

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. Dada  $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$ , se pide:

a) Hallar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln \frac{x+1}{x+2}}$  (1 pto.)

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{1/x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = 0$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{2x^2 + 6x + 4} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{2x^2} = -\infty$

Sustituimos en (\*): Soluc:  $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

(Nota: Ver en el anexo final otra forma, sin desarrollar el  $\ln$ )

b) Hallar  $f'(x)$  Derivamos  $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$  por derivación logarítmica: (1 pto.)

$\ln y = \ln \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} = x^2 \ln \frac{x+1}{x+2} = x^2 [\ln(x+1) - \ln(x+2)]$

$\frac{y'}{y} = 2x \ln \frac{x+1}{x+2} + x^2 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) = 2x \ln \frac{x+1}{x+2} + x^2 \cdot \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} =$

$= 2x \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}$

$y' = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} \cdot \left(2x \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2 + 3x + 2}\right)$  (\*\*)

(Nota: Ver en el anexo final otra forma, sin desarrollar el  $\ln$ )

- c) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para hallar la ecuación de la tangente a  $f(x)$  en  $x=0$  (0,5 pto.)

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \xrightarrow[\text{en } f(x)]{\text{substituir}} f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \quad 0,1 \\ f'(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(0 \cdot \ln \frac{1}{2} + 0\right) = 1 \cdot 0 = 0 \quad 0,1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ec. de la recta tangente en forma punto-pendiente;} \\ y-1 = 0 \cdot (x-0) \quad 0,1 \\ y-1 = 0 \\ \boxed{y=1} \quad (\text{se trata de una recta horizontal}) \end{array}$$

NOTA: Se da 0,1 si se parte de una derivada incorrecta pero el procedimiento es correcto

0,2

2,5

$f(x)$  es simétrica impar, pues  $f(-x) = -f(x)$ , y esto va a tener consecuencias en los M y m, asíntotas, etc.

2. Dada  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ , se pide:

- a) Hallar los posibles extremos relativos.

(1 pto.)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0; \quad x^2(x^2-3) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x^2=0; \quad x=0 \\ x^2-3=0; \quad x^2=3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 0,1 \\ 0,1 \end{array} \right\} \text{posibles M y m}$$

$$f''(x) = \left[ \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \right]' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

$f''(0) = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow$  este método no decide, y hay que estudiar un posible cambio de signo de  $f'(x)$  en las proximidades de  $x=0$ : 0,1

$$\left. \begin{array}{l} f'(-0,1) = \frac{(-0,1)^4 - 3(-0,1)^2}{(-0,1)^4} = \frac{0,0001 - 0,03}{-0,0001} = \frac{-}{+} < 0 \\ f'(0,1) = \frac{0,1^4 - 3 \cdot 0,1^2}{0,1^4} = \frac{0,0001 - 0,03}{+} = \frac{-}{+} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) \text{ no cambia de signo en las proximidades de } x=0 \Rightarrow x=0 \text{ no es M ni m}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3}}{2^3} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{\text{m}(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})} \quad 0,05$$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^3 + 6(-\sqrt{3})}{2^3} = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow \boxed{\text{M}(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})} \quad 0,05$$

(NOTA: Ver en el anexo o final otra forma, estudiando el signo  $f'(x)$  mediante una tabla.)

b) Hallar los puntos de inflexión, si existen.

(0,75 pto.)

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0$$

$$2x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow 2x = 0; x = 0 \text{ posible P.I.}$$

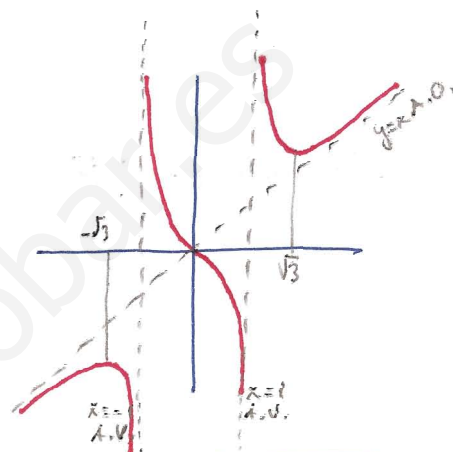
$$x^2 + 3 = 0 \text{ No soluc.}$$

$$f'''(x) = \frac{(6x^2 + 6)(x^2 - 1)^3 - (2x^3 + 6x) \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^6}$$

$$f'''(0) = \frac{6 \cdot (-1) - 0}{-1} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{P.I. (0,0)}$$

NOTA: Se puntúa 0,25 si el P.I. está bien pero  $f'''$  está mal calculada  
Se puntúa 0,1 si el procedimiento es correcto pero se parte de una  $f''$  incorrecta

(NOTA: Ver en el anexo final otra forma, estudiando el signo de  $f''(x)$  mediante una tabla)



(0,75 pto.)

c) Hallar sus posibles asíntotas.

¿A.H.?  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty \Rightarrow \text{A.H.}$

¿A.V.? El denominador se anula en  $x = \pm 1$ , de modo que podemos tener dos A.V. Lo comprobamos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow x = 1 \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = -\infty \Rightarrow x = -1 \text{ A.V.}$$

¿A.O.?  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow y = x \text{ A.O.}$$

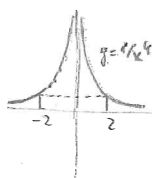
2,5

3. En los ejemplos siguientes  $f(-2)=f(2)$  pero no hay ningún valor  $c \in (-2,2)$  tal que  $f'(c)=0$ . Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^4}$

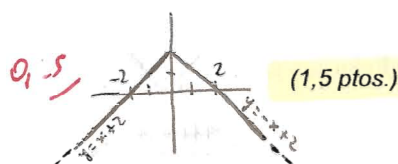
En este caso no existe imagen en  $x < 0 \Rightarrow f(x)$  no es continua en  $x=0$  (1 pto.)

$\Rightarrow f(x)$  no es continua en  $[-2,2] \Rightarrow$  no se verifica la 1ª hipótesis del th. de Rolle



b)  $g(x) = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - (-x) & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

se analiza en  $x=0$



(1,5 ptos.)

Como ocurre siempre con los valores absolutos, esta función es continua en el punto de unión de las dos ramas (puede comprobarse fácilmente) pero no es derivable en dicho punto:

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= (2+x)'_{x=0} = 1 \\ f'(0^+) &= (2-x)'_{x=0} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists f'(0) \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ no es derivable en } (0,2)}$$

por lo tanto no se verifica la 2ª hipótesis del th. de Rolle

2,5

4. Hallar dos números reales positivos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo (Obtener las soluciones con dos decimales de aproximación).

(2,5 ptos.)

Sean  $x$  e  $y$  los dos números pedidos.

Restricción:  $x + y = 8$

Función a maximizar:  $f(x, y) = xy \cdot (x - y)$

$y = 8 - x \Rightarrow (*)$

$y = 8 - x \Rightarrow f(x) = x(8-x) \cdot [x - (8-x)] = x(8-x) \cdot (2x-8) = x(16x - 64 - 2x^2 + 8x) =$

$= x(-2x^2 + 24x - 64) = -2x^3 + 24x^2 - 64x$

$f'(x) = -6x^2 + 48x - 64 = 0$

$3x^2 - 24x + 32 = 0$

$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 384}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{6}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 6,31 \\ x_2 \approx 1,69 \end{cases}$

substituyendo en  $(*)$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \approx 1,69 \\ y_2 \approx 6,31 \end{cases}$

Vemos que ambos pares de números son el mismo; por lo tanto basta con comprobar p.ej. con el primero que se trata de un máximo:

$f''(x) = -12x + 48$ ;  $f''(6,31) < 0 \Rightarrow$  se confirma que se trata de un máximo

Solución: Ambos números son 1,69 y 6,31

2,5

Alumno: ANEXO

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. Dada  $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$ , se pide:

a) Hallar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} = e$  (1 pto.)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln \frac{x+1}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x+2}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(x+2)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(x+1)(x+2)}{-2x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{2x^2+6x+4} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{2x^2} = -\infty \end{aligned}$$

Sustituimos en (\*): Soluc:  $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

b) Hallar  $f'(x)$  Derivamos  $y = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$  por derivada logarítmica: (1 pto.)

$$\ln y = \ln \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} = x^2 \cdot \ln \frac{x+1}{x+2}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \frac{x+1}{x+2} + x^2 \cdot \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = 2x \ln \frac{x+1}{x+2} + x^2 \cdot \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$= 2x \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2+3x+2}$$

$$y' = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} \cdot \left(2x \ln \frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2+3x+2}\right)$$

c) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para hallar la ecuación de la tangente a  $f(x)$  en  $x=0$  (0,5 ptos.)



2. Dada  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ , se pide:

a) Hallar los posibles extremos relativos.

(1 pto.)

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$x$  anula en  $0$  y  $\pm\sqrt{3}$  0,1  
siempre es +

|                                      | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3}, 0)$ | $(0, \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3}, \infty)$ |
|--------------------------------------|------------------------|------------------|-----------------|----------------------|
| signo $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{+}$ | +                      | -                | -               | +                    |
| $f(x)$                               | $\nearrow$             | $\searrow$       | $\searrow$      | $\nearrow$           |

0,3

$$M(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$$

0,25

0,05

$$m(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$$

0,25

0,05

b) Hallar los puntos de inflexión, si existen.

(0,75 ptos.)

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

0,1/

se anula en  $x=0$

se anula en  $x=\pm 1$

|                                                | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|------------------------------------------------|-----------------|-----------|----------|---------------|
| signo $f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$ | -               | +         | -        | +             |
| $f(x)$                                         | -               | +         | -        | +             |

0,25/

no es P.I.  
P.F.  $\nexists f(-1)$

P.I. (op)

no es P.I.  
P.F.  $\exists f(1)$

0,4/

c) Hallar sus posibles asíntotas.

(0,75 ptos.)



3. En los ejemplos siguientes  $f(-2)=f(2)$  pero no hay ningún valor  $c \in (-2, 2)$  tal que  $f'(c)=0$ . Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^4}$

(1 pto.)