

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

¿Recuperación condicional? ☐

1. a)  $\int \sin \sqrt{3x} \, dx$  (Ayuda: Hacer previamente un cambio de variable)

(1,25 pts.)

CAMBIO DE VARIABLE:  $3x = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2}{3}$

$3dx = 2t \, dt$

$dx = \frac{2}{3} t \, dt$

$I = \int \sin t \cdot \frac{2}{3} t \, dt = \frac{2}{3} \int t \cdot \sin t \cdot dt = \frac{2}{3} \left( -t \cos t - \int -\cos t \cdot dt \right) = \frac{2}{3} \left( -t \cos t + \sin t \right) =$

$\left\{ \begin{array}{l} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = \sin t \cdot dt \rightarrow v = -\cos t \end{array} \right\}$

$= \frac{2}{3} \left( -\sqrt{3x} \cos \sqrt{3x} + \sin \sqrt{3x} \right) + C$

b)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} \, dx$

(1,25 pts.)

Como el denominador tiene  $\Delta = 16 - 4 \cdot 13 < 0 \Rightarrow$  raíces  $\mathbb{C} \Rightarrow$  tipo arctg

Como grado numerador  $\geq$  grado denominador, hay que hacer previamente la división polinómica:

$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} \Rightarrow x^2 + 1 = (x^2 - 4x + 13) + 4x - 12$

$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 13} = 1 + \frac{4x - 12}{x^2 - 4x + 13}$

$I = \int \left( 1 + \frac{4x - 12}{x^2 - 4x + 13} \right) dx = \int dx + \int \frac{4x - 12}{x^2 - 4x + 13} dx = x + 2 \int \frac{2x - 6}{x^2 - 4x + 13} dx = x + 2 \int \frac{2x - 4 - 2}{x^2 - 4x + 13} dx$

$= x + 2 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 13} dx + 2 \int \frac{-2}{x^2 - 4x + 13} dx = x + 2 \ln(x^2 - 4x + 13) - 4 \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \Rightarrow$  cambio de variable  $x - 2 = 3t \Rightarrow x = 3t + 2$

$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{3dt}{(3t+2)^2 - 4(3t+2) + 13} = 3 \int \frac{dt}{9t^2 + 12t + 4 - 12t - 8 + 13} = 3 \int \frac{dt}{9t^2 + 9} = \frac{3}{9} \int \frac{dt}{t^2 + 1}$

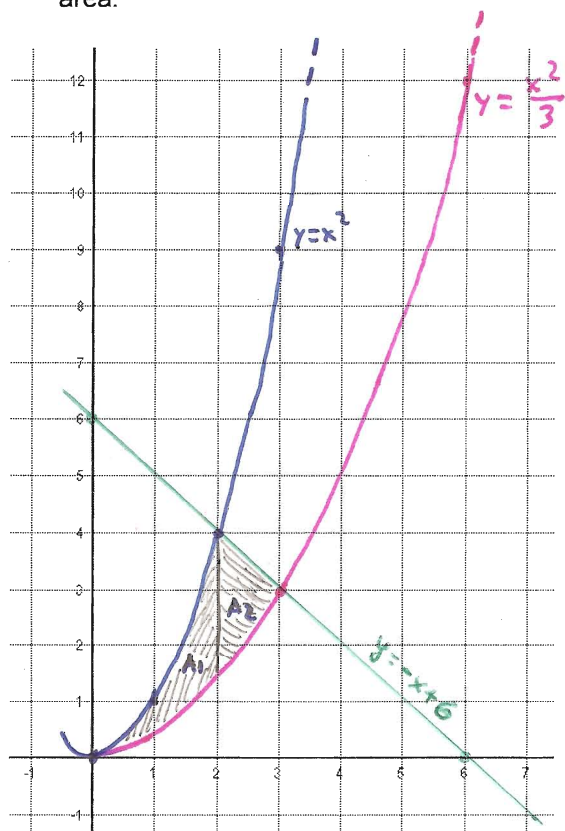
$= \arctg t = \arctg \frac{x-2}{3} \xrightarrow{\text{substitución en } \#} I = x + \ln(x^2 - 4x + 13) - 4 \arctg \frac{x-2}{3} + C$

0,5/

0,25/



2. Dibujar el recinto limitado por las gráficas de  $y=x^2$ ,  $y=x^2/3$  e  $y=-x+6$  en el primer cuadrante y hallar su área. (2,5 ptos.)



|                  |   |   |   |   |     |
|------------------|---|---|---|---|-----|
| x                | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| y=x <sup>2</sup> | 0 | 1 | 4 | 9 |     |

|                     |   |   |    |     |
|---------------------|---|---|----|-----|
| x                   | 0 | 3 | 6  | ... |
| y=x <sup>2</sup> /3 | 0 | 3 | 12 | ... |

|        |   |   |
|--------|---|---|
| x      | 0 | 6 |
| y=-x+6 | 6 | 0 |

0,75 Las abscisas de corte y por lo tanto los extremos de integración, de cada función se ven en las tablas.

nota: se baja 0,25 por no indicar claramente A1 y A2

$$A_1 = \int_0^2 \left( x^2 - \frac{x^2}{3} \right) dx = \int_0^2 \frac{2x^2}{3} dx = \frac{2}{3} \int_0^2 x^2 dx = \frac{2}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2x^3}{9} \Big|_0^2 = \frac{16}{9} u^2 \quad 0,5$$

$$A_2 = \int_2^3 \left[ (-x+6) - \frac{x^2}{3} \right] dx = \int_2^3 \left( -x+6-\frac{x^2}{3} \right) dx = \int_2^3 -x dx + \int_2^3 6 dx - \int_2^3 \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= -\int_2^3 x dx + 6 \int_2^3 dx - \frac{1}{3} \int_2^3 x^2 dx = -\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} = -\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{9} \Big|_2^3 =$$

$$= \left( -\frac{9}{2} + 18 - 3 \right) - \left( -2 + 12 - \frac{8}{9} \right) = -\frac{9}{2} + 15 - 10 + \frac{8}{9} = \frac{-63}{18} + 5 = -\frac{7}{2} + 5 = \frac{3}{2} u^2 \quad 0,75$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{16}{9} + \frac{3}{2} = \frac{59}{18} u^2 \quad 0,5$$



3. Dada  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ , hallar  $A^2$  y razonar justificadamente cuánto valdría  $A^n$ .

(2,5 pts.)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = A^2 \quad 1$$

Nota: se baja 0,25 por cada elemento mal calculado

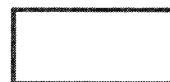
$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$

por inducción

$$A^n = A$$

1,5/ Nota: se baja 1 pto. si se indica  $A^n = A$  pero no se justifica suficientemente



4. (Sept 2006) Sabiendo que  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$ , hallar el valor de  $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix}$  en función de  $x$ .

(2,5 pts.)

$$\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & 2f & 2d \\ h & 2i & 2g \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} = -60 \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} = 60 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 60x \quad 1$$

$$\begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-c & 7c \\ d & e-f & 7f \\ g & h-i & 7i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b-c & 7c \\ 2e & e-f & 7f \\ 2h & h-i & 7i \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 7c \\ d & e & 7f \\ g & h & 7i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c & 7c \\ d & f & 7f \\ g & i & 7i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b & 7c \\ 2e & e & 7f \\ 2h & h & 7i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2b & c & 7c \\ 2e & f & 7f \\ 2h & i & 7i \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7x \quad 1$$

$\circ 17 \cdot C_3 \times C_2$      $\circ 17 \cdot C_1 \times C_2$      $\circ 17 \cdot C_3 \times C_2$

Sustituimos en el enunciado: Soluc:  $60x - 7x = 53x$  0,5

