I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	**RECUPERACIÓN 1ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A CURSO 2013-2014**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo. No se admitirán ejercicios a lápiz.

1. *(Jun 2005)* Calcular: *(2,5 ptos.)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}^3x+\operatorname{sen}x}$$

0,5/ 0,5/

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+\operatorname{tg}^2x)+6\operatorname{tg}^2x(1+\operatorname{tg}^2x)+\cos x} = \frac{1}{2+1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

0,5/ 0,5/ 0,5/

$\boxed{2{,}5}$

2. *(Jun 2002)* Dada $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$, se pide:

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ ¡LA FUNCIÓN NO ESTÁ DEFINIDA EN $x=0$!
$f(x)$ es simétrica impar pues $f(-x)=-f(x)$

a) Cortes con los ejes. *(0,25 ptos.)*

CORTE EJE X: $y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x^3}=0;\ x^2-1=0;\ x^2=1$ → $x=1 \to \boxed{(1,0)}$ 0,1/ ; $x=-1 \to \boxed{(-1,0)}$ 0,1/

CORTE EJE Y: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{-1}{0}=\nexists \Rightarrow$ $\boxed{\text{no corta al eje } y}$ 0,05/

b) Extremos relativos. *(0,75 ptos.)*

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^{\cancel{3}}-(x^2-1)\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}4}}=\frac{2x^2-3x^2+3}{x^4}=\boxed{\frac{3-x^2}{x^4}}=0 \Rightarrow$$

0,1/ 0,1/

$\Rightarrow 3-x^2=0;\ x^2=3$ → $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ } posibles Max/min 0,1/

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot x^{\cancel{4}}-(3-x^2)\cdot 4\cancel{x^3}}{x^{\cancel{8}5}}=\frac{-2x^2-12+4x^2}{x^5}=\boxed{\frac{2x^2-12}{x^5}}$$

0,1/ 0,15/

$f''(\sqrt{3})=\dfrac{6-12}{(\sqrt{3})^5}=\dfrac{-}{+}<0 \Rightarrow M\left(\sqrt{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ 0,05/ 0,05/ $f(\sqrt{3})=\dfrac{2}{(\sqrt{3})^3}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$f''(-\sqrt{3})=\dfrac{6-12}{(-\sqrt{3})^5}=\dfrac{-}{-}>0 \Rightarrow m\left(-\sqrt{3},-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ 0,05/ 0,05/

Se baja 0,05 por no racionalizar o por usar decimales

c) Puntos de inflexión. *(0,75 ptos.)*

$f''(x)=\frac{2x^2-12}{x^5}=0 \Rightarrow 2x^2-12=0;\ x^2-6=0;\ x^2=6 \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6} \end{cases}$ posibles P.I.

0,15

0,1 0,1

$f'''(x)=\frac{4x\cdot \cancel{x^5}-(2x^2-12)\cdot 5\cancel{x^4}}{x^{\cancel{10}\,6}}=\frac{4x^2-10x^2+60}{x^6}=\frac{60-6x^2}{x^6}$

$f(\sqrt{6})=\frac{6-1}{(\sqrt{6})^3}=\frac{5}{6\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{36}$

0,05 0,15

$f'''(\sqrt{6})=\frac{60-6\cdot 6}{+}>0 \Rightarrow$ P.I. $\left(\sqrt{6}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$ cóncavo-convexo

0,05 0,15

$f'''(-\sqrt{6})=\frac{60-6\cdot 6}{+}>0 \Rightarrow$ P.I. $\left(-\sqrt{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{36}\right)$ cóncavo-convexo

se baja 0,05 por no racionalizar o por usar decimales

d) Asíntotas. *(0,5 ptos.)*

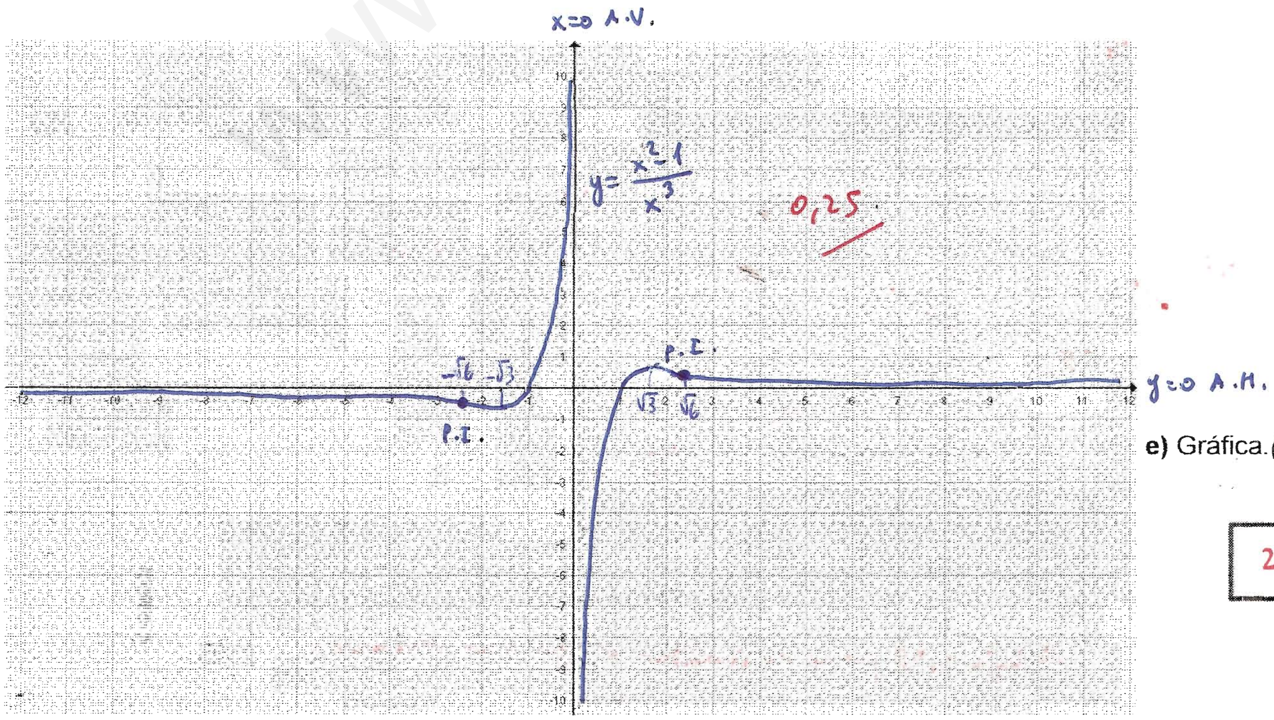
0,05 0,15

¿A.H.? $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3} \overset{\infty/\infty}{\approx} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ A.H.}} \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ A.O.}}$ 0,1

¿A.V.? Vemos que el denominador se anula en $x=0$, no así el numerador; comprobemos, por tanto, si $x=0$ es A.V.:

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{-1}{0}=\infty \text{ ó } -\infty \Rightarrow \boxed{x=0 \quad \text{A.V.}}$

0,05 0,15



e) Gráfica. *(0,25 ptos.)*

2,5

3. Considerar $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - \frac{45}{4}x + \frac{17}{16}$

a) Estudiar si f(x) verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [–2,1]. En caso afirmativo, encontrar **razonadamente** un intervalo de amplitud 1 contenido en el anterior en el que f(x) tenga al menos una raíz. (1,25 ptos.)

0,25 f(x) continua $\forall x \in [-2,1]$ por ser un polinomio

$f(-2) = -32 + 12 + \frac{45}{2} + \frac{17}{16} = -20 + \frac{45}{2} + \frac{17}{16} = \frac{57}{16} > 0$ $\Rightarrow \exists c \in (-2,1) / f(c) = 0$ 0,25

0,25

$f(1) = 4 + 3 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = 7 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = -\frac{51}{16} < 0$

SE BAJA 0,15 si se indica mal

$f(-1) = -4 + 3 + \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = -1 + \frac{45}{4} + \frac{17}{16} > 0$

$f(0) = \frac{17}{16} > 0$

$f(1) = 4 + 3 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = 7 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} < 0$

$\Rightarrow \boxed{\exists c \in (0,1) / f(c) = 0}$ 0,5

SE BAJA 0,25 si se indica mal

b) Estudiar si f(x) cumple las condiciones del teorema de Rolle en [–5/4,7/4]. En tal caso, hallar el valor o valores intermedios que verifican la tesis del teorema. (1,25 ptos.)

f(x) continua $\forall x \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right]$ por ser polinómica

0,25

f(x) derivable $\forall x \in \left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$ pq. $f'(x) = 12x^2 + 6x - \frac{45}{4}$ está definida siempre

$f\left(-\frac{5}{4}\right) = 4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{45}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{17}{16} = -4\cdot\frac{125}{64} + 3\cdot\frac{25}{16} + \frac{225}{16} + \frac{17}{16} =$

$= -\frac{125}{16} + \frac{75}{16} + \frac{225}{16} + \frac{17}{16} = \frac{192}{16} = 12$

0,25

$f\left(\frac{7}{4}\right) = 4\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{45}{4}\cdot\frac{7}{4} + \frac{17}{16} = 4\cdot\frac{343}{64} + 3\cdot\frac{49}{4} - \frac{315}{16} + \frac{17}{16} =$

$= \frac{343}{16} + \frac{147}{4} - \frac{315}{16} + \frac{17}{16} = \frac{192}{16} = 12$

se baja 0,15 si se indica mal

$\Rightarrow \exists c \in \left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) / f'(c) = 0$ 0,25

Vamos a calcular el (o los) pto. intermedio en el que se anula la derivada:

$\boxed{2,5}$

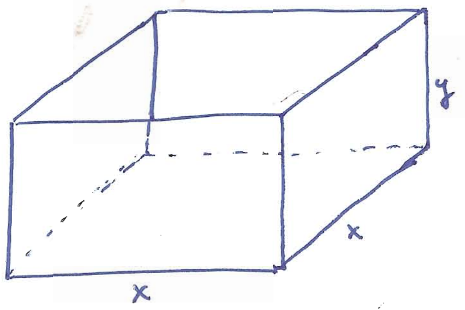
$f'(x) = 12x^2 + 6x - \frac{45}{4} = 0 \Rightarrow 48x^2 + 24x - 45 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 8x - 15 = 0$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 960}}{32} = \frac{-8 \pm \sqrt{1024}}{32} = \frac{-8 \pm 32}{32}$

$x_1 = \frac{24}{32} = \boxed{\frac{3}{4}}$ 0,25

$x_2 = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4}$ descartado pq. $\notin \left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$ 0,25

4. *(Sept 2001)* Hallar las dimensiones de un depósito, abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 m^3 de capacidad, que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m^2 de revestimiento lateral es de 100 €, y del fondo 200 €. **Hallar también dicho coste**. *(2,5 ptos.)*



RESTRICCIÓN: $x^2 y = 1000$ 0,5

FUNCIÓN A MINIMIZAR: $C(x,y) = \underbrace{200x^2}_{\text{precio del fondo}} + \underbrace{4xy \cdot 100}_{\text{precio de cada cara lateral}} = 200x^2 + 400xy$

$$y = \frac{1000}{x^2} \Rightarrow C(x) = 200x^2 + 400x \cdot \frac{1000}{x^2} = 200x^2 + \frac{400\,000}{x}$$

$$C'(x) = 400x - \frac{400.000}{x^2} = 0 \; ; \quad 400x = \frac{400.000}{x^2} \; ; \quad x^3 = \frac{400.0\cancel{00}}{4\cancel{00}} = 1000$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10 \text{ m} \xrightarrow[\text{en } (*)]{\text{sustituimos}} y = \frac{1000}{100} = 10 \text{ m}$$
0,5 0,25

Comprobemos que se trata de un mínimo:

$$C''(x) = 400 - 400.000 \cdot \frac{-2x}{x^4} = 400 + \frac{800.000}{x^3}$$ 0,25

$$C''(10) = 400 + \frac{800.000}{1000} > 0 \Rightarrow \text{se trata de un mínimo}$$ 0,25

Calculemos, por último, el coste de un depósito tal:

$$C(10,10) = \underbrace{200 \cdot 100}_{\text{precio del fondo}} + \underbrace{400 \cdot 100}_{\text{precio de las 4 caras laterales}} = 20.000 + 40.000 = 60.000 \text{ €}$$ 0,5

Soluc: $\boxed{\text{Se trata de un cubo de 10 m. de arista cuyo coste será 60.000 €}}$
0,25

$\boxed{2,5}$