^2} dx + \int \frac{648}{4+9x^2} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{18} \int \frac{18x}{4+9x^2} dx + \frac{1}{18} \int \frac{648}{4+9x^2} dx = \frac{1}{18} \ln(4+9x^2) + 36 \int \frac{1}{4+9x^2} dx \quad 0,5 (*)$$

Hacemos aparte la integral tipo arc-tg:

$$\int \frac{1}{4+9x^2} dx = \int \frac{1}{4 \left(1 + \frac{9}{4}x^2\right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{3/2}{1 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{6} \arctg \frac{3x}{2} \quad 0,5$$

Sustituimos en (*):

$$I = \ln \sqrt{4+9x^2} + 36 \cdot \frac{1}{6} \arctg \frac{3x}{2} = \boxed{\ln \sqrt{4+9x^2} + 6 \arctg \frac{3x}{2} + C} \quad 0,5$$

NOTA: Se baja 0,25 si la integral tipo arcotangente se resuelve mediante cambio de variable ya que, por ser semiinmediata, ello es innecesario y superfluo
Se baja 0,25 por omitir dx o la cte. de integración C



2. a) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ (Ayuda: ensayar un cambio de variable)

(1,25 pts.)

Como el integrando es impar en $\cos x$, hacemos el cambio $\sin x = t \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2}$

$$I = \int t^2 \cdot (\sqrt{1-t^2})^3 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^2 \cdot (1-t^2) \cdot dt =$$

$$\begin{aligned} \cos x \, dx &= dt \\ dx &= \frac{dt}{\cos x} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

$$= \int t^2 (1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = 0,25$$

0,25

$$= \boxed{\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C} \quad 0,75$$

NOTA: También sale manipulando hábilmente el integrando:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \cos^2 x \cdot dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) dx = \int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx - \int \sin^4 x \cdot \cos x \cdot dx = \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

b) (jun 2006) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx$

raíz $x=1$ doble

NOTA: se baja 0,5 si se comienza el ejercicio apostando en el numerador la derivada del denominador; eso es innecesario y supone una pérdida de tiempo...

(1,25 pts.)

Como el denominador es cuadrático y tiene raíces IR, se trata de una integral por descomposición en fracciones simples del integrando:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow x+2 = A(x-1) + B \quad 0,25$$

$$x=1 \rightarrow 3 = B$$

$$x=0 \rightarrow 2 = -A + B; 2 = -A + 3; A=1 \quad 0,25$$

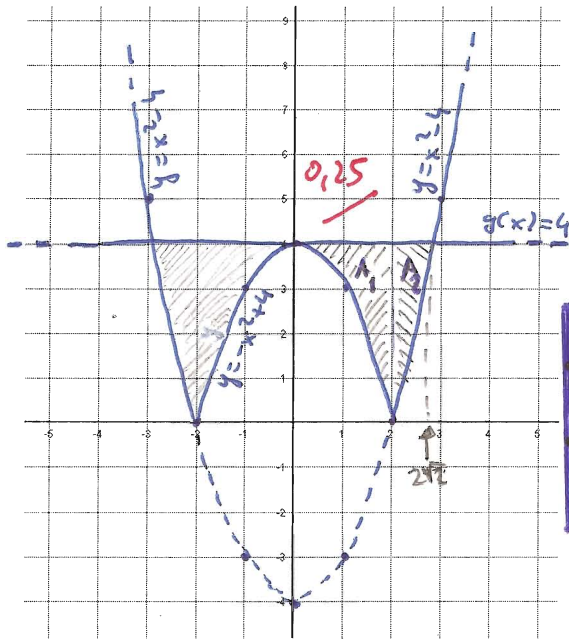
$$I = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = \ln(x-1) + 3 \int (x-1)^{-2} dx =$$

$$= \ln(x-1) + 3 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C} \quad 0,25$$

NOTA: En este caso particular también se puede hacer manipulando el integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+6}{x^2-2x+1} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x-2}{x^2-2x+1} dx + \int \frac{6}{x^2-2x+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln(x-1) + 3 \int (x-1)^{-2} dx = \ln(x-1) + 3 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C \end{aligned}$$

3. Hallar el área del recinto limitado por $f(x)=|x^2-4|$ y $g(x)=4$. Dibujar dicho recinto. (2,5 pts.)



$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad 0,25$$

se anula en ± 2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 4$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12
$f(x) = x^2 - 4 $	12	5	0	3	4	3	0	5	12

$x^2 - 4$ $-x^2 + 4$ $x^2 - 4$

Vemos que el recinto pedido se divide a su vez en dos subrecintos simétricos. Por ejemplo, el recinto derecho lo dividimos, a efectos de cálculo, en dos subáreas, A_1 y A_2 . Los extremos de integración en A_1 se ven claramente en la gráfica y la tabla:

$$A_1 = \int_0^2 [4 - (-x^2 + 4)] dx = \int_0^2 (x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} u^2 \quad 0,5$$

(se baja 0,25 por no utilizar correctamente paréntesis y/o omitir dx)

Por otra parte, tenemos que calcular el corte entre la parábola y $g(x)$ para A_2 :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4 = 4, \quad x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \quad 0,25$$

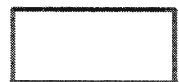
(se baja 0,25 por indicar $\sqrt{8}$ en vez de $2\sqrt{2}$)

$$A_2 = \int_{2\sqrt{2}}^2 [4 - (x^2 - 4)] dx = \int_{2\sqrt{2}}^2 (8 - x^2) dx = \left[8x - \frac{x^3}{3} \right]_{2\sqrt{2}}^2 = \left(16 - \frac{8}{3} \right) - \left(16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{40}{3} u^2 \quad 0,5$$

$$A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{32\sqrt{2} - 40}{3} = \frac{32\sqrt{2} - 32}{3} u^2 \quad 0,25$$

$$A_T = 2 \cdot \frac{32\sqrt{2} - 32}{3} = \frac{64\sqrt{2} - 64}{3} u^2 \quad 0,5$$

↑
simétrica



4. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrar una expresión general para A^n ¿Cuánto valdría A^{11} ?

(2,5 pts.)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

inducción

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1,25$$

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 2^{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{10} & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 & 1024 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1024 & 0 & 1024 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

