

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

☐ Mat II en fase general

☐ Mat II en fase específica

☐ No me presento a Mat II

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

.. a) (Sept 1999) $\int x^3 e^{-4x^2} dx = I$ (NOTA: Simplificar al máximo la primitiva obtenida)

(1,25 ptos.)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \longrightarrow du = 2x dx \\ dv = x e^{-4x^2} dx \longrightarrow v = \int x \cdot e^{-4x^2} dx = -\frac{1}{8} \int \boxed{-8x} \cdot e^{\boxed{-4x^2}} dx = -\frac{1}{8} e^{-4x^2} \end{array} \right\}$$

$$I = \frac{-x^2 e^{-4x^2}}{8} - \int -\frac{1}{8} 2x e^{-4x^2} dx = -\frac{x^2}{8 e^{4x^2}} + \frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{8} \int \boxed{-8x} \cdot e^{\boxed{-4x^2}} dx =$$

$$= -\frac{x^2}{8 e^{4x^2}} - \frac{1}{32} e^{-4x^2} = -\frac{x^2}{8 e^{4x^2}} - \frac{1}{32 e^{4x^2}} = \boxed{\frac{-4x^2 - 1}{32 e^{4x^2}} + C_1}$$

b) (Jun 2007) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = I$ (Ayuda: hacer un cambio de variable)

(1,25 ptos.)

cambio de variable: $x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$

$$\Downarrow$$

$$dx = 2t dt$$

$$I = \int \frac{2}{1+t} \cdot 2t dt = 4 \int \frac{t}{1+t} dt = 4 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 4 \left(\int \frac{t+1}{t+1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt \right) =$$

$$= 4 \left(\int dt - \int \frac{1}{t+1} dt \right) = 4 [t - \ln(t+1)] = \boxed{4 [\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] + C_1}$$

$$= 4\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})^4 + C$$

2. Hallar el área de la región acotada limitada por la recta $y=1$ y la gráfica de la función $y = \frac{-5}{x^2-9}$ (2,5 pts.)

Observaciones: 1) No es necesario dibujar completamente la función, pero sí razonar, de forma gráfica o numérica, qué función está por encima y cuál por debajo en dicha región.

- 2) Se recuerda que $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a|$, es decir, el valor absoluto es necesario en este caso para poder aplicar correctamente la regla de Barrow.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{-5}{x^2-9} \\ y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{5}{x^2-9} = 1; \quad x^2-9 = -5; \quad x^2 = 4 \quad \begin{array}{l} \nearrow x = -2 \\ \searrow x = 2 \end{array} \end{array} \quad 0,25$$

Ambas curvas se cortan en -2 y 2 . Luego el recinto que forman está limitado entre esos valores. Para ver cuál de las dos está por encima en dicho recinto damos un valor intermedio, p.ej. $x=0$, a la función:

$$y = \frac{-5}{x^2-9} \xrightarrow{x=0} y = \frac{5}{9} < 1 \Rightarrow \text{la recta } y=1 \text{ está por encima de la función en dicho recinto}$$

$$A = \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{-5}{x^2-9}\right) dx = \int_{-2}^2 \left(1 + \frac{5}{x^2-9}\right) dx = \int_{-2}^2 dx + 5 \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2-9} dx \quad (*)$$

Hacemos aparte la 2ª integral que, por tener su denominador raíces reales, es por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow 1 = A(x-3) + B(x+3)$$

raíces ± 3

$$x=3 \rightarrow 1 = 6B; \quad B = 1/6 \quad 0,25$$

$$x=-3 \rightarrow 1 = -6A; \quad A = -1/6$$

$$A = \int_{-2}^2 dx + 5 \int_{-2}^2 \left(\frac{-1/6}{x+3} + \frac{1/6}{x-3} \right) dx = \int_{-2}^2 dx + 5 \int_{-2}^2 \frac{-1/6}{x+3} dx + 5 \int_{-2}^2 \frac{1/6}{x-3} dx =$$

$$= \int_{-2}^2 dx - \frac{5}{6} \int_{-2}^2 \frac{1}{x+3} dx + \frac{5}{6} \int_{-2}^2 \frac{1}{x-3} dx = \left[x - \frac{5}{6} \ln |x+3| + \frac{5}{6} \ln |x-3| \right]_{-2}^2 = 0,25$$

$$= \left(2 - \frac{5}{6} \ln 5 + \frac{5}{6} \ln 1 \right) - \left(-2 - \frac{5}{6} \ln 1 + \frac{5}{6} \ln 5 \right) = 2 - \frac{5}{6} \ln 5 + 2 - \frac{5}{6} \ln 5 = \left[4 - \frac{5}{3} \ln 5 \right] u^2$$

0,5

0,5

0,5



3. Una empresa produce acero a partir de sus dos materias primas básicas, hierro y carbón. La siguiente matriz muestra la necesidad de ambas materias en los tres cuatrimestres del año, en toneladas:

	mineral de hierro	mineral de carbón
1 ^{er} cuatrimestre	9 t	8 t
2 ^o cuatrimestre	5 t	7 t
3 ^{er} cuatrimestre	6 t	4 t

Existen tres posibles proveedores de dichas materias, cuyos costes en € por tonelada de cada materia vienen dados por la siguiente matriz:

	Proveedor A	Proveedor B	Proveedor C
mineral de hierro	200 €/t	100 €/t	300 €/t
mineral de carbón	200 €/t	300 €/t	100 €/t

- a) Explicar, razonadamente, cómo se obtendría con ellas la matriz que refleja los costes totales de cada proveedor en cada cuatrimestre. (1,5 pts.)

$$\begin{matrix} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{Fe} & \text{C} \\ 9_t & 8_t \\ 5_t & 7_t \\ 6_t & 4_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ 200_{\text{€/t}} & 100_{\text{€/t}} & 300_{\text{€/t}} \\ 200_{\text{€/t}} & 300_{\text{€/t}} & 100_{\text{€/t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3400_{\text{€}} & 3300_{\text{€}} & 3500_{\text{€}} \\ 2400_{\text{€}} & 2600_{\text{€}} & 2200_{\text{€}} \\ 2000_{\text{€}} & 1800_{\text{€}} & 2200_{\text{€}} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{matrix}$$

1,5

Vemos que si multiplicamos la 1^a matriz por la 2^a matriz se obtiene precisamente lo que nos piden, es decir, los costes totales (sumando C y Fe) de cada proveedor (columnas) en cada trimestre (Filas).

NOTA: la otra opción, es decir, multiplicar la 2^a matriz por la 1^a, es posible dimensionalmente pero no conduce a lo que nos piden...

- b) Razonar, a partir de la matriz anterior, cuál es el proveedor más rentable en un año. (1 pto.)

Si sumamos las columnas de la matriz anterior:

$$\begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ 3400_{\text{€}} & 3300_{\text{€}} & 3500_{\text{€}} \\ 2400_{\text{€}} & 2600_{\text{€}} & 2200_{\text{€}} \\ 2000_{\text{€}} & 1800_{\text{€}} & 2200_{\text{€}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 7800_{\text{€}} & 7700_{\text{€}} & 7900_{\text{€}} \\ \text{año} & \text{año} & \text{año} \end{matrix}$$

venos que sale más rentable al proveedor B

1



4. Calcular:

(2,5 pts.)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$F_2 + 2F_1$

$F_3 - 3F_1$
la que cambia
no cambia (pivote)

desarrollamos
por C_2
por Laplace

$$= \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 45 + 84 - 40 - 105 - 9 = \boxed{-15}$$

