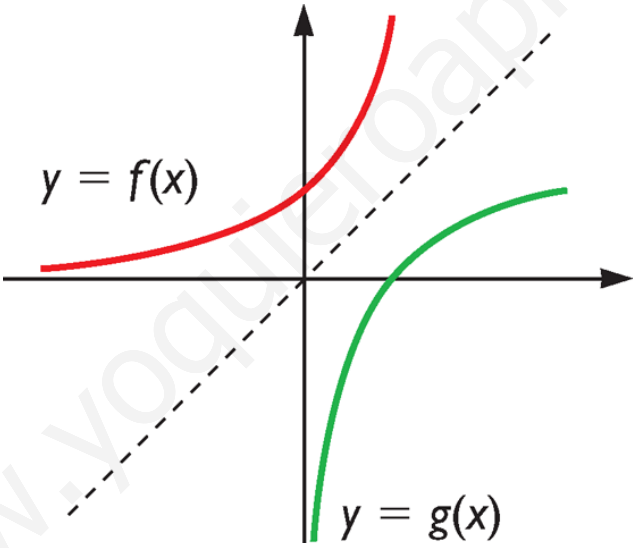
MATEMÁTICAS II

2º Bachillerato CC.NN.



I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I.E.S. FERNANDO DE MENA
DPTO. DE MATEMÁTICAS
CURSO 2013-2014
Profesor: Alfonso González López

Alumno/a: ____________________________

AVISO LEGAL

Del presente texto es autor Alfonso González López, profesor de Matemáticas del IES Fernando de Mena (Socuéllamos, Ciudad Real, España), y tiene una finalidad exclusivamente didáctica, para la divulgación de materiales didácticos relacionados con la materia ***Matemáticas II*** de 2º de Bachillerato de Ciencias Naturales. No tiene fines comerciales ni ánimo de lucro.

No está permitida la reproducción de los contenidos (de cualquier tipo) del presente texto en formato impreso –libro, cuaderno, etc. – o digital –página web, DVD, etc. – con ánimo de lucro, salvo mención expresa de su origen, y contando con el consentimiento expreso del autor, para lo cual podrá contactarse a través del email alfonsogonzalopez@yahoo.es. Sí está permitida la utilización de los materiales didácticos contenidos en el texto para uso particular o en el ámbito académico, siempre y cuando se indique en este último caso expresamente su autoría.

El autor agradecerá que le sean comunicadas a la dirección antes reseñada las posibles erratas que se encuentren en el presente texto, así como sugerencias, aportaciones, etc. a éste.

En el presente texto pueden existir contenidos de terceros. En cualquiera de los casos, y como es intención siempre el respetar los derechos de autor, el trabajo ajeno y las leyes del copyright, en caso de existir cualquier mínimo problema respecto a cualquier material publicado en este texto, se ruega contactar a través del email arriba indicado, y el contenido será retirado (tras ser comprobado) con la máxima celeridad posible.

ÍNDICE

7. DETERMINANTES

8. SISTEMAS de ECUACIONES LINEALES

9. VECTORES

10. RECTAS y PLANOS

11. POSICIONES RELATIVAS de RECTAS y PLANOS

12. ÁNGULOS y DISTANCIAS entre RECTAS y PLANOS

TABLAS

REPASO de LÍMITES de FUNCIONES y CONTINUIDAD

MATEMÁTICAS II   2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) IDEA INTUITIVA DE $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

Ejemplo 1: La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en x=1; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x\to1^-$	0,9	0,99	0,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=$

$x\to1^+$	1,1	1,01	1,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=$

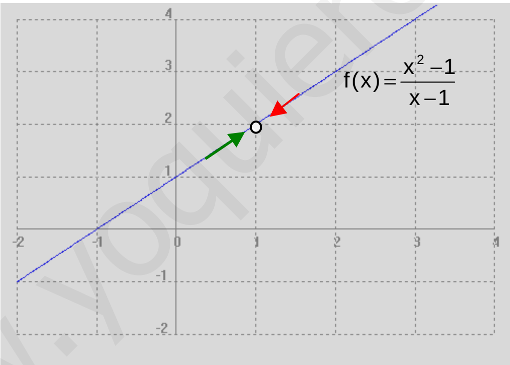
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

Es decir, nótese que la f(x) del enunciado se comporta como la recta y=x+1, salvo en x=1 (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:

GRÁFICAMENTE



Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^-, mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+. Y todo ello es independiente de que, exactamente en x=1, la función no está definida.

■ Conclusiones:

1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.

2º A efectos de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.

3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Dada f(x)=x^2, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim_{x\to 2} f(x)$:

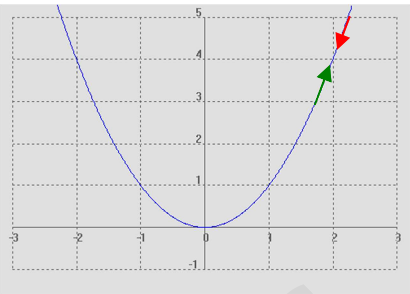
$x\to 2^-$	1,9	1,99	1,999…
f(x)→			

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) =$$

$x\to 2^+$	2,1	2,01	2,001…
f(x)→			

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) =$$

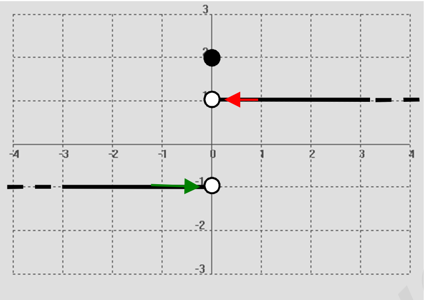
$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) =$$



Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^-, mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+. En este caso, la función sí está definida precisamente en x=2, y su valor es 4; es decir, en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual).

- Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

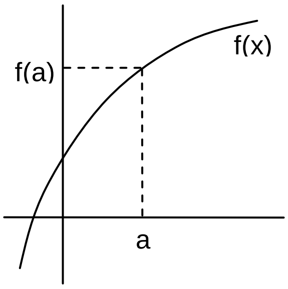
Ejemplo 3: Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim_{x\to 0} f(x)$ gráficamente.



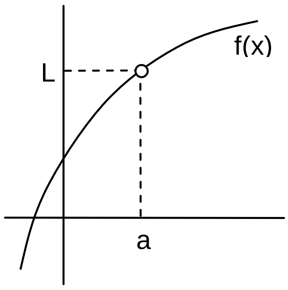
$$\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \;\;1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

En este caso, al acercarnos a x=0^- por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en x=0 no tengan el valor esperado, sino 2; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades…), mientras que al acercarnos a x=0^+ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe**.

- Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando x→a sólo en los tres primeros supuestos:

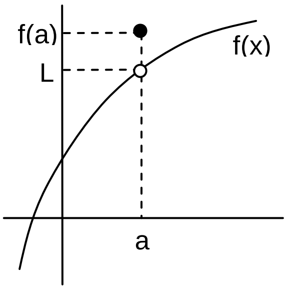


$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

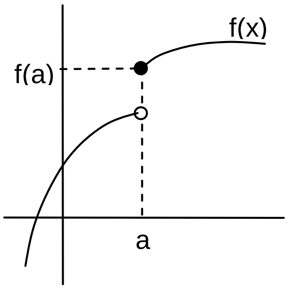


$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

[aunque $\nexists f(a)$]



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a)$



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

[aunque $\exists f(a)$]

Como resumen: **«A efectos gráficos, no va a haber $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ cuando en x=a las dos ramas no coinciden»**

II) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. **ASÍNTOTA VERTICAL** *(Ver pág. 224 del libro de texto)*

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en x=3; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x\to 3^-$	2,9	2,99	2,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

$x\to 3^+$	3,1	3,01	3,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

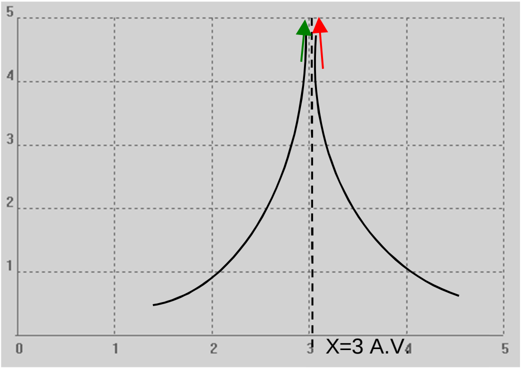
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, se procede así:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(0^-)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(0^+)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

GRÁFICAMENTE

Gráficamente, la situación es la siguiente:



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞, y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞. Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en x=3 la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite:** incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

En el ejemplo anterior, se dice que f(x) presenta una asíntota vertical en x=3.

■ **Observaciones:**

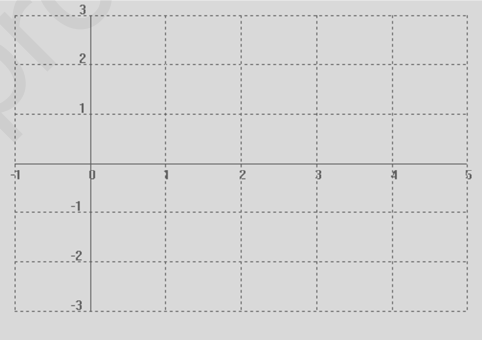
1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos k/0, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^-

2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de lim.

■ **Definición de asíntota vertical:** $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \text{ o } -\infty \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}}$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3}$$



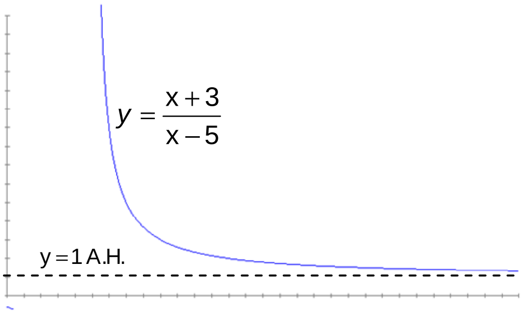
III) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. ASÍNTOTA HORIZONTAL *(Ver págs. 224 y 234 del libro de texto)*

Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x-5}$

x	10	100	1 000	10 000… ∞
$f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$				

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-5} =$$

En la práctica, como x→ ∞, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x, por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:



$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-5} \approx \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$$

Es decir, **cuando x→∞** (o -∞), **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando x→∞ (o -∞)! Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

Gráficamente, la situación es la del gráfico al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+, pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que f(x) presenta una asíntota horizontal de ecuación y=1.

- **Definición de asíntota horizontal:** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(o\,-\infty)}} f(x)=L \Leftrightarrow y=L \ \text{ A.H.}}$

- **Observaciones:** **1º** La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x

  2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.

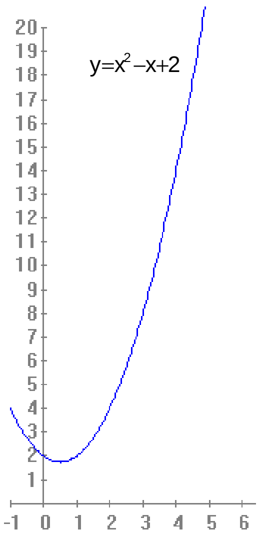
  3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

IV) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. RAMAS INFINITAS *(Ver págs. 226 y 234 del libro de texto)*

Ejemplo 7: Obtener $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x+2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

x	10	100	1 000… ∞
$f(x)=x^2-x+2$			

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(x^2-x+2)=$$



Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando x→∞** (o -∞) **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x+2)\approx\lim_{x\to\infty}x^2=\infty^2=\infty$$

De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando x→∞ (o -∞), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que f(x) presenta una rama infinita.

- **Regla práctica:** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(o\,-\infty)}} P(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(o\,-\infty)}}(\text{tº de mayor grado})}$

V) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES[1] *(Ver pág. 225 del libro de texto)*

1º) «El límite -en caso de existir- es único»

2º) $\boxed{\lim\,[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)}$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

---

[1] Todas estas propiedades son válidas independientemente de que x→∞ o a un valor finito. Su demostración excede el nivel de este curso.

3º) $\boxed{\lim\,[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)}$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

4º) $\boxed{\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}}$ (siempre y cuando lim g(x)≠0)

5º) $\boxed{\lim k = k}$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\boxed{\lim\,[k\cdot f(x)] = k\cdot \lim f(x)}$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\boxed{\lim\,[f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}}$ **Ejemplo:** $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = e^{\infty} = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\boxed{\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}}$

9º) Límite de un logaritmo: $\boxed{\lim \log f(x) = \log \lim f(x)}$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES *(Ver págs. 228 y 229 del libro de texto)*

- **SUMAS Y RESTAS:** $\boxed{\infty + \infty = \infty \qquad \infty + k = \infty \qquad \infty - \infty = \textbf{INDTDO.} \qquad -\infty - \infty = -\infty}$

Nótese que no podemos concluir que ∞-∞ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden[2]; por lo tanto, **el resultado de ∞-∞ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación**. La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x}{2}\right) = \infty-\infty = \textit{INDTDO.} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Es decir, en este caso concreto ∞-∞ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞, o -∞, o incluso no existir.

- **PRODUCTOS:** $\boxed{\infty\cdot\infty=\infty \qquad \infty\cdot(-\infty)=-\infty \qquad -\infty\cdot(-\infty)=\infty \qquad \infty\cdot k = \begin{cases} \infty & \text{si } k>0 \\ \textbf{INDTDO.} & \text{si } k=0^+ \text{ o } 0^- \\ -\infty & \text{si } k<0 \end{cases}}$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \infty\cdot 0 = \text{INDTDO.} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

[2] En el caso de una incógnita, sí es cierto que **a-a**, o **x-x**, etc. es igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de ∞-∞ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

- **COCIENTES:**

$$\frac{\infty}{k}=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \textit{operar y/o hacer } \lim \textit{ laterales} & \text{si } k=0^{+} \text{ o } 0^{-}\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases} \qquad \frac{k}{\infty}=0$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=\textbf{INDTDO} \qquad \frac{0}{0}=\textbf{INDTDO} \qquad \frac{k}{0}=\text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{0}=\lim_{x\to\infty}[(x+2)x]=\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)\approx\lim_{x\to\infty}x^2=\infty^2=\infty$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x+3}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to\infty}3=3$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\textit{INDTDO}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}\quad\left(\text{o bien, }\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}=\pm\infty\right)$$

$$\textbf{e)}\ \lim_{x\to1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{0}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^-)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^+)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\infty$$

- **POTENCIAS:**

$$a^{\infty}=\begin{cases}\infty & \text{si } a>1\\ \textbf{INDTDO.} & \text{si } a=1^{+} \text{ o } 1^{-}\\ 0 & \text{si } 0<a<1\end{cases} \qquad \infty^{n}=\begin{cases}0 & \text{si } n<0\\ \text{INDTDO.} & \text{si } n=0^{+}\text{o}\,0^{-}\\ \infty & \text{si } n>0\end{cases} \qquad 0^{0}=\textbf{INDTDO.}$$

Nótese que $(0^{+})^{\infty}=0$; por ejemplo: $\lim_{x\to0^+}x^{1/x}=0$

- **LOGARITMOS:**

log $0^{+}=-\infty$ log $\infty=\infty$

Ln $0^{+}=-\infty$ Ln $\infty=\infty$

- Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en siete casos:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty\text{-}\infty,\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^{0},\ 0^{0}$$

Ejercicios libro: *pág. 226: 3 y 4*

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty\\(o\,-\infty)}} P(x)=\lim_{\substack{x\to\infty\\(o\,-\infty)}}(\text{tº de mayor grado})}$$

2º) Límites de cocientes de polinomios:

a) $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}}$ «Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y eliminando a continuación el factor x–a que figura repetido en ambos términos de la fracción» *(Ver pág. 239 del libro de texto)*

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=INDTDO=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)}\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x+1}=\frac{6}{3}=2$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 1

Ejercicios libro: *pág. 239: 4; pág. 249 y ss.: 13*

b) $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}}$ «Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio[3]» *(Ver pág. 230 del libro de texto)*

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+2}{2x^2+3x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}2=2$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3}{x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}\approx\lim_{x\to\infty}x=\infty$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0^+$

d) Esta regla se puede generalizar, en ciertos casos a funciones que no sean polinómicas:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x-3}=\frac{\infty}{\infty}=INDTDO\approx\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+5}}{3x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{4/3}}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1/3}}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{3}=\frac{\infty}{3}=\infty$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 2

Ejercicio libro: pág. 249: **2 a, b, c**

3º) Límites de funciones irracionales:

a) $\boxed{\frac{0}{0}}$ «Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado[4] de la expresión radical, y operando a continuación»

---

[3] Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

[4] El conjugado de un binomio radical consiste en cambiar el signo intermedio de éste; por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x}+2$ es $\sqrt{x}-2$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}=INDTDO=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=4$$

Observaciones: 1º Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces (una por cada expresión).

2º Si se trata de dos raíces con distinto índice, tendremos que pasarlas a índice común: *(Ver pág. 239 del libro de texto)*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)\,x}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[6]{(x-2)^2\,x^2}}{\sqrt[6]{(x-2)^3\,(x+3)^3}}=\lim_{x\to 2}\sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{4}{0}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{4}{0^-\cdot 125}}=\sqrt[6]{-\infty}=\nexists\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[6]{\dfrac{x^2}{(x-2)(x+3)^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{4}{0^+\cdot 125}}=\sqrt[6]{\infty}=\infty\end{cases}$$

b) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ «Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva**[5] de x que aparezca en cualquiera de las expresiones»

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}=INDTDO=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}\underset{\searrow\ \frac{2}{\infty}=0^{+}}{\overset{\nearrow\ \frac{4}{\infty}=0^{+}}{=}}\frac{1}{1}=1$$

Obsérvense en el ejemplo anterior dos detalles importantes:

- La x entra dividiendo en una raíz cuadrada también dividiendo, pero al cuadrado.
- El hecho de dividir por la mayor potencia efectiva de x nos garantiza que los límites parciales que aparecen al final serán siempre cero.

En algunos casos -tal y como ya se ha indicado anteriormente-, y con mucho cuidado, podemos despreciar términos de menor orden en un polinomio (siempre y cuando x→∞); por ejemplo, el límite anterior podría calcularse más fácilmente así:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}=INDTDO\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$$

---

[5] El adjetivo «efectiva» alude al hecho de que hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^2-2}$, la x no se comporta como x^2 sino, de forma efectiva, como x

c) $\boxed{\infty-\infty}$ *(Ver pág. 231 del libro de texto)* «Se resuelve:

1º) Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación; en algunos casos (cuando el numerador resultante dependa de x), como la indeterminación no desaparece sino que pasa a ser ∞/∞, además hay que recurrir al siguiente paso:

2º) Dividimos a continuación numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva** de x»

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0^+$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\cancel{\frac{1}{x}}}_{\frac{1}{\infty}=0^+}}+1}=\frac{1}{2}$$

Nótese que en el primer ejemplo ha bastado con aplicar el primer paso del procedimiento, mientras que en el segundo ha habido que aplicar los dos pasos. En ciertos casos, la indeterminación se puede "resolver a simple vista", teniendo en cuenta que los ∞ son de distinto orden, y no es necesario operar. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-x\right)=\infty-\infty=\infty$$

dado que el primer factor se comporta como $x^{3/2}$, y , por tanto, "domina" en el infinito al otro factor. ¡Cuidado! Esto no se podría aplicar, por ejemplo, al siguiente caso:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$$

ya que ambos términos son del mismo orden; aquí no nos quedaría más remedio que operar.

Conclusión: A la hora de "resolver a simple vista" una indeterminación con $\sqrt{\ }$, y sólo en el caso en que x→±∞, podemos despreciar una constante que esté sumando (o restando) a un término en x.

- En los casos en que x→-∞ **y la raíz es de índice par**, se recomienda hacer el cambio de variable z=–x, que hace que z→∞, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\overset{\substack{\text{cambio de variable } x=-z\\ \downarrow}}{=}\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}}{\frac{\sqrt{1+z}}{z}}=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{z^2}{z^2}}}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{z}{z^2}}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\overset{0^+}{\cancel{\frac{1}{z^2}}}+1}}{\sqrt{\underset{0^+}{\cancel{\frac{1}{z^2}}}+\underset{0^+}{\cancel{\frac{1}{z}}}}}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 3

4º) Indeterminaciones que se resuelven operando: *(Ver pág. 240 del libro de texto)*

Algunas indeterminaciones, sobre todo del tipo $0\cdot\infty$ o $\infty-\infty$, se "deshacen" en algunos casos operando. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-6}{x^2-3x}-\frac{1}{x-3}\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{x}{x(x-3)}\right)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x}=\frac{5}{3}$$

Ejercicio final tema (Repaso límites): 4

Ejercicio libro: pág. 240: 6

5º) Indeterminación 1^∞: *(Ver págs. 233 y 240 del libro de texto)*

La indeterminación 1^∞ se puede resolver aplicando la siguiente fórmula[6] práctica:

$$\boxed{\lim f(x)^{g(x)}=1^\infty=e^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}}$$ ¡Válida sólo si es 1^∞!

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=1^\infty=\text{INDTDO}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)(3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-\frac{x^2+2}{x^2+2}\right)(3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)(3x-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}}=e^3$$

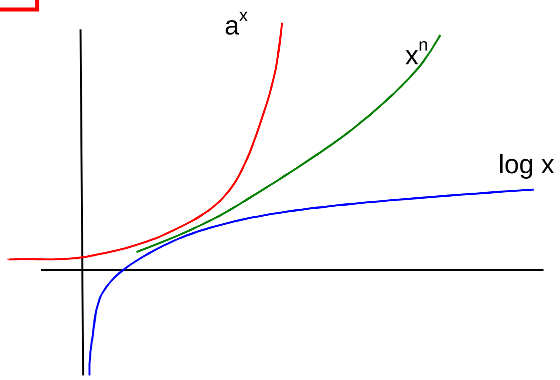
NOTA: En el próximo tema veremos una forma más práctica para resolver, no sólo este caso de indeterminación, sino las tres de tipo exponencial, que se conoce como "Regla de L'Hôpital".

Ejercicios libro: *pág. 233: 5; pág. 240: 7*

6º) Regla práctica: «Cualquier función exponencial (de base > 1) es un infinito de orden superior a cualquier potencia» *(Ver pág. 227 del libro de texto)*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{P(x)}=\infty}\quad\text{o bien,}\quad\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{a^x}=0}\quad(\text{donde } a>1)$$

Por otra parte, «Las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos». Por lo tanto, podemos concluir que, **en el infinito, log x < P(x) < a^x**. Esto es muy fácil de entender si comparamos sus gráficas y observamos su comportamiento en el infinito:



---

[6] Ver demostración en pág. 233 del libro de texto.

Ejemplos: Completar (véase el primer ejemplo):

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2-5x+6} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5}{3^x} =$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x - x^2\right) =$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} =$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{\log x} =$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln x - x^2\right) =$

NOTA: Cualquiera de estos límites puede comprobarse haciendo una tabla.

Ejercicios final tema (Repaso límites): 4 y ss.

Ejercicios libro: *pág. 231: 1 y **2**; pág. 232: 3 y 4; pág. 249 y ss.: 4 a 9, 12, 14, 15 y 19; 10 (f definida a trozos); **25 y 26 (valor absoluto)***

VIII) CONTINUIDAD *(Ver pág. 241 del libro de texto)*

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Es decir: **"Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto"**.

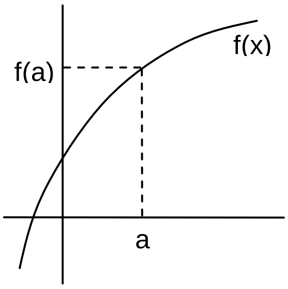
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

1) que exista imagen
2) que exista límite
3) y que ambos coincidan

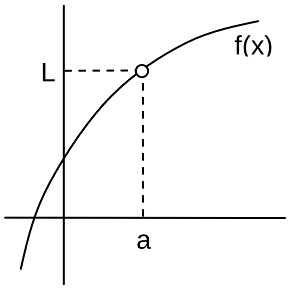
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

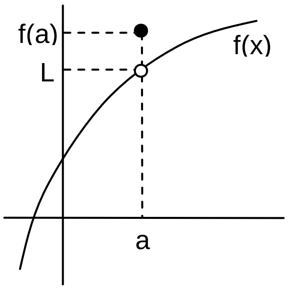
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en x=a, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en x=a sólo en el primer supuesto:



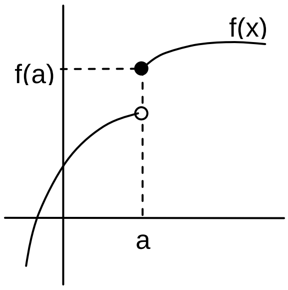
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ f(x) CONTINUA en x=a



$$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(a) \\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f(x) DISCONTINUA en x=a}$$



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a

Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen.

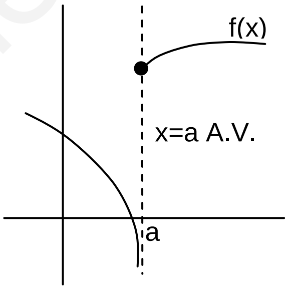
Este hecho conduce a los siguientes **5 tipos de discontinuidades:**

1) Evitable: *«La función no es continua en x=a, pero* $\exists\, \underset{x\to a}{l}\ f$ *finito»*; se llama evitable porque podemos redefinir $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$de modo que la función pasará a ser continua. A este tipo responden los supuestos 2º y 3º anteriores.

2) De 1ª especie: Existen tres tipos:

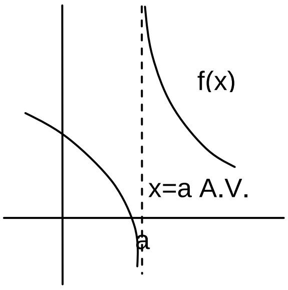
2.1) De salto finito: *«Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden»*. El salto viene dado por la diferencia entre los límites. A este caso pertenece el 4º gráfico.

2.2) De salto infinito: *«Un límite lateral es finito y el otro infinito»*. Se presenta entonces una asíntota vertical, pero por un lado. Gráficamente, la situación es la siguiente:



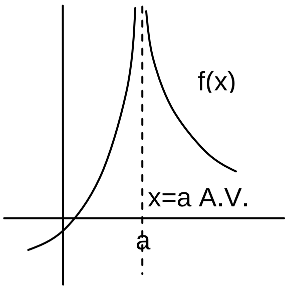
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

2.3) Asintótica: *«Los dos límites laterales son infinitos»*. Se da entonces una asíntota vertical, por ambos lados. Gráficamente, la situación puede ser la siguiente:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

o bien:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

3) Esencial, o de 2ª especie: «*Uno, o los dos límites laterales, no existe*»

NOTA: En la práctica, a la hora de clasificar una posible discontinuidad, basta con decir si es evitable, o, en caso contrario, si es de salto finito, o de salto infinito, o asintótica, o esencial (es decir, no es necesario aludir a la especie).

Reglas para estudiar la continuidad de las funciones más habituales:

1º) «La suma (o resta) de funciones continuas es también una función continua»
«Ídem para el producto»

2º) «Las funciones polinómicas son continuas $\forall x \in IR$»

3º) Función racional: $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ es discontinua en los x que anulan el denominador h(x) (pues entonces no existirá imagen)

4º) Función irracional: $f(x)=\sqrt[par]{g(x)}$ es continua en los x tales que $g(x)\geq 0$ (pues, en caso contrario, no existirá imagen[7]) (NOTA: Si el índice es impar, en principio sería continua $\forall x \in IR$)

5º) Función logarítmica: $f(x)=\log g(x)$ es continua en los x tales que $g(x)>0$ (pues, en caso contrario, no existirá el logaritmo; nótese que en este caso se exige que el argumento del logaritmo sea <u>estrictamente</u> positivo) (NOTA: Esta regla es válida sea cual sea la base del logaritmo)

6º) «**sen x**, **cos x** y $\mathbf{a^x}$ son continuas $\forall x \in IR$»

Ejercicio 1: Dada $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, estudiar su continuidad en x=2

Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\nexists f(2) \Rightarrow$ f(x) es discontinua en x=2 $\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ continua } \forall x \in IR-\{2\}}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Por lo tanto, se trata de discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 4 & \text{si } x=2\end{cases}$$

para que pasara a ser continua en x=2

---

[7] Obviamente, también habría que estudiar la continuidad de g(x) en sí, y lo mismo puede decirse para las siguientes reglas.

Ejercicio 2: Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 5 & \text{si } x=1 \end{cases}$, estudiar su continuidad. Caso de ser discontinua, redefinirla para que pase a ser continua.

Ejercicio 3: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad. Caso de presentar discontinuidades, clasificarlas razonadamente:

a) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\leq 0 \\ \ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Continuidad lateral: Se dice que una función es continua por la derecha bajo la siguiente condición:

$$\boxed{f(x)\text{ continua en } x=a^{+} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)}$$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda.

Observaciones: **1º** Obviamente, $\boxed{f(x)\text{ continua en } x=a^{+}\text{ y } a^{-} \Leftrightarrow f(x)\text{ continua en } x=a}$

2º La continuidad lateral se suele aplicar a funciones definidas por ramas.

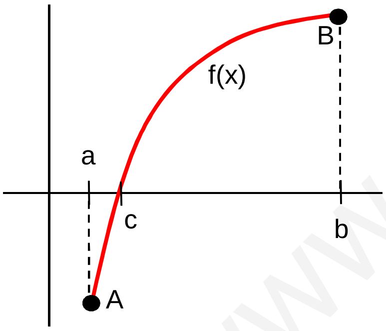
Ejercicios final tema (Continuidad): 1 a 20

Ejercicios libro: *pág. 250 y ss.: 16 y 17 (f definida a trozos); 18, 21, 33 (clasificar discontinuidades); 20 y 28 (f definida a trozos, con parámetro); 23 y 24 (de aplicación real);* ***22 y 27 (valor absoluto)***

Teorema de Bolzano[8]: *(Ver pág. 242 del libro de texto)*

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} f\text{ continua en }[a,b] \\ \text{signo} f(a)\neq \text{signo} f(b)\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)\text{ tal que } f(c)=0}$$

Con palabras: «Si una función es continua en un intervalo cerrado, y toma distinto signo en ambos extremos de dicho intervalo, existirá entonces al menos un punto intermedio de tal intervalo en el que la función se anule»



Interpretación gráfica: Es obvia: Si la función tiene que evolucionar de forma continua desde A hasta B, tendrá que cortar necesariamente al menos una vez al eje x en algún punto intermedio del intervalo (NOTA: Puede existir más de un valor intermedio c que verifique el teorema).

Aplicaciones: Demostración de la existencia de raíces de una ecuación y/o acotación de éstas, comprobar que dos funciones se cortan, comprobar que una función toma un determinado valor, etc. (ver ejercicios).

Ejercicios final tema (Continuidad): 21 y ss.

Ejercicios PAEG: 1 B jun 2009; 1 A jun 2010; 1 A a, b jun 2013; 1 B sept 2011; 1 A b sept 2012

Ejercicios libro: *pág. 243: 1; pág. 252:* ***38****, 39 (acotar raíces); pág. 243:* ***2****; pág. 251:* ***32*** *(comprobar que dos funciones se cortan)*

---

[8] Bernard Bolzano (1781-1848), sacerdote y matemático checo, quien demostró rigurosamente tal teorema.

REPASO LÍMITES 2º BACH.

RECORDAR:

- Para que exista límite de una f(x) en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.
- A efectos del $\lim_{x \to a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe f(a) pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite).
- El límite de la suma es la suma de los límites, y algo parecido ocurre con el producto, cociente, potencia, raíz, logaritmo, etc. Esto es muy útil a la hora de calcular límites.
- **Límites infinitos e indeterminaciones** (*completar, con ayuda del profesor*):

SUMA Y RESTA: $\infty+\infty=$ $\infty+k=$

$\infty-\infty=$ $-\infty-\infty=$

PRODUCTO: $\infty\cdot\infty=$ $\infty\cdot(-\infty)=$ $-\infty\cdot(-\infty)=$ $\infty\cdot k=\begin{cases} & \text{si } k>0 \\ & \text{si } k=0 \\ & \text{si } k<0 \end{cases}$

COCIENTE: $\frac{\infty}{k}=\begin{cases} & \text{si } k>0 \\ & \text{si } k=0 \\ & \text{si } k<0 \end{cases}$ $\frac{k}{\infty}=$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=$ $\frac{0}{0}=$ $\frac{k}{0}=$

POTENCIA: $a^{\infty}=\begin{cases} & \text{si } a>1 \\ & \text{si } a=1 \\ & \text{si } a<1 \end{cases}$ $\infty^{n}=\begin{cases} & \text{si } n<0 \\ & \text{si } n=0 \\ & \text{si } n>0 \end{cases}$ $0^{0}=$ $(0^{+})^{\infty}=$

LOGARITMOS: $\log 0^{+}=$ $\log_a 1=$ $\log_a a=$ $\log \infty=$

$\ln 0^{+}=$ $\ln 1=$ $\ln e=$ $\ln \infty=$

con lo cual los 7 tipos de indeterminación son:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\pm\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}}$$

1. Hallar los siguientes límites (en el 2º miembro figura la solución):

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x-1} = 8$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-x}{x^2-x} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3-5x^2+8x-4} = 4$

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9} = \pm\infty$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \pm\infty$

i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = 4$

j) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2-5x+10} = -4$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x^5} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3x^4} = \infty$

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-2x-21}{x\,(x-3)} = \dfrac{25}{3}$

n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-1}{x-1} = \pm\infty$

o) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2-4x-8}{x^2-3x+2} = 12$

p) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}}{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{a^3}} = \dfrac{2}{3}a$

q) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = -2$

r) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

s) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{2}{x}-2}{x-1} = -2$

2. Ídem:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-x+1}{4x^2+2} = \dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+x+1}{x-2} = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{x^2+x+2} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4-1}{x^3+2} = \infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-2x}{x+1} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+x+3}{x} = \infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3-x}{2x^3+2x} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^x =$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x}{2^x} =$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8^x}{2^{2x}} = \infty$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{8^x}{2^{2x}} =$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x+2}{x^5+7x^2+3} = 0$

m) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^6} = 0$

n) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}\right) = -2$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x^3} = 0$

p) $\lim\limits_{x \to \infty} 5^{-x} = 0$

q) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-2x}{5x^2+x} = \dfrac{3}{5}$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3-3x^2+5}{3x^3+2x^2-3x-1} = \dfrac{5}{3}$

s) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2x}{x^2-1} = 1$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4+x^2+x}{3x^4+2} = \dfrac{1}{3}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^7+6x^2-2x}{3x^2+4x^4+1} = \infty$

v) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\mathrm{Ln}(2x+3)-\mathrm{Ln}(2x-1)\right] = 0$

3. a) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2x^2-3x+5}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-2x^3+3x^2-5}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3x^3-2x+5}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{-2x^3+3x-7}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+\sqrt{x+7}}{x^2+3x} = 3$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \dfrac{1}{2}$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5}{\sqrt{x^4-3}} = \infty$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x-\sqrt{x^2-x}\right) = \dfrac{1}{2}$

Contactar en: alfonsogonzalopez@yahoo.es

k) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3} = \dfrac{1}{24}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+2x}+x}{2x-3} = \nexists$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x}{2x-3} = 0$

n) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}} = 0$

(Ayuda: Reducir a índice común)

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right) = \dfrac{3}{2}$

p) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-4}} = \infty$

q) $\lim\limits_{x \to \infty} (4x+2)\sqrt{2x^2-3} = \infty$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \infty$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = 1$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2-6x}} = \dfrac{3}{2}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5x^3-2x}}{2x+5} = \infty$

v) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right) = \infty$

w) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^4-3x^2}-\dfrac{x^2}{x+2}\right) = \infty$

x) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+3} = 1$

y) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-3} = \infty$

z) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$

α) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) = \dfrac{a}{2}$

β) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = -1$

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x+\sqrt{x^2+x}\right) = -\infty$

δ) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \infty$

ε) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} = 16$

ζ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$

η) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = 0$

θ) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

ι) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1+\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{2}$

κ) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2x}-\sqrt{x}}{2} = \infty$

λ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \nexists$

μ) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2} = \dfrac{2}{3}$

(Ayuda: Aplicar el conjugado dos veces)

ν) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+x+1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{3}{x}\right) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right) = \pm\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{(x+1)^3}{(x-3)^2}-\dfrac{(x+2)^2}{x-3}\right] = \infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x^2-1}\right) = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right) = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^x$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^x$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = 0$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^x - x^3\right)$

m) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^5 - 2^x\right)$

n) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x-1} = \dfrac{1}{e^4}$

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+3} = e^2$

p) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x = e^{-3}$

q) $\lim\limits_{x \to 6} \left(\dfrac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} = e^{7/2}$

r) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{x^2-3}$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{\ln x}$

v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^x}{\ln x}$

w) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4^n}{3^{n-1}} = \infty$

x) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2^x - \sqrt{x^2+1}\right)$

y) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x - x)$

z) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$

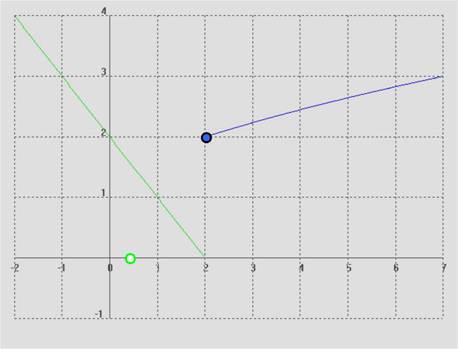
α) $\lim\limits_{x \to \infty} (\log x)^{1-3x} = 0$

β) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

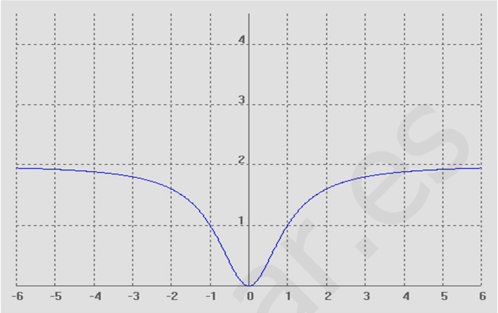
γ) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$

5. Dadas las siguientes funciones, obtener: **i)** Los límites que se indican. **ii)** La ecuación de las posibles asíntotas. **iii)** Dom(f) e Im(f):

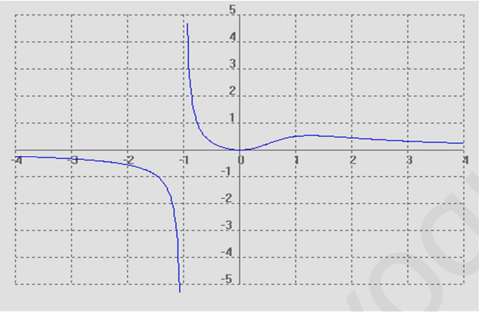
a)
$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x<2\\ \sqrt{x+2} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x);\ \lim_{x\to \infty} f(x);\ \lim_{x\to 2} f(x)$$



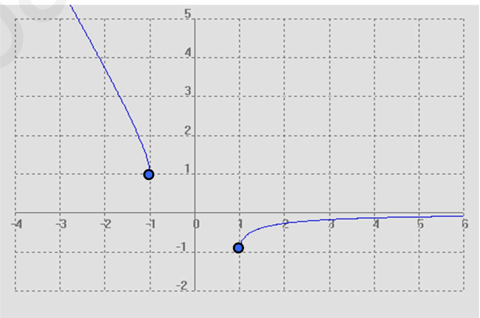
b)
$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x);\ \lim_{x\to \infty} f(x);\ \lim_{x\to 1} f(x)$$



c)
$$f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x);\ \lim_{x\to \infty} f(x);\ \lim_{x\to -1} f(x);\ \lim_{x\to 1} f(x)$$



d)
$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-x$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x);\ \lim_{x\to \infty} f(x);\ \lim_{x\to -1^-} f(x);\ \lim_{x\to 1^+} f(x)$$



6. Dada la función
$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x^2+3x}{5-x} & \text{si } x\in(0,3)\\ \dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x\in(3,5]\\ x & \text{si } x\in(5,7)\\ 3 & \text{si } x\geq 7\end{cases}$$

se pide (por este orden): **a)** f(0), f(3), f(5) y f(7)

b) $\lim_{x\to 0} f(x);\ \lim_{x\to 3} f(x);\ \lim_{x\to 5} f(x);\ \lim_{x\to 7} f(x);\ \lim_{x\to \infty} f(x);\ \lim_{x\to -\infty} f(x)$

c) Representación gráfica

d) Dom(f) e Im(f)

7. Calcular los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Representarlas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x\le 0\\ x & \text{si } x>0\end{cases}$ en x=0

b) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x\le 0\\ 1-2x & \text{si } 0<x\le 1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$ en x=0 y x=1

c) f(x)=|x−5| en x=5

d) $f(x)=|x|-\dfrac{x}{x+1}$ en x=0 y x=−1

(Soluc: a) $\nexists$*; b) 1 y* $\nexists$*; c) 0; d) 0)*

8. Calcular los valores del parámetro **a** para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3ax^3-5x+1}{10x^3+5}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax+1}-x=2$

(Soluc: a=−10/3; a=4)

9. Comprobar los siguientes límites construyendo una tabla apropiada mediante calculadora:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x-2)^2}=0$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3x+2}=\dfrac{1}{3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen } x}{x}=1$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{sen } x}{x}=0$

(S) 10. Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x\le 1\\ ax+3 & \text{si } 1<x\le 2\\ bx^3-2 & \text{si } x>2\end{cases}$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en x=1 y x=2

(Soluc: a=−1, b=3/8)

(S) 11. Dar un ejemplo de una función f(x) definida para todo x que no tenga límite cuando x→2

(S) 12. Discutir $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{ax}\right)$ en función de los valores del parámetro **a**

(Soluc: 0 si a=3; -∞ si a>3; ∞ si a<3)

31 EJERCICIOS de CONTINUIDAD 2º BACH.

RECORDAR:

$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$ Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

1) que exista límite
2) que además exista imagen
3) y que ambos coincidan

1. Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x\text{-}2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ se pide: **a)** Representación gráfica.

b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en x=2

c) A la vista del apartado anterior, indicar su continuidad.

2. Ídem con $f(x)=\sqrt{x}$ en x=0

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\text{sen } x}$

e) $f(x)=\sqrt{x-3}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ **g)** $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **h)** f(x)=tg x

i) f(x)=log (x+3) **j)** $f(x)=\ln(x^2-4)$ **k)** $f(x)=\ln(x^2+4)$

*(Soluc: **a)** discont. asintótica en x=2; **b)** discont. asintótica en x=2 y x=3; **c)** continua $\forall\Re$; **d)** discont. asintótica en x=n·π donde $n\in Z$; **e)** continua en (3,∞); **f)** continua en (-∞,-2) ∪ (3, ∞); **g)** continua $\forall\Re$; **h)** discont. asintótica en x=(2n+1)· π/2; **i)** continua en (-3,∞) ; **j)** continua en (-∞,-2) ∪ (2, ∞); **k)** continua $\forall\Re$)*

4. TEORÍA: Si una función no está definida en x=3, ¿puede ocurrir que $\lim_{x\to 3} f(x)=5$? ¿Puede ser en ese caso continua en dicho punto? Completar los razonamientos añadiendo ejemplos.

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (en caso de presentar discontinuidades, decir de qué tipo se tratan):

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \in (-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x \in (2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ **e)** $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$ **f)** $f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1\le x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\le x<4 \\ 0 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$ **h)** $f(x)=\begin{cases} x\text{-}1 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ x^2\text{-}1 & \text{si } x\in(1,2] \\ x^2 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$ **i)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x\in(-\infty,-3] \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in(-3,0] \\ e^x & \text{si } x\in(0,\infty) \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x\le 0 \\ \text{Ln}\,x & \text{si } 0<x<4 \\ 2^x & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$

*(Soluc: **a)** discont. de salto finito en x=0; **b)** discont. evitable en x=0; **c)** discont. evitable en x=2; **d)** continua* $\forall\,\Re$*; **e)** discont. asintótica en x=0 y de salto finito en x=1; **f)** discont. de salto finito en x=1; **g)** discont. de salto finito en x=3 y x=4; **h)** discont. de salto finito en x=2; **i)** discont. de salto finito en x=–3; **j)** discont. de salto* ∞ *en x=0 y de salto finito en x=4)*

6. ***(S)*** Probar que la función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en x=1 e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists f(1)$*; discontinuidad evitable)*

7. Considerar la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto? ¿Por qué?

b) En x=1 la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: discontinua en x=1 pues $\nexists f(1)$*; basta hacer f(1)=2)*

8. ***(S)*** La función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en x=1. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de f(1), resultando así una función continua. Indicar también la expresión de la nueva función resultante.

(Soluc: a=–3; f(1)=6)

9. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\ne 3 \\ k & \text{si } x=3 \end{cases}$$

sea continua $\forall\,\Re$ *(Soluc: k=6)*

10. Clasificar las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$$

(Soluc: discont. de salto finito en x=-1; discont. evitable en x=2)

11. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x\neq 1/2\\ -5/3 & \text{si } x=1/2\end{cases}$$

(Soluc: discontinua inevitable en x=2)

12. Estudiar la continuidad de la siguiente función, expresarla como función a trozos y representarla:

$$f(x)=2x+\frac{|x|}{x}$$

(Soluc: discont. de salto finito en x=0)

13. ***(S)*** Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$, y representarla en dicho caso:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 2\\ 3-ax^2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

(Soluc: a=0)

14. ***(S)*** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\text{Ln } x & \text{si } x\in(0,1)\\ ax^2+b & \text{si } x\in[1,\infty)\end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua y f(2)=3.

(Soluc: a=1 y b=-1)

15. ***(S)*** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\leq x<1\\ 2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función en dicho caso.

(Soluc: a=3 y b=-1)

16. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\leq 1\\ mx+n & \text{si } 1<x\leq 3\\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3\end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua. *(Soluc: m=3, n=1)*

17. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x\in(-\infty,-2) \\ ax+2 & \text{si } x\in[-2,2] \\ x^2+b & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$$

(Soluc: a=–3/2, b=–5)

18. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\leq x<2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=-2, b=1)

19. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x<-1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\leq x<3 \\ cx & \text{si } 3\leq x<5 \\ 10 & \text{si } x\geq 5 \end{cases}$$

(Soluc: a=–52, b=54, c=2)

20. La siguiente función se llama *Función de Dirichlet*[1]:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in II \\ 1 & \text{si } x\in Q \end{cases}$$

No es una función elemental, ya que es discontinua en todos sus puntos. Razonarlo.

Teorema de Bolzano[2]:

RECORDAR:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{f(x) continua en [a,b]} \\ \text{signo f(a)} \neq \text{signo f(b)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)\,/\,f(c)=0}$$

Se utiliza para demostrar la existencia de raíces de una ecuación en un intervalo.

21. Demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene al menos una solución en el intervalo [0,1] (NOTA: En todos estos problemas, y de cara a la PAEG, enunciar previamente el teorema, y dar al final del ejercicio una interpretación gráfica del resultado).

---

[1] En honor al matemático alemán Johann Dirichlet (1805-1859), que fue quien la ideó.

[2] Bernard Bolzano (1781-1848), sacerdote y matemático checo, demostró rigurosamente tal teorema.

22. ***(S)*** Demostrar que la ecuación $\pi^x = e$ tiene una solución en el intervalo (0,1). ¿Cuál es?

(Soluc: x=1/ln π)

23. Dada la función $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$, puede comprobarse fácilmente que en el intervalo [0,2] toma imágenes de distinto signo, y, sin embargo, nunca se anula en el interior de dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razonar la respuesta.

24. Demostrar que la ecuación x=cos x tiene al menos una solución en el intervalo (0,1)

25. Probar que la ecuación $x^3=3x+40$ tiene alguna raíz real. Aproximar su valor (por tanteo) hasta las décimas.

(Soluc: x≃3,7)

26. **a)** Demostrar que la ecuación $3x^3-14x^2+3x+20=0$ tiene al menos una raíz en [1,2]

b) Obtener todas sus raíces por Ruffini, y comprobar la validez de lo obtenido antes.

27. **a)** Probar que la función $f(x)=x^4-2x^3-5$ corta al eje x en el intervalo (-2,-1)

b) Buscar otro intervalo en el que exista una solución de la ecuación $x^4-2x^3-5=0$ y aproximar su valor hasta las décimas.

28. Probar que las gráficas de Ln x y e^{-x} se cortan en algún punto. Comprobarlo gráficamente.

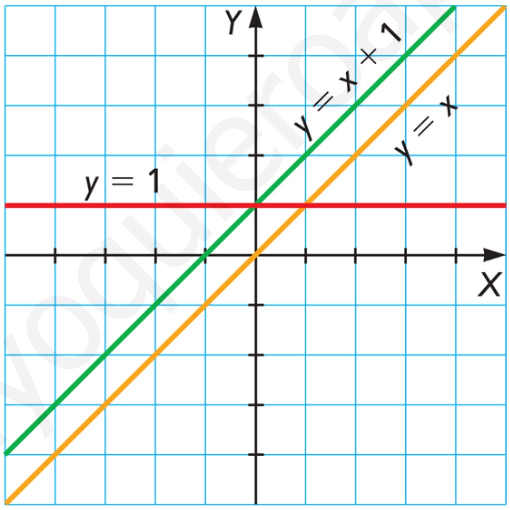
29. Probar que las gráficas de f(x)=sen x y g(x)=1/x se cortan en algún punto del intervalo (2π,5π/2)

30. Razonar que la ecuación x=ln x carece de solución.

31. Probar que $f(x)=x^3+x-5$ toma alguna vez el valor 20

DERIVADAS

APLICACIONES



MATEMÁTICAS II   2º Bachillerato

Alfonso González

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO *(ver pág. 256 del libro de texto)*

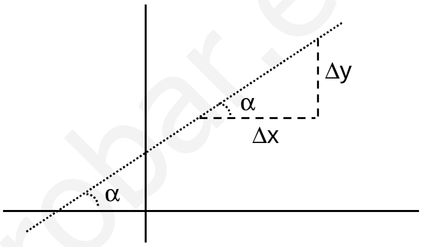
En este tema vamos a repasar y, naturalmente, ampliar, un operador matemático muy útil ya visto en el curso pasado, llamado ***derivada de una función***, que operaba sobre una función y daba como resultado otra función (normalmente más simple). Su utilidad radica en que, como ya vimos someramente el curso pasado, el signo de la derivada de una función en un punto nos decía si la función era creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitía deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales, y que veremos en este tema: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

Concepto previo: pendiente de una recta

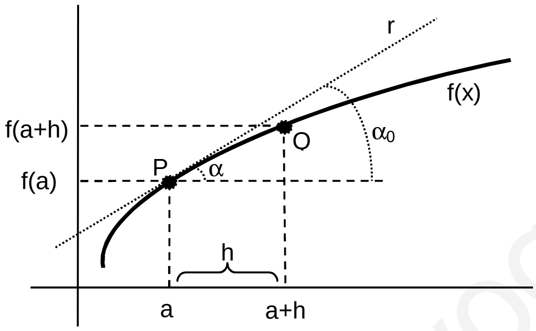
Para entender qué es la derivada necesitamos repasar previamente en qué consistía la pendiente de una recta:

La pendiente de una recta, que suele llamarse **m**, mide la inclinación de ésta, y se define como el cociente incremental siguiente:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\,\alpha \qquad (1)$$



Derivada de una función en un punto f'(a):



Consideremos una función f(x) y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa x=a. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación…); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento $\overline{PQ}$ con la horizontal:

$$tg\,\alpha=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

Si h→0, el segmento $\overline{PQ}$ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva f(x) en x=a, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$tg\,\alpha_0=\lim_{h\to 0} tg\,\alpha=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)} \qquad (3)$$

por (2) por definición

Debido a (1), la fórmula anterior, que en el fondo es un cociente incremental, nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a. Esta fórmula se conoce como derivada de la función f(x) en el punto x=a, y se designa como f '(a); por lo tanto:

«La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto», y se calcula mediante el límite dado por (3)[1]

---

[1] Por lo tanto, veremos en el apdo. V que la derivada nos permitirá hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero[2]. Como veremos en el próximo tema, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:

Supongamos que hacemos el cambio de variable a+h=x ⇒ si h→0, entonces x→a, con lo cual (3) queda como:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\qquad(4)$$

Esta fórmula es, sin duda, más cómoda que (3), y es la que más usaremos.

3º) **«Una función es derivable en un punto x=a si ∃ f '(a)»**

4º) **«Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»**

Ejercicios final tema (Repaso derivadas): 1, 2 y 3

Ejercicio libro: pág. 276: 31

II) FUNCIÓN DERIVADA f ´(x) *(ver pág. 258 del libro de texto)*

Supongamos que nos piden la derivada de una función en, por ejemplo, diez puntos distintos. ¿Haremos diez límites? Es evidente que no; para evitar tanto trabajo, vamos a definir la función derivada, que se designa como f '(x), y es la derivada en un punto genérico x (y sustituiríamos a continuación en ella cada uno de los diez puntos); por lo tanto, se obtendrá reemplazando en (3) **a** por **x**:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\qquad(5)$$

Observaciones:

1º) La función derivada, es decir, el límite anterior, da como resultado una función. Habitualmente abreviaremos diciendo simplemente derivada en vez de función derivada.

2º) En Física se utiliza la siguiente notación incremental: $\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, o bien, p. ej. $\boxed{v=\frac{ds}{dt}}$

3º) La notación que nosotros seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama f(x), entonces su derivada la denotaremos como f '(x)
- " " " " " " " y, " " " " " " y '

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

Ejercicios final tema (Repaso derivadas): 4, 5 y 6

Ejercicio libro: pág. 276: 32 (Se recomienda ver el ejercicio resuelto 1 de la pág. 271)

---

[2] Como veremos en el próximo tema, los puntos en que la derivada se anule resultarán muy interesantes, ya que serán los máximos o mínimos de la función.

III) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES *(pág. 259 libro de texto)*

III.1) Función constante: $\boxed{y = K \rightarrow y' = 0}$

Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas, para lo cual nos remitimos al libro de texto. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla del final del tema.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) $y = 2$

b) $y = -3$

c) $y = \frac{1}{2}$

d) $y = 0$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $y = \pi$

g) $y=0,5$

III.2) Función identidad: $\boxed{y = x \rightarrow y' = 1}$

III.3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y = K \cdot x \rightarrow y' = k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) $y = 2x$

b) $y = -5x$

c) $y = 0,01x$

d) $y = \frac{x}{2}$

e) $y = x$

f) $y = \frac{2}{3}x$

g) $y = -x$

h) $y = -\frac{5x}{3}$

i) $y = 7x$

III.4) Derivada de una potencia: $\boxed{y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}}$ (donde $n \in$ IR)

Esta fórmula la demostraremos más adelante, en el apartado III.14, por derivación logarítmica (ver demostración en el libro, pág. 267)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$

b) $y=x^3$

c) $y=x^4$

d) $y=x^5$

e) $y=x^{100}$

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}$

a)

b)

Ejercicio 5: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones, pasándolas previamente a forma de potencia:

a) $y = \sqrt[3]{x}$

b) $y = \sqrt[4]{x^3}$

c) $y = \sqrt[5]{x^2}$

d) $y = x^2\sqrt{x}$

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$

Generalización de la fórmula anterior a una función compuesta:

$$\boxed{y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'} \quad \text{(donde } n \in \text{IR)}$$

(Esta fórmula la aplicaremos más adelante, en el ejercicio 8)

III.5) $\boxed{y = K \cdot u \rightarrow y' = k \cdot u' \quad \text{donde } u \text{ es función}}$, es decir, **«Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada»**

(Ver demostración en pág. 266 del libro de texto)

NOTA: Este es un caso particular de lo que se conoce como "Derivada de la función compuesta" o "Regla de la cadena" (ver pág. 265 del libro de texto), según la cual la derivada de una función compuesta a su vez de u(x) es como la derivada de la función simple, pero multiplicada por u'. Este hecho se da en casi todos los casos de la columna derecha de la tabla de derivadas.

Ejercicio 6: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^3$

c) $y = -2x^4$

d) $y=\frac{x^2}{2}$

e) $y = -x^5$

f) $y=\frac{2}{3}x^6$

g) $y = -x$

h) $y=3\sqrt[3]{x^4}$

i) $y=\frac{\sqrt[4]{x}}{2}$

j) $y=-\frac{3x^4}{2}$

k) $y = -2x^7$

l) $y=\frac{x^3}{3}$

m) $y=2x\sqrt[5]{x}$

III.6) Derivada de la suma (resta):

$$\boxed{y=u\pm v\rightarrow y'=u'\pm v' \quad \text{donde } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son funciones}}$$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

(Ver demostración en pág. 265 del libro de texto)

Obviamente, esta regla se puede generalizar a más de dos sumandos; de hecho, combinada con las reglas anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 7: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 – 2$

d) $y = x –2$

e) $f(t) = 3t – 5$

f) $y = 3x^2 – x^4$

g) $y = 2x^3 – 3x^4$

h) $y = 2x^4 – x^2 + 3$

i) $y = –3x^5 + 4x^3 – x + 2$

j) $y = x^3 – 3x^2 + 5x – 8$

k) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

l) $y=\frac{x^4}{2}+5x$

m) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{5}-\frac{1}{2}$

n) $y=x^5-\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{6}-3x^2+\frac{x}{3}$

o) $y=\frac{x^4+x^2}{2}$

p) $y = 0{,}05x^3 – 0{,}001x^2 + 0{,}1x – 0{,}02$

q) $y=\frac{3x^6-x^3+6x-5}{3}$

r) $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}$

III.7) Derivada del producto: $\boxed{y=u\cdot v \to y'=u'v+u\,v'}$

Esta fórmula la demostraremos más adelante, en el apartado III.14, por derivación logarítmica (ver demostración en el libro, pág. 266).

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y=u\cdot v\cdot w \to y'=u'v\,w+u\,v'\,w+u\,v\,w'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 8: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x+3)(3x-2)$ [de 2 formas]

b) $y = (x-2)(x+3)$

c) $y = (2x+3)(x-5)$

d) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$

e) $y = (2x-3)^2$ [de 2 formas]

f) $y = (x+2)^2$

g) $y = (1{,}2-0{,}001x^2)x$

h) $y = (2x-3)^2$

i) $f(t) = 300t(1-t)$

j) $y = (3x-2)(2x-3)(x+5)$

k) $y = (x^2-x+2)^3$

l) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

m) $y = \sqrt[4]{x^3}\,(2x-3)$

III.8) Derivada del cociente:

$$\boxed{y=\frac{u}{v} \to y'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}}$$

Esta fórmula la podremos demostrar más adelante, en el apartado III.14, por derivación logarítmica (ver demostración en el libro, pág. 267).

Ejercicio 9: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{2x-3}{3x+2}$

b) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

c) $y=\frac{x+3}{x-3}$

d) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

e) $y=\frac{x^2+x+1}{x}$

f) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$

g) $y=3\frac{x^2-1}{x-2}$

Ejercicios final tema (Repaso derivadas): 7 a 12

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 1 a 28

III.9) Derivada del logaritmo:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{y=\log_a x \to y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\cdot \mathrm{Lna}}} \arrow[r, "\text{GENERALIZACIÓN}"] \arrow[d, "\text{La más utilizada es la base } \mathbf{e}"] & \boxed{y=\log_a u \to y'=\frac{u'\cdot\log_a e}{u}=\frac{u'}{u\cdot \mathrm{Lna}}} \\
\boxed{y=\mathrm{Ln}\,x \to y'=\frac{1}{x}} \arrow[r, "\text{GENERALIZACIÓN}"] & \boxed{y=\ln u \to y'=\frac{u'}{u}}
\end{tikzcd}$$

(DEM: pág. 267 libro)

(DEM: pág. 266 libro)

Observaciones:

1º) Recordar del tema de logaritmos del curso pasado que, debido a la llamada "Fórmula del cambio de base", $\log_a e \cdot \text{Ln } a=1$

2º) En algunos casos se recomienda, antes de derivar, desarrollar –siempre que se pueda- aplicando las propiedades de los logaritmos (por ejemplo, en el ejercicio 33)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 29 a 34

III.10) Derivada de la función exponencial:

$$\begin{tikzcd} \boxed{y=a^x \rightarrow y'=a^x\cdot \text{Ln}a} \arrow[r, "\text{GENERALIZACIÓN}"] \arrow[d, "\text{Caso particular: a=e}"] & \boxed{y=a^u \rightarrow y'=u'\cdot a^u\cdot \text{Ln}a} \\ \boxed{y=e^x \rightarrow y'=e^x} \arrow[r, "\text{GENERALIZACIÓN}"] & \boxed{y=e^u \rightarrow y'=u'\cdot e^u} \end{tikzcd}$$

(DEM: pág. 267 libro)

(DEM: pág. 267 libro)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 35 a 40

III.11) Derivada de las funciones trigonométricas:

$$\boxed{y=\text{sen}x \rightarrow y'=\cos x} \xrightarrow[\text{GENERALIZACIÓN}]{} \boxed{y=\text{sen}u \rightarrow y'=u'\cdot\cos u}$$

(DEM: pág. 267 libro)

$$\boxed{y=\cos x \rightarrow y'=-\text{sen}x} \Longrightarrow \boxed{y=\cos u \rightarrow y'=-u'\cdot\text{sen}u}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\text{tg}x \rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\text{tg}^2x;\left(=\sec^2 x\right)} \Longrightarrow \boxed{y=\text{tg}u \rightarrow y'=\frac{u'}{\cos^2 u}=\left(1+\text{tg}^2 u\right)\cdot u';\left(=u'\cdot\sec^2 u\right)}$$

(DEM: pág. 268 libro, o ejercicio 10 a)

$$\boxed{y=\text{ctg}x \rightarrow y'=-\frac{1}{\text{sen}^2 x}=-\left(1+\text{ctg}^2x\right);\left(=-\text{cosec}^2x\right)} \Longrightarrow \boxed{y=\text{ctg}u \rightarrow y'=-\frac{u'}{\text{sen}^2u}=-\left(1+\text{ctg}^2 u\right)\cdot u';\left(=-u'\cdot\text{cosec}^2u\right)}$$

(DEM: Ejercicio 10 b)

Ejercicio 10: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** y=tg x **b)** y=ctg x

a)

b)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 41 a 49

III.12) Derivación implícita: *(ver pág. 264 del libro de texto)*

Hasta ahora hemos derivado funciones en las que la **y** o la f(x) vienen expresadas explícitamente, es decir, directamente. Pero, ¿qué ocurre si la **y** está expresada implícitamente, es decir, no está despejada directamente, y, en el peor de los casos, además es imposible despejarla. Por ejemplo, en la expresión:

$$y^3-4x^2+3y^2x=15$$

no podemos despejar **y**; ahora bien, es relativamente sencillo obtener y', utilizando la técnica llamada de **derivación implícita**, que consiste en derivar ambos miembros, teniendo en cuenta, cuando proceda, la derivada de una función compuesta. Veámoslo con el ejemplo anterior:

$$3y^2y'-8x+3(2yy'x+y^2)=0$$

$$3y^2y'-8x+6yy'x+3y^2=0$$

Despejamos y':

$$y'(3y^2+6yx)-8x+3y^2=0$$

$$y'(3y^2+6yx)=8x-3y^2$$

$$\boxed{y'=\frac{8x-3y^2}{3y^2+6yx}}$$

Por ejemplo, podemos evaluar y' en el punto P(1,2): $y'(1,2)=\frac{8-3\cdot2^2}{3\cdot2^2+6\cdot2}=\frac{-4}{24}=-\frac{1}{6}$

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 121 a 127

Ejercicios libro: pág. 275 y ss.: 22 y 40 (Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 9 de la pág. 274)

III.13) Derivada de las funciones trigonométricas inversas: *(ver pág. 268 del libro de texto)*

$$\boxed{y=\text{arc sen}\,x\ \rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\xrightarrow[\text{GENERALIZACIÓN}]{}\boxed{y=\text{arc sen}\,u\ \rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\text{arc cos}\,x\ \rightarrow y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}\xrightarrow[\text{REGLA DE LA CADENA}]{}\boxed{y=\text{arc cos}\,u\ \rightarrow y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\text{arc tg}\,x\ \rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}}\longrightarrow\boxed{y=\text{arc tg}\,u\ \rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}}$$

(DEM: pág. 268 libro)

$$\boxed{y=\text{arc ctg}\,x\ \rightarrow y'=-\frac{1}{1+x^2}}\longrightarrow\boxed{y=\text{arc ctg}\,u\ \rightarrow y'=-\frac{u'}{1+u^2}}$$

Vamos a demostrar, por ejemplo, la fórmula de la derivada del arc sen x:

$$y=\operatorname{arc\,sen}x \;\Rightarrow\; x=\operatorname{sen}y \xrightarrow[\text{implícitamente}]{\text{Derivamos}} 1=y'\cdot\cos y \;\Rightarrow\; y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

$$\operatorname{sen}^2 y+\cos^2 y=1 \;\Rightarrow\; \cos y=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Ejercicio 11: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** y=arc cos x **b)** y=arc tg x

a)

b)

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 97 y ss.

Ejercicios libro: pág. 261: 1; págs. 275 y ss.: 1 a 21 (Hallar derivadas); pág. 279: 70 y 71 (de aplicación real)

(Se recomienda ver también los ejercicios resueltos de las págs. 260 y 273 del libro)

III.14) Derivación logarítmica: *(ver pág. 264 del libro de texto)*

Esta útil técnica sirve para derivar $\underbrace{\text{PRODUCTOS, COCIENTES, POTENCIAS, RAÍCES}}_{\text{ya vistos}}$ y $\underbrace{\text{EXPONENCIALES}}_{\text{fundamentalmente}}$

Consta de tres pasos, como veremos en los siguientes

Ejemplos:

a) $y=x^n$

I) Tomamos Ln en ambos miembros y desarrollamos, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\ln y=\ln x^n=n\ln x$$

II) Derivamos ambos miembros, teniendo en cuenta que la derivada del miembro izquierdo siempre va a ser, por derivación implícita, y'/y:

$$\frac{y'}{y}=(n\ln x)'=n\cdot\frac{1}{x}$$

III) Finalmente, reemplazamos **y** por su equivalente y despejamos y':

$$\boxed{y'=n\cdot y\cdot\frac{1}{x}=n\cdot x^{n}\cdot\frac{1}{x}=nx^{n-1}}\ \text{(C.Q.D.)}$$

b) $y=a^{x}$ $\Longrightarrow$

$$\ln y=\ln a^{x}=x\ln a$$

$$\frac{y'}{y}=(x\ln a)'=\ln a$$

$$\boxed{y'=y\cdot\ln a=a^{x}\cdot\ln a}\ \text{(C.Q.D.)}$$

c) $y=x^{x}$ $\Longrightarrow$

$$\ln y=\ln x^{x}=x\ln x$$

$$\frac{y'}{y}=(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

$$y'=y\cdot(1+\ln x)=x^{x}\cdot(1+\ln x)$$

d) y=u·v

e) $y=\sqrt{x}$

f) $y=(3x^{2}+6)^{2x-3}$

$$\left(\mathit{Soluc}: y'=\left(3x^{2}+6\right)^{2x-3}\left[Ln\left(3x^{2}+6\right)^{2}+\frac{4x^{2}-6x}{x^{2}+2}\right]\right)$$

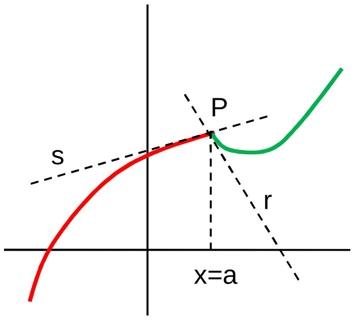
NOTA: En la práctica, la derivación logarítmica la utilizaremos solamente para derivar el caso u^{v}, como en los ejemplos c y f anteriores.

Ejercicios final tema (129 derivadas con solución): 128 a 137

Ejercicios libro: pág. 264: 2; pág. 275: 23 (Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 6d de la pág. 273 del libro)

IV) DERIVADAS LATERALES. CONTINUIDAD y DERIVABILIDAD *(págs. 257 y 262 del libro)*

Recordemos que la derivada de una función f(x) en un punto **a** es la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto, y se calcula mediante un cierto límite. Puesto que la derivada f'(a) es un límite, cabe considerarla por la izquierda y por la derecha. Ello es útil particularmente en el caso de funciones definidas a trozos:



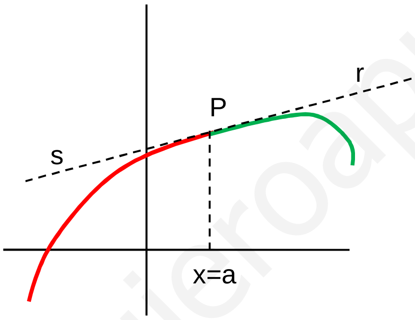
$$\boxed{f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$ ← es la pendiente de la recta tangente r a la rama derecha en P

$$\boxed{f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$ ← es la pendiente de la recta tangente s a la rama izquierda en P

Si ambas derivadas laterales coinciden, se dice que f(x) es derivable[3] en a

Observaciones:

1º) Gráficamente, una f(x) es derivable en un punto si no presenta ningún trazo anguloso en dicho punto, es decir, si ambas tangentes r y s coinciden. En el caso de una función definida a trozos, significa que ambas ramas engancharán "suavemente", es decir, sin presentar esquinas o trazos angulosos. En el gráfico anterior la función no es derivable en x=a, mientras que en el siguiente sí lo es:



2º) Para que una función sea derivable, previamente hay que cerciorarse de que es continua; ello es debido al siguiente

Teorema: $\boxed{\text{f(x) \textbf{derivable} en x=a} \Rightarrow \text{f(x) \textbf{continua} en x=a}}$ *(ver otra dem. en pág. 264 del libro)*

Dem: Consideremos la expresión

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=\lim_{x\to a}\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\substack{=f'(a)\\ \text{[por ser f(x) derivable]}}}\cdot\overbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}^{=0}=0$$

El límite del producto es el producto de los límites

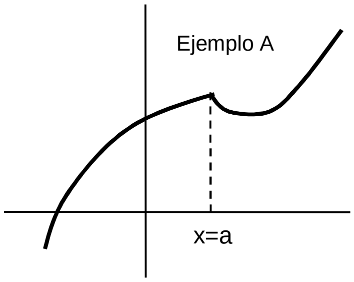
Por lo tanto: $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a) \Rightarrow$ f(x) continua en a (C.Q.D.)

NOTA: El recíproco no tiene por qué ser siempre cierto: una función (ejemplo A) puede ser continua en un punto y no ser derivable en dicho punto. Ahora bien, lo que sí es cierto es que si la función (ejemplo C) es derivable en un punto, necesariamente será continua. Lógicamente, también se cumple la negación del recíproco[4]: **no continua ⇒ no derivable** (ejemplo B). Gráficamente, todo esto es obvio:

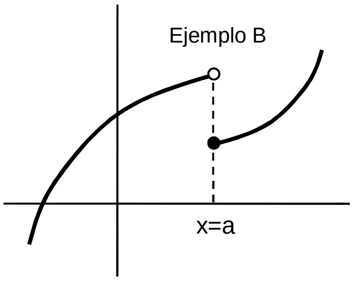
---

[3] Recordar que, según vimos en el apartado I, derivable significa que existe derivada.

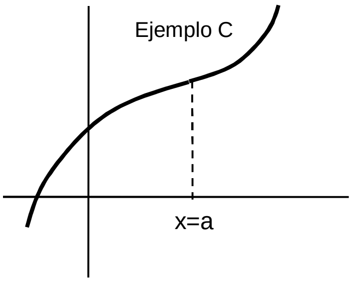
[4] Piénsese en el siguiente ejemplo lógico: español ⇒ europeo; por lo tanto, no europeo ⇒ no español.



CONTINUA
(pero NO DERIVABLE)



NO CONTINUA
(y, por tanto, NO DERIVABLE)



CONTINUA
y DERIVABLE

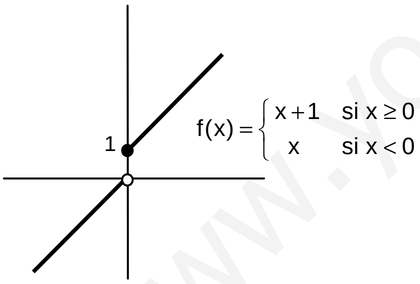
En resumen: - Si la función es continua en un punto, entonces ambas ramas "enganchan" en dicho punto (ejemplos A y C).

- Si la función además es derivable, entonces ambas ramas <u>enganchan</u> "<u>suavemente</u>", es decir, sin presentar esquinas o trazos angulosos (ejemplo C solamente).

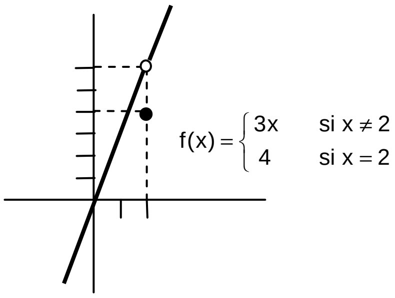
3º) En el caso de una función definida a trozos, a la hora de estudiar su derivabilidad en un punto tendremos que derivar cada rama; para ello, caben dos opciones:

- *Derivar ambas ramas mediante la definición de derivada, es decir, mediante un límite*, o bien:
- *Derivar la expresión de cada rama directamente, mediante las reglas de derivación, y sustituir el punto en cuestión*.

Puede demostrarse que ambas opciones son, en la mayoría de los casos, equivalentes. ¿Pros y contras de ambas?: obviamente, es más cómoda la segunda[5], pero hay contadas excepciones en que no funciona[6]. La primera opción, por su parte, aunque resulte frecuentemente más trabajosa, siempre es válida. Además, utilizar la segunda forma puede ser peligroso en ciertos casos en que la función no es continua:



$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x & \text{si } x<0 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$$

En ambos ejemplos puede comprobarse que, si derivamos directamente las dos ramas a ambos lados, coincidirá el resultado y, sin embargo, la función no puede ser derivable, ya que no es continua. Por tanto:

CONSEJO: En general, hacer las derivadas laterales directamente mediante las reglas de derivación, pero **cerciorarnos previamente** de que la función es continua.

---

[5] De hecho, en las reuniones de coordinación de la PAEG se ha indicado expresamente que se permite al alumno derivar directamente las ramas.

[6] Por ejemplo, con

$$f(x)=\begin{cases} x^2\text{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si}\,x\neq 0 \\ 0 & \text{si}\,x=0 \end{cases}$$

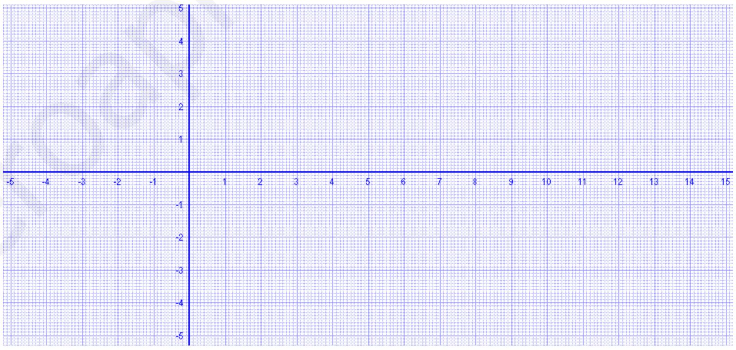
que es claramente continua en x=0, no funciona el 2º método, pero sí el 1º, para ver que $f'(0)=0$

Ejercicio 12: Estudiar la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & \text{si } x<1 \\ 2/x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

de dos formas: **a)** Utilizando la definición de derivada, es decir, mediante un límite. **b)** Derivando directamente cada rama. Comprobar que en ambos casos se obtiene idéntico resultado. Representar gráficamente la situación.

a)

b)



Ejercicios final tema (Derivabilidad): 1 a 19

Ejercicios PAEG: 4A sept 2003, 3A sept 2000, 3A jun 99, 4B jun 97 (sin parámetro)
1A sept 2010, 3A jun 2001, 1A sept 2004, 2A sept 2001, 3A jun 2000, 1A sept 98, 3A jun 98, 2A sept 97 (con parámetro)

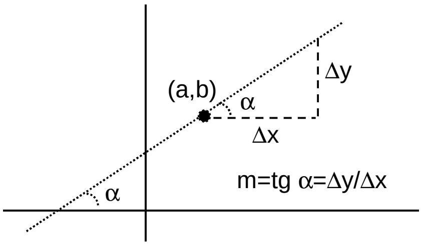
Ejercicios libro: pág. 262: 1; pág. 276 y ss.: 27, 28, 29, 30, 47, 49 y 64 (estudiar derivabilidad); pág. 262: 2; pág. 276: 35, 36, 39 y 48 (con parámetro); pág. 276 y ss.: 33 y 50 (con valor absoluto); pág. 276: 38 (estudiar derivabilidad a partir de la gráfica) (Se recomienda ver también los ejercicios resueltos 4 pág. 272 y 8 pág. 274 del libro)

V) RECTA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO *(pág. 282 del libro)*

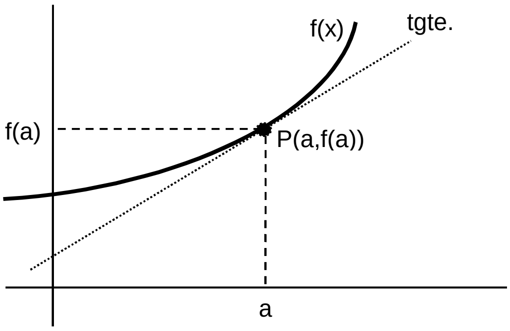
Recordatorio previo: recta en forma punto-pendiente

Conviene previamente recordar que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (a,b) y tiene pendiente m es [ver figura]:

$$y-b=m(x-a) \qquad (6)$$



Ecuación de la recta tangente y normal:



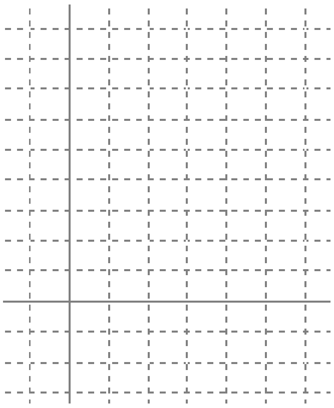
Hay que recordar también que, como se vio en el apartado I, la derivada de la función f(x) en el punto de abscisa x=a, la cual se designaba como f ‘(a), es la pendiente de la recta tangente en dicho punto (a,f(a)); por lo tanto, la ecuación de dicha recta tangente [ver figura] en ese punto se obtendrá sustituyendo convenientemente en (6):

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)} \qquad (7)$$

Por otra parte, hay que recordar también que la recta normal, es decir, perpendicular, tiene pendiente inversa y cambiada de signo; por lo tanto, su ecuación será:

$$\boxed{y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)} \qquad (8)$$

Ejercicio 13: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal en x=3 a la curva f(x)=x^2–5x+8. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: tangente y=x–1; normal y=–x+5)*



Ejercicio 14: Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) f(x)=x^3–5 en x=1 $\left(Soluc:\ y=3x-7;\ x+3y+11=0\right)$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ en x=–2 $\left(Soluc:\ x+4y+4=0;\ 8x-2y+15=0\right)$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x=0 $\left(Soluc:\ y=1;\ x=0\right)$

d) Hipérbola xy=2 en x=1 $\left(Soluc:\ y=-2x+4;\ y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)$

e) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ en x=1 $\left(Soluc:\ y=1/2;\ x=1\right)$

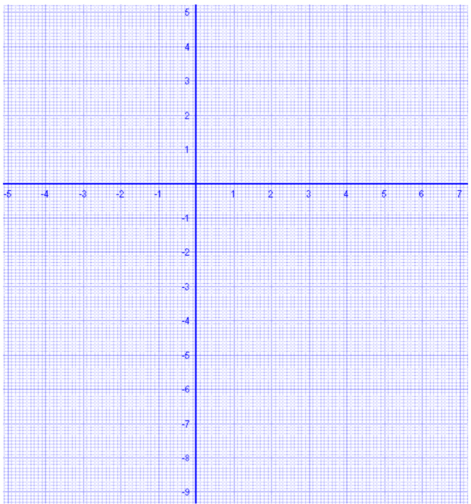
f) $f(x)=-\frac{3}{x^2}$ en x=0

g) Hallar las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-24=0$ en los puntos de abscisa x=3 (Puede ser interesante representar gráficamente la situación) $\left(Soluc:\ y=\frac{2}{5}x-\frac{41}{5};\ y=-\frac{2}{5}x+\frac{21}{5}\right)$

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 20 a 31

Ejercicios PAEG: 2 B jun 2004

Ejercicios libro: pág. 282: 1; pág. 304: 1 (f en explícita); págs. 304 y ss.: **2, 3, 5**, 23, 24, 30 y 31; pág. 278: 63 y 68 (más elaborados) (Se recomienda ver también el ejercicio resuelto 1 de la pág. 282)

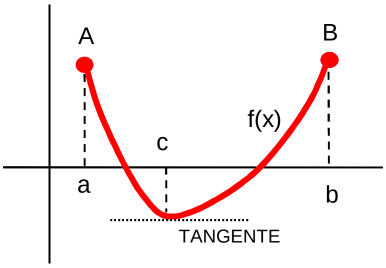


VI) TEOREMA DE ROLLE [7] *(Ver pág. 292 del libro)*

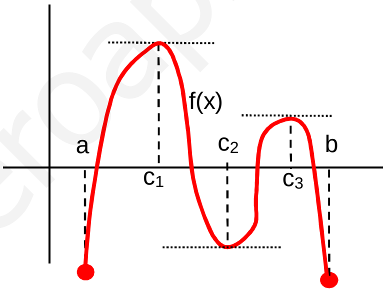
$$\boxed{\left.\begin{array}{r} \text{f continua en }[a,b] \\ \text{f derivable en }(a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c)=0}$$

Con palabras: «Si una función es continua en un intervalo cerrado, derivable en el abierto, y toma el mismo valor en ambos extremos de dicho intervalo, existirá entonces al menos un punto intermedio de tal intervalo en el que la derivada se anule»

(Ver demostración en pág. 294 del libro; se impone el intervalo cerrado para la continuidad pero el abierto para la derivabilidad con el fin de evitar inconsistencias, como se explica en la pág. 295 del libro).



Interpretación gráfica: Es obvia: Si la función tiene que evolucionar de forma continua y "suave" (i.e. derivable) desde A hasta B, puntos ambos a la misma altura, tendrá que haber al menos un punto en el que la tangente sea horizontal, es decir, la derivada se anule (NOTA: Puede existir más de un valor intermedio c que verifique el teorema):



Aplicaciones: En combinación con el de Bolzano, permite demostrar la existencia y el número máximo de raíces de una ecuación en un intervalo, así como su acotación.

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 32 a 38

Ejercicios PAEG: 1 B jun 2006 (sencillo); 1 A a, c sept 2012; 1 B a, c sept 2011 (nº exacto de soluciones)

Ejercicios libro: pág. 293: 1; pág. 307 y ss.: 56, 60, 62, 64 y 67 (f explícita); 58 y 66 (f definida por ramas)

VII) TEOREMA DEL VALOR MEDIO (DE LAGRANGE [8]) *(Ver pág. 292 del libro)*

Es una generalización del teorema anterior, para el caso en que f(a)≠f(b):

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} \text{f continua en }[a,b] \\ \text{f derivable en }(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

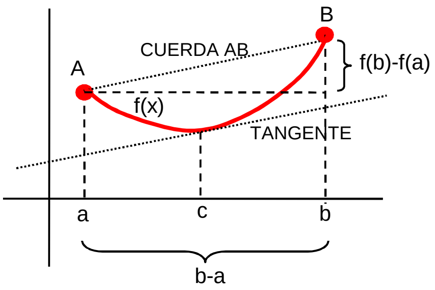
---

[7] Michel Rolle (1652-1719), matemático francés descubridor del teorema homónimo. Como dato curioso, también fue el introductor de la notación $\sqrt[n]{x}$ para la raíz enésima.

[8] Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), matemático y físico italiano naturalizado francés, a quien se debe el teorema homónimo.

Con palabras: «Si una función es continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, existirá entonces al menos un punto intermedio de tal intervalo en el que la tangente sea paralela a la cuerda que une ambos extremos del intervalo»

(Ver demostración en pág. 294 del libro)



Interpretación gráfica: Si la función tiene que evolucionar de forma continua y derivable desde A hasta B, tendrá que existir al menos un punto intermedio en el que la tangente sea paralela a la cuerda AB que une ambos puntos de la función correspondientes a los extremos del intervalo. Ahora bien, dicha cuerda tiene como pendiente:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por lo tanto la tangente, por ser paralela, tendrá la misma pendiente, y recordemos que la pendiente de la recta tangente es la derivada. (NOTA: De nuevo, puede existir más de un valor intermedio c que verifique el teorema):

Aplicaciones: Este teorema no tiene aplicación práctica en sí mismo, pero es muy útil para demostrar otros teoremas.

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 39 y 40

Ejercicios libro: pág. 293: 3 y 4; pág. 307: 59 (f explícita); pág. 293: 2; pág. 307: 57 y 63 (f definida por ramas)

VIII) REGLA DE L'HÔPITAL[9] *(Ver pág. 290 del libro)*

Se trata en realidad de un teorema, cuyo enunciado es:

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ y } g(x) \text{ derivables en } x=a \\ f(a)=g(a)=0 \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Dem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{\Uparrow \\ f(a)=g(a)=0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \underset{\substack{\Uparrow \\ f(x) \text{ y } g(x) \\ \text{derivables}}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones:

1º) Puede probarse fácilmente que la regla también es válida si x →∞, y también para el caso ∞/∞

---

[9] Guillaume François Antoine, marqués de l'Hôpital (1661-1704), matemático francés coautor, junto con su profesor, el suizo Johann Bernouilli, de la regla que lleva su nombre.

2º) Esta regla sirve para deshacer, en la mayoría de los casos, la indeterminación 0/0 (o ∞/∞); se trata de derivar por separado numerador y denominador, y volver a tomar límites[10].

3º) Si volviéramos a obtener otra vez indeterminación, volveríamos a aplicar de nuevo L'Hôpital, y así las veces que sean necesarias (normalmente, no más de tres), hasta deshacer la indeterminación. Pero también puede ocurrir que, al aplicar L'Hôpital, se complique cada vez más la expresión resultante; en ese caso, este método no funciona, y habrá que recurrir a otros.

4º) Una vez aplicado L'Hôpital, podemos obtener un límite finito, pero también ∞, o -∞.

5º) En la PAEG, y en el caso de que caiga un límite por L'Hôpital, suelen pedir al alumno que enuncie previamente la regla, y lo mismo en el caso de los teoremas de Bolzano, Rolle o Lagrange; en estos tres últimos, piden, además, la interpretación gráfica.

Ejercicio 15: Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ de dos formas: **a)** Por Ruffini. **b)** Por L'Hôpital. Comprobar que en ambos casos se obtiene idéntico resultado.

a) Por Ruffini:

b) Por L'Hôpital:

Ejercicio 16: Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ de dos formas, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 41 a 51

Ejercicios libro: pág. 290: 1 y 2 (indeterminación 0/0 o ∞/∞)

---

[10] Esta regla no debe llevarnos a confusión: hay que derivar por separado numerador y denominador; ¡en ningún caso se está diciendo que la derivada del cociente sea el cociente de las derivadas! (Error en el que suelen incurrir bastantes alumnos…)

- Recordemos de nuevo, del tema anterior, los 7 tipos de indeterminaciones:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty-\infty,\ 1^{\pm\infty},\ (\pm\infty)^{0},\ 0^{0}}$$

Los dos primeros, aplicando la regla de L'Hôpital, se suelen deshacer en la mayor parte de los casos. En cuanto a **los cinco restantes, se pueden reducir a los dos primeros, es decir, a un cociente, aplicando alguno de los siguientes procedimientos:**

1º) Indeterminación A · B = 0 · (±∞)

En este caso suele funcionar transformar el producto en cociente, haciendo:

$$A\cdot B=\frac{A}{1/B} \qquad \text{o} \qquad A\cdot B=\frac{B}{1/A}$$

(lo que funcione y/o que resulte más cómodo de derivar después por L'Hôpital).

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} x\left(5^{1/x}-1\right)=$ *(Soluc: ln 5)*

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 52, 53 y 54

Ejercicio libro: pág. 291: 4 (indeterminación 0·∞)

2º) Indeterminación A−B = ∞−∞

En la mayoría de los casos, operando la expresión A-B, la expresión se transforma en un cociente; cuando ello no resulte, alternativamente podemos probar a transformar la expresión en otra que responda al caso anterior, sacando factor común:

$$A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right) \qquad \text{o} \qquad A-B=B\left(\frac{A}{B}-1\right)$$

(lo que funcione y/o que resulte más cómodo de derivar después por L'Hôpital).

Ejemplo: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]=$ *(Soluc: 1/2)*

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 56, 69 y 86

Ejercicio libro: pág. 306: 45 (indeterminación ∞-∞)

3º) Indeterminaciones $A^B = 1^{\pm\infty}$, 0^0, $(\pm\infty)^0$

Suele funcionar aplicar la expresión $A^B = e^{B \cdot \ln A}$ (la cual se justifica fácilmente tomando neperianos en ambos miembros); tomando límites en ambos miembros, se obtiene la siguiente regla práctica:

$$\boxed{\lim A^B = e^{\lim (B \cdot \ln A)}}$$

con lo cual se convierte en una indeterminación del tipo 0·∞

NOTA: Esta regla es mucho más práctica y general que la vista en el apdo. VII 5º del tema anterior

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ *(Soluc: $1/e^6$)*

Ejercicios final tema (Derivabilidad): 60 y ss.

Ejercicios PAEG: 2 B sept 99, 2A sept 2000, 4A jun 2001, 3A sept 2001, 2B jun 2005 ← repetido con 2A sept 2000, 1A jun 2008 (L'Hôpital)
1A jun 2007, 1A sept 2006 (L'Hôpital+continuidad)
1A jun 2002 (L'Hôpital+derivabilidad)

Ejercicios libro: pág. 305 y ss.: 16 (indeterminación 0/0), 44 (indeterminación exponencial y 0·∞), 70 (indeterminación exponencial) y 71 (indeterminación 0/0)

REPASO DERIVADAS 2º BACH.

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO [f '(a)]:

Fórmulas: $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (1) $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en x=2 mediante (1)

b) f(x)=2x–5 en x=1 mediante (2)

c) $f(x)=x^3$ en x=2 mediante (1)

d) $f(x)=\sqrt{x}$ en x=4 mediante (2)

e) f(x)=1/x en x=–1 mediante (1)

f) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0 mediante (2)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en x=1. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

FUNCIÓN DERIVADA f '(x):

Fórmula: $\boxed{f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f '(2), f '(–1) y f '(0):

a) f(x)=3x–2 **b)** $f(x)=x^2-5x+6$ **c)** $f(x)=x^3+1$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en x=1 mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite)

(Sol: -1)

REGLAS DE DERIVACIÓN. TABLA DE DERIVADAS:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \to y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in IR)}$, hallar la derivada, <u>simplificada</u>, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\frac{3}{2}x^4$ **f)** $y=\frac{x^2}{4}$

g) $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **i)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$ **j)** $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **k)** $y=x\sqrt{x}$ **l)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$

m) $y=-2x^6$ **n)** $y=\frac{x^8}{4}$ **o)** $y=\sqrt{x^3}$ **p)** $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *$y'=2x$;* ***b)*** *$y'=3x^2$;* ***c)*** *$y'=12x^3$;* ***d)*** *$y'=-10x^4$;* ***e)*** *$y'=6x^3$;* ***f)*** *$y'=x/2$;* ***g)*** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; ***h)*** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; ***i)*** $y'=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$; ***j)*** $y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; ***k)*** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; ***l)*** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; ***m)*** *$y'=-12x^5$;* ***n)*** *$y'=2x^7$;* ***o)*** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; ***p)*** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$; ***q)*** $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; ***r)*** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *$y'=2x+1$;* ***b)*** *$y'=6x^2-6x+5$;* ***c)*** $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$; ***d)*** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando diversos casos de la tabla de derivadas, hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=(x^2+x+1)^3$

f) $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **g)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **h)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **i)** $y=2(3x^2-1)^4$ **j)** $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=\frac{-2}{x^3}$; ***b)*** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; ***c)*** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; ***d)*** *$y'=4x^3-12x$;* ***e)*** *$y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$;* ***f)*** $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; ***g)*** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; ***h)*** *$y'=60x(x^2+1)^9$;* ***i)*** *$y'=48x(3x^2-1)^3$;* ***j)*** $y'=\frac{-12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Utilizando la fórmula de la derivada del producto de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones (en algunos casos, también se recomienda simplificar la función antes de derivar, y comprobar que, una vez derivada, se obtiene idéntico resultado):

a) $y=x\sqrt{x}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$

f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; ***b)*** *$y'=6x^2-6x-10$;* ***c)*** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; ***d)*** $y'=2\sqrt[4]{x^3}+\frac{3x-6}{2\sqrt[4]{x}}$; ***e)*** *$y'=10x^4+4x^3-36x^2-12x+18$;* ***f)*** $y'=\frac{\sqrt{x}-3x\sqrt{x}}{2x(x+1)^3}$)

11. Utilizando la fórmula del cociente de funciones, hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\frac{x+2}{x^2-5}$ **c)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$ **d)** $y=\frac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

$\Big($*Sol:* **a)** $y'=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; **b)** $y'=-\frac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; **c)** *ver 7 r;* **d)** $y'=\frac{3\text{-}18x^2}{(2x^2+1)^3}$; **e)** $y'=\frac{3x^2+4x}{2(x+1)^2}\sqrt{x+1}\Big)$

12. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\frac{u}{v\cdot w}$ e $y=\frac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

140 DERIVADAS con solución 2º BACH.

- Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. $y=3$ $(y'=0)$

2. $y=x$ $(y'=1)$

3. $y=5x$ $(y'=5)$

4. $y=-x$ $(y'=-1)$

5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ $(y'=4x^3+3x^2+2x+1)$

6. $y= 4x^4-x^3+3x^2-7$ $(y'=16x^3-3x^2+6x)$

7. $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-3$ $\left(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$

8. $y=3(x^2+x+1)$ $(y'=3(2x+1))$

9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ $(y'=36x^2-14x)$

10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ $(y'=3x^2-3x+2)$

11. $y=(x^2+1)\,(2x^3-4)$ $(y'=10x^4+6x^2-8x)$

12. $y=1/x$ $(y'= -1/x^2)$

13. $y=1/x^3$ $(y`= -3/x^4)$

14. $y=1/x^5$ $(y'= -5/x^6)$

15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$ $\left(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4}\right)$

16. $y=\sqrt{x}$ $\left(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $\left(y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $\left(y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right)$

19. $y=2\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$ $\left(y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}-6x\right)$

20. $y=(x+1)^5$ $(y'=5(x+1)^4)$

21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ $(y'=3\,(2x^2-3x+1)^2\,(4x-3))$

22. $y=(x^2+1)^{100}$ $(y'=200\,x\,(x^2+1)^{99})$

23. $y=\frac{x+1}{x-1}$ $\left(y'=\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$

24. $y=\frac{1}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)$

25. $y=3\ \frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\left(y'=3\ \frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2}\right)$

26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $\left(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5}\right)$

27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

28. $y=2\sqrt{x^3-x^2+1}\,(2x^2+3)$ $\left(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}}\right)$

29. $y=\log x$ $\left(y'=\frac{1}{x}\log_{10}e=\frac{1}{x\ln 10}\right)$

30. $y=\ln x$ $(y'=1/x)$

31. $y=3\log_2 x-4\ln x$ $\left(y'=\frac{-4+3\log_2 e}{x}\right)$

32. $y=\ln(3x^2+4x+5)$ $\left(y'=\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right)$

33. $y=\ln\sqrt{x^2-1}$ $\left(y'=\frac{x}{x^2-1}\right)$

34. $y=\sqrt{\ln(x^2-1)}$ $\left(y'=\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{\ln(x^2-1)}}\right)$

35. $y=2^x$

36. $y=2^{x^2+x+1}$

37. $y=e^{2x^2-3x+5}$

38. $y=e^{-x}$ $(y'= -1/e^x)$

39. $y=e^{1/x}$

40. $y=10^{\sqrt{x}}$

41. $y=\operatorname{sen} 2x$

42. $y=\operatorname{sen} x^2$

43. $y=\operatorname{sen}^2 x$ $(y'= \operatorname{sen} 2x)$

44. $y=2\operatorname{sen} x$

45. $y=\operatorname{sen}(x^2-2x+1)$

46. $y=\cos\sqrt{x}$ $\left(y'=-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$

47. $y=\text{sen}^3(x^2+1)$ $(y'=6x\ \text{sen}^2(x^2+1)\cos(x^2+1))$

48. $y=\text{tg}\,\frac{1}{x}$ $\left(y'=-\frac{1+\text{tg}^2\,1/x}{x^2}\right)$

49. $y=\text{ctg}(x^2+1)$ $\left(y'=-\frac{2x}{\text{sen}^2(x^2+1)}\right)$

50. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ $(y'=-3x^3+x^2+x+1/x^2)$

51. $y=2/x$ $(y'=-2/x^2)$

52. $y=2\ \text{sen}\ (x^2+1)$ $\left(y'=4x\cos(x^2+1)\right)$

53. $y=3(x^2-x+1)\ (x^2+x-1)$ $(y'=3(4x^3-2x+2))$

54. $y=\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{x}+1\right)$ $\left(y'=-\frac{\text{sen}\left(\sqrt{x}+1\right)}{4\sqrt{x}}\right)$

55. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

56. $y=x/2$ $(y'=1/2)$

57. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ln x$ $\left(y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}+\frac{1}{x}\right)$

58. $y=\ln^3(x+1)$ $\left(y'=\frac{3\ln^2(x+1)}{x+1}\right)$

59. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ $(y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x)$

60. $y=\sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$ $\left(y'=-\frac{x^4+3x^2+2x}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}\ \sqrt{1-x^3}}\right)$

61. $y=\ln^2 x$ $\left(y'=\frac{2\ln x}{x}\right)$

62. $y=\ln x^2$ $(y'=2/x)$

63. $y=(x^2+1)(x+2)^3$ $(y'=5x^4+24x^3+39x^2+28x+12)$

64. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\left(y'=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)$

65. $y=\frac{1}{3x^5-x^3+2}$ $\left(y'=\frac{-15x^4+3x^2}{(3x^5-x^3+2)^2}\right)$

66. $y=\text{Ln}\,\text{sen}\,x$

67. $y=\text{sen}\ \text{Ln}\ x$

68. $y=\sqrt{x^4-2x^2+3}$ $\left(y'=\frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^4-2x^2+3}}\right)$

69. $y=e^{\,\text{sen}\,x}$

70. $y=\sqrt{\ln x}$ $\left(y'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)$

71. $y=2^{\,\text{tg}\,x}$

72. $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\left(y'=\frac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right)$

73. $y=\cos\ (e^x+1)$

74. $y=\sqrt[5]{x^2}+1$ $\left(y'=\frac{2}{5\ \sqrt[5]{x^3}}\right)$

75. $y=\text{tg}\ (1+\text{Ln}^2x)$

76. $y=\log\ (2^x+5)$

77. $y=\frac{x^4-2x^2+1}{4}$ $(y'=x^3-x)$

78. $y=\frac{5}{x^4-2x^2+1}$ $\left(y'=\frac{20x-20x^3}{\left(x^4-2x^2+1\right)^2}\right)$

79. $y=3\ (x+1)^3\ \sqrt[3]{x+1}$ $\left(y'=10\ \sqrt[3]{(x+1)^7}\right)$

80. $y=\ln(x-3)$ $\left(y'=\frac{1}{x-3}\right)$

81. $y=4\ln\sqrt{x}$ $(y'=2/x)$

82. $y=\sqrt{4\ln x}$ $\left(y'=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\right)$

83. $y=x^3\sqrt{x}$ $\left(y'=\frac{7x^2\sqrt{x}}{2}\right)$

84. $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$ $\left(y'=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$

85. $y=\ln\frac{x-1}{x+2}$ $\left(y'=\frac{3}{(x+2)(x-1)}\right)$

86. $y=\ln(x+1)\cdot\log(x-1)$ $\left(y'=\frac{\log(x-1)}{x+1}+\frac{\ln(x+1)\ \log e}{x-1}\right)$

87. $y=\ln(\ln x)$ $\left(y'=\frac{1}{x\ln x}\right)$

88. $y=\frac{3}{\ln(x^2+1)}$ $\left(y'=-\frac{6x}{(x^2+1)\ \ln^2(x^2+1)}\right)$

89. $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}$ $\left(y'=-\frac{1}{3\ \sqrt[3]{(x+2)^4}}\right)$

90. $y=3\ \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ $\left(y'=3\ \frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}\right)$

91. $y=7\ \frac{3x^2-5}{\ln(3x^2-5)}$ $\left(y'=\frac{42x\left[-1+\ln(3x^2-5)\right]}{\ln^2(3x^2-5)}\right)$

92. $y=e^{x^2}$ $\left(y'=e^{x^2}\cdot 2x\right)$

93. $y=x\cdot e^x$ $(y'=(x+1)\cdot e^x)$

94. $y=\frac{e^x}{x}$ $\left(y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)$

95. $y=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ $\left(y'=\frac{\ln x-2}{2\sqrt{x}\ \ln^2 x}\right)$

96. $y=\frac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ $\left(y'=\frac{x+4}{(x+3)\ \sqrt{x+3}}\right)$

97. $y=\text{arc sen}\ (x^2-4)$ $\left(y'=\frac{2x}{\sqrt{-x^4+8x^2-15}}\right)$

98. $y=\text{arc cos }\frac{1}{x}$ $\left(y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$

99. $y=\frac{-6x^2+72x+4}{(6-x)^2}$ $\left(y'=\frac{440}{(6-x)^3}\right)$

100. $y=2(\sqrt{x}-\text{arc tg}\sqrt{x})$ $\left(y'=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

101. $y=\text{arc tg }\frac{2x^3-1}{x^2-2}$ $\left(y'=\frac{2x^4-12x^2+2x}{4x^6+x^4-4x^3-4x^2+5}\right)$

102. $y=(x^3-4x^2+7x-6)e^x$ $\left(y'=(x^3-x^2-x+1)e^x\right)$

103. $y=\text{arc sen }\sqrt{1-x^2}$ $\left(y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

104. $y=\frac{1}{2}\text{arc tg }e^{x^2}$ $\left(y'=\frac{x\,e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}\right)$

105. $y=\text{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ $\left(y'=\frac{1}{1+x^2}\right)$

106. $y=\frac{\ln x}{x^3}$ $\left(y'=\frac{1-3\ln x}{x^4}\right)$

107. $y=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $\left(y'=\frac{1}{1-x^2}\right)$

108. $y=\text{arc sen }\frac{2}{\sqrt{x}}$ $\left(y'=-\frac{1}{x\sqrt{x-4}}\right)$

109. $y=\sqrt{x^2+1}\;(x^2-1)^2$ $\left(y'=\frac{5x^5-2x^3-3x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

110. $y=\frac{1}{3}\text{ arc tg }e^x$

111. $y=\frac{x^2+5}{x^2-4}$ $\left(y'=\frac{-18x}{(x^2-4)^2}\right)$

112. $y = \text{arc sen }(x^2+1)$

113. $y=\text{arc cos }\sqrt{x}$

114. $y=\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}+5$ $\left(y'=-\frac{1}{x^4}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^2}\right)$

115. $y=\text{arc tg }\frac{x^2+1}{x^2-1}$

116. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^4}$ $\left(y'=4x^2\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

117. $y=(x+2)\ln(x+2)$ $(y'= 1+\ln(x+2))$

118. $y=\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)^2$ $\left(y'=5x\sqrt{(x^2+1)^3}\right)$

119. $y=(2x+1)^3\sqrt[3]{3x-1}$

120. $y=\sqrt{\frac{x+1}{x\text{-}1}}$

■ Derivación implícita:

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones:

121. $y^2+2xy+5=0$ $\left(y'=\frac{-y}{x+y}\right)$

122. $x^2y+xy^2=y+1$ $\left(y'=\frac{y^2+2xy}{-x^2-2xy+1}\right)$

123. $x^2+y^2-xy=3$ $\left(y'=\frac{2x-y}{x-2y}\right)$

124. $xy^2=x^2+y$

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

125. $x^3-y^3=y$ en P(1,0) $\left(y'=\frac{3x^2}{3y^2+1};\ y'(P)=3\right)$

126. $x^2+y^2+x+y=16$ en Q(-1,-1/2) $\left(y'=-\frac{2x+1}{2y+1};\ y'(Q)=\nexists\right)$

127. $xy^2+\frac{y}{2}=x+1$ en el origen $\left(y'=\frac{2-2y^2}{4xy+1};\ y'(O)=0\right)$

■ Derivación logarítmica:

Hallar, por derivación logarítmica, la derivada de las siguientes funciones:

128. $y=x^x$ $\quad (y'=(1+\ln x)\, x^x)$

129. $y=x^{1/x}$ $\quad \left(y'=\left(1-\ln x\right)\, x^{1-2x/x}\right)$

130. $y=(\text{sen } x)^{\text{sen } x}$ $\quad (y'=[\cos x \ln(\text{sen } x)+\cos x](\text{sen } x)^{\text{sen } x})$

131. $y=(\text{sen } x)^{\cos x}$ $\quad (y'=[-\text{sen } x \ln(\text{sen } x)+\text{ctg } x \cos x](\text{sen } x)^{\cos x})$

132. $y=(\text{sen } x)^x$ $\quad (y'=(\ln \text{sen } x+x \text{ ctg } x)\, (\text{sen } x)^x)$

133. $y=(e^x)^{\text{sen } x}$ $\quad (y'=(\text{sen } x+x\cos x)\, e^{x\cdot \text{sen } x}$

134. $y=x^{x^2}$ $\quad \left(y'=(1+2\ln x)\, x^{x^2+1}\right)$

135. $y=(x+1)^{x-1}$ $\quad \left(y'=(x+1)^{x-1}\left[\ln(x+1)+\dfrac{x-1}{x+1}\right]\right)$

136. $y=(\text{sen } x)^{1/x}$ $\quad \left(y'=(\text{sen } x)^{1/x}\left[\dfrac{-\ln \text{sen } x}{x^2}+\dfrac{\text{ctg } x}{x}\right]\right)$

137. $y=x^{\text{sen } x}$ $\quad \left(y'=\left(\cos x\cdot \ln x+\dfrac{\text{sen} x}{x}\right)\cdot x^{\text{sen} x}\right)$

■ Ejercicios varios:

138. (S) Dada la función $f(x)=\text{Ln}\sqrt{\dfrac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}}$

se pide: **a)** Determinar los valores de x para los que está definida.

b) Hallar su derivada.

(Soluc: $\forall x\neq\pi/2+n\pi$ con $n\in Z$; $f'(x)=1/\cos x$)

139. (S) Un observador se encuentra a 2000 metros de la torre de lanzamiento de un cohete. Cuando éste despega verticalmente mide la variación del ángulo φ(t) que forma la línea visual que le une con el cohete y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido. Sabiendo que φ'(t)=1/20 radianes por segundo cuando φ=π/3, se pide:

a) ¿Cuál es la altura del cohete cuando φ=π/3 radianes?

b) ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando φ=π/3 radianes?

(Soluc: $2000\sqrt{3}$ m.; 400 m/s)

140. (S) Hallar la derivada vigésimo cuarta de *y=a sen bx* para **a** y **b** constantes. *(Soluc: $y^{(24)}=ab^{24}$ sen bx)*

91 EJERCICIOS de DERIVABILIDAD 2º BACH.

Derivabilidad y continuidad:

1. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\geq 0 \\ x & \text{si } x<0 \end{cases}$, se pide: **a)** Estudiar su derivabilidad en x=0 **b)** Representarla.

(Soluc: $\nexists f'(0)$)

2. Ídem con $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5 & \text{si } x\geq 3 \\ 2x-4 & \text{si } x<3 \end{cases}$ en x=3 *(Soluc: $\exists f'(3)$)*

3. Estudiar la derivabilidad de f(x)=|x| . Representarla gráficamente. *(Soluc: $\nexists f'(0)$)*

4. Ídem con: **a)** $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si } x>1 \\ 4x & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\neq 2 \\ 5 & \text{si } x=2 \end{cases}$

5. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x)=x^2$ en (0,2)

b) f(x)=1/x en (-1,1)

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x+2}$ en (0,4)

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1<x\leq 0 \\ 1/x & \text{si } -2\leq x\leq -1 \end{cases}$ en su Dom(f)

6. Dada $f(x)=\sqrt[3]{x}$, se pide: **a)** Dibujarla. **b)** Estudiar su continuidad y derivabilidad.

7. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ *(Soluc: derivable $\forall x\in\Re$-{0})*

8. **(S)** Estudiar la derivabilidad en x=1 de la función

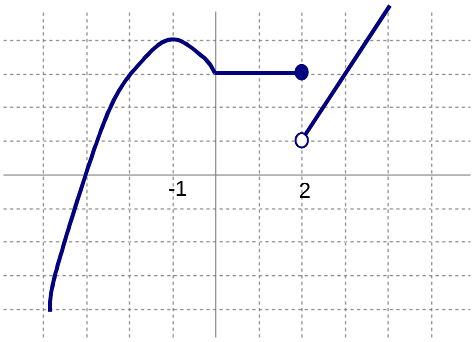
$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Hacer la gráfica. *(Soluc: no es derivable porque no es continua)*

9. **(S)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

¿es derivable en x=0? ¿Es continua en x=0? *(Soluc: no es derivable ni continua en x=0)*

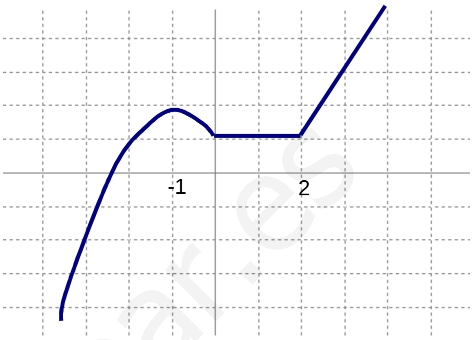


10. En la figura izquierda aparece la gráfica de una función f(x) definida a trozos. Se pide:

a) Estudiar su continuidad.

b) Estudiar su derivabilidad.

c) Hallar f '(-1), f '(0), f '(1), f '(2) y f '(3)



11. En la figura derecha se ha representado la gráfica de una función f(x) definida por ramas. Calcular f '(–1), f '(1), f '(2) y f '(3).

12. Dada f(x)=x|x–1|, se pide: **a)** Expresarla como función definida a trozos. **b)** Estudiar su derivabilidad en x=1 **c)** Representarla.
(Soluc: $\nexists f'(1)$)

13. **(S)** Representar gráficamente la función $y=\left|x^2-7x+10\right|$ e indicar en qué puntos no es derivable.
(Soluc: no es derivable en x=2 y x=5)

14. Estudiar la derivabilidad de f(x)=|x–3|+|x|. Representarla. *(Soluc: $\nexists f'(0)$; $\nexists f'(3)$)*

15. **(S)** Determinar **a** y **b** para que sea continua la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

¿La función que resulta es derivable? Representarla gráficamente. *(Soluc: a=–1 y b=1; no derivable)*

16. **(S)** Calcular **a** y **b** para que la siguiente función sea derivable en todo $\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: a=2 y b=–7)

17. **(S)** Hallar **a** y **b** para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<-1 \\ ax+b & \text{si } -1\le x<0 \\ 3x^2+2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

sea continua. Para esos valores de **a** y **b** estudiar la derivabilidad. Representarla gráficamente.
(Soluc: a=b=2; para esos valores es derivable en x=–1 y no lo es en x=0)

18. **(S)** Sea

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x\le 1 \\ ax^2+b(x-1) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de **a** y **b** es continua la función? ¿Para qué valores de **a** y **b** es derivable? Representarla gráficamente. *(Soluc: continua para a=3 y ∀b; derivable para a=3 y b=−3)*

19. (S) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro **a** es continua? *(Soluc: a=1 y a=2)*

b) ¿Para qué valores de **a** es derivable? Representarla en este caso. *(Soluc: Sólo para a=1)*

Recta tangente y normal:

20. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x)=x^2-2x-3$ en el punto de abscisa 2. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: tangente 2x−y−7=0; normal x+2y+4=0)*

21. Ídem para $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+1$ en x=0 *(Sol: tangente x=0; normal y=1)*

22. Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en x=1 *(Soluc: 6x−y+5=0)*

b) $y=2x^5+4$ en x=−1 *(Soluc: 10x−y+12=0)*

c) $f(x)=x^4-1$ en x=0 *(Soluc: y=−1)*

d) $y^2+2xy=4$ en P(0,2) *(Soluc: y=−x+2)*

e) $y=\ln x$ en x=1 *(Soluc: y=x−1)*

f) $xy^2-4x^2y+4x=0$ en x=1 *(Soluc: x=1)*

g) (S) $f(x)=3^{2x^2+1}$ en x=0 *(Soluc: y=3)*

h) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2-3}$ en x=2 *(Soluc: y=−12x+30)*

i) $x^2+2xy+y^2-x-y=6$ en x=−2 y ordenada estrictamente positiva *(Soluc: y=−x+3)*

j) $f(x)=(x+1)^{x-1}$ en x=0 *(Soluc: y=−x+1)*

k) $f(x)=(3x-2x^2)e^x$ en x=0 *(Soluc: y=3x)*

23. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar ambas curvas.

(Soluc: y=−1; vértice (3,−1))

24. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: 7/2,−3/4)*

25. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=12x+5$ *(Soluc: (1,16) y (–7,176))*

26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-5x+6$ paralela a la recta $y=-3x+2$ ¿Cuál es el punto de tangencia? Hacer un dibujo de la situación. *(Sol: y=–3x+5; P(1,2))*

27. Hallar las coordenadas de los puntos de $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$ en los que la recta tangente a la gráfica de esa función es horizontal. *(Soluc: (1,–19), (–1,13) y (–2,8))*

28. Hallar los puntos en que la tangente a la función $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ es: **a)** Paralela al eje OX
b) Paralela a la recta $y=5x+3$

29. **(S)** Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ en el punto (2,3) *(Sol: y=3)*

30. **(S)** Escribir la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $xy=1$ en el punto de abscisa $x=3$. Representar ambas curvas. *(Soluc: x+9y–6=0)*

31. **(S)** Se da la curva de ecuación $y=1/x$. Comprobar que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto (3,1/3), comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto. *(Soluc: la tangente, x+9y–6=0, corta a los ejes en (0,2/3) y (6,0), y su punto medio es (3,1/3))*

Teorema de Rolle:

32. Dadas las siguientes funciones, estudiar si se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema:

a)	$f(x)=x^2$	en [–2,2]	*(Soluc: c=0)*
b)	$y=\frac{x^2-4x}{x+2}$	en [0,4]	*(Sol: c=–2+2$\sqrt{3}$)*
c)	$y=\lvert x\rvert$	en [-1,1]	*(Sol: no deriv. en x=0)*
d)	$f(x)=x^2-4x+1$	en [1,3]	*(Soluc: c=2)*
e)	$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	en [-1,1]	*(Sol: c=0)*
f)	$y=2+\sqrt[3]{x^2}$	en [-1,1]	*(Sol: no deriv. en x=0)*
g)	$y=2+x^3(x-2)^2$	en [0,2]	*(Soluc: c=6/5)*
h)	$y=\frac{3}{x^2}-1$	en [-1,1]	*(Sol: no cont. en x=0)*
i)	$y=7+x\cdot(x+2)^2$	en [-2,0]	*(Soluc: c=–2/3)*
j)	$f(x)=-x^2+2x+5$	en [-1,3]	*(Soluc: c=1)*

33. **(S)** Dada la función $f(x)=\lvert x^2-4\rvert$, estudiar si se verifican las hipótesis y el teorema de Rolle en [-3,3]
(Soluc: no es derivable en x=2)

34. Enunciar el teorema de Rolle. Estudiar si es aplicable a
$$f(x)=\begin{cases}\frac{8}{3}x+4 & \text{si } x\in[0,2]\\ -x^2+\frac{20}{3}x & \text{si } x\in(2,6]\end{cases}$$
en [0,6]. En caso afirmativo, hallar el valor intermedio en que se verifica. Interpretar gráficamente el resultado.

35. **(S)** Estudiar si es aplicable el teorema de Rolle a la siguiente función en su dominio de definición:

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } 1\le x<3\\ 7-x & \text{si } 3\le x\le 5\end{cases}$$

(Soluc: no, pues no es continua en x=3)

36. Estudiar si $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $\left[-\sqrt{2},2\right]$

(Soluc: c=0)

37. Estudiar si es aplicable el teorema de Rolle a la siguiente función en su dominio de definición:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+5x & \text{si } 1\le x\le 3\\ -6x+24 & \text{si } 3<x\le 5\end{cases}$$

(Soluc: no, pues no es derivable en x=3)

38. Calcular a, b y c para que $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax & \text{si } -1\le x\le 3\\ bx+c & \text{si } 3<x\le 5\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en [-1,5].

¿Dónde cumple la tesis? *(Soluc: a=10/3, b=-8/3, c=9; en 5/3)*

Teorema del valor medio de Lagrange:

39. Dadas las siguientes funciones, **i)** Enunciar el teorema del valor medio. **ii)** Estudiar si se verifican las hipótesis del teorema en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema. **iii)** Interpretar gráficamente el resultado.

a)	$f(x)=3x^2$	en [0,4]	*(Soluc: c=2)*
b)	$y=x^2-x+3$	en [2,5]	*(Soluc: c=7/2)*
c)	$f(x)=(x-2)^2(x+1)$	en [0,4]	$\left(Soluc: c=1+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$
d)	$f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x\in[0,1)\\ 2x^2-x & \text{si } x\in[1,2]\end{cases}$	en su Dom(f)	*(Soluc: c=1)*
e)	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1<x\le 0\\ 1/x & \text{si } -2\le x\le -1\end{cases}$	en su Dom(f)	$\left(Soluc: c=-1/2 \text{ y } c=-\sqrt{2}\right)$
f)	$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<4\\ -x^2+10x-19 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$	en [3,5]	*(Soluc: c=17/4)*
g)	$y=(x-1)(2x+3)^2+4$	en [-2,1]	$\left(Soluc: c=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}\right)$
h)	$f(x)=x^3-3x-2$	en [-2,2]	$\left(Soluc: c=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

i) f(x)=ln(x+1) en [1,2] $\left(\textit{Soluc}: c=\frac{1}{ln3-ln2}-1 \right)$

j) f(x)=x^2+5 en [0,3]

k) y=x-x^3 en [-2,1]

l) f(x)=4x^2-5x+6 en [0,2]

40. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

a) Hallar a y b para que cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en [-1,5]. *(Soluc: a=0, b=2)*

b) Hallar el valor o los valores intermedios que verifican el teorema. *(Soluc: x=2/3)*

Regla de L'Hôpital:

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Enunciar previamente la regla.

42. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{1}{e}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{x}=-2$

44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

45. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3}{e^x}=0$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}=-\frac{1}{4}$

48. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}=\infty$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

50. (*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x-\operatorname{sen} x}=-2$

51. (S) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x}{\ln^3 x+2x}=\frac{1}{2}$

52. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

53. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x=0$

54. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=-\frac{4}{\pi}$

55. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$

56. (S) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{x}\right)=0$

57. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=\infty$

58. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=1$

59. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3-4x^2+7x-6\right)e^x=0$

60. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2)^{1/x}=1$

61. (S) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=e^2$

62. (S) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}(1+2\cos x)^{1/\cos x}=e^2$

63. (S) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1$

64. (S) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}=1$

65. (S) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{1/\operatorname{sen} x}=1$

66. (S) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}=-\frac{1}{2}$

67. (S) (*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{1/x}+e^{2/x}\right)^x=e^2$

68. (S) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ $(n\in\mathbb{N})$

69. (S) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x-1)}\right]=\frac{3}{2}$

70. (S) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{arctg} x-x}{2x-\operatorname{arcsen} x}=1$

71. (S) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6}$

72. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)} = 0$

73. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2-x)e^x - (2+x)}{x^2} = 0$

74. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - \cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

75. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}} = 0$

76. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + e^x \right)^{1/x} = e^2$

77. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{sen} x} = 1$

78. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos 2x \right)^{3/x^2} = \dfrac{1}{e^6}$

79. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - x - 1}{2x^2 - x^3} = \dfrac{1}{4}$

80. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\operatorname{sen} x} = 1$

81. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x = 1$

82. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = 1$

83. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x} = 1$

84. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 1$

85. $\lim\limits_{x \to 1} x^{1/1-x} = \dfrac{1}{e}$

86. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right) = \dfrac{1}{2}$

87. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{(\pi - 2x)\cos x}$

88. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \ln x \right) = \infty$

89. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + 2 \right) e^x$

90. El curso pasado obtuvimos el número **e** a partir del siguiente límite[1]:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \cong 2{,}718281828...$$

Demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x} \right)^x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ (Ayuda: Se recomienda aplicar la regla $A^B = e^{B \cdot \ln A}$)

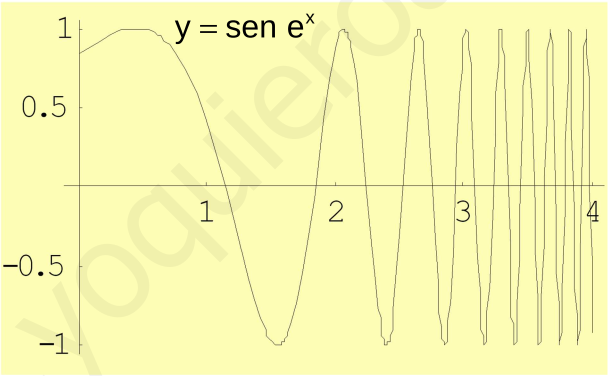
91. Hallar el valor de **a** para que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x+5}{4x+3} \right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x^2+1}{4x^2+\pi} \right)^{ax^2}$ $\left(\textit{Soluc: } a = \dfrac{2}{1-\pi} \right)$

---

[1] También se obtiene mediante la siguiente suma infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \cong 2{,}718281828...$$

APLICACIÓN de la DERIVADA a la REPRESENTACIÓN de FUNCIONES



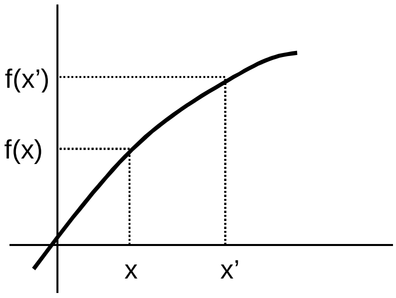
MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

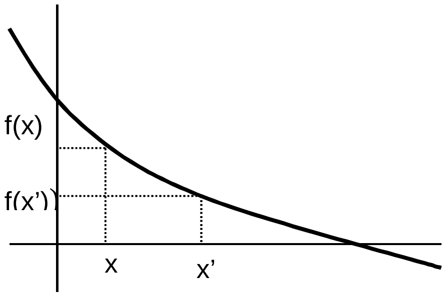
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: f(x) creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

f(x) decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

TEOREMA 1: $\boxed{f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } a}$ (¡El recíproco no siempre es cierto!)

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto".**

Observaciones:

1º) La justificación de este teorema es obvia: teniendo en cuenta que la derivada era la pendiente de la recta tangente, si la derivada es positiva significará que la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir, que la recta tangente es creciente, y, por lo tanto, también será creciente la gráfica.

2º) El recíproco no siempre es cierto: una función puede ser creciente en un punto y no ser necesariamente positiva su derivada (piénsese, por ejemplo, en $y=x^3$ en x=0).

3º) Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

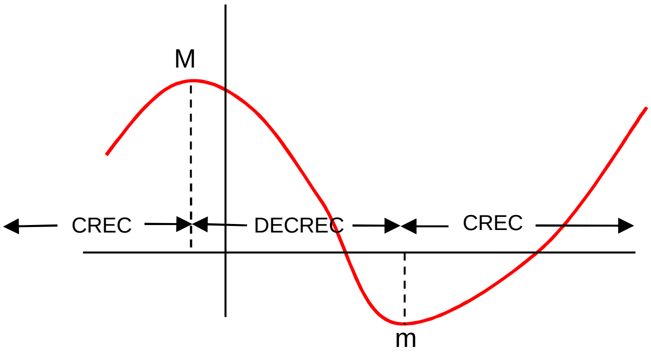
$$\boxed{f'(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } a}$$

4º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento** (también llamados "de monotonía") **será estudiar el signo de f '(x)** (debido al teorema anterior). Para ver cómo cambia el signo de f'(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (ver ejemplos 1, 2 y 3 que figuran a continuación). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m

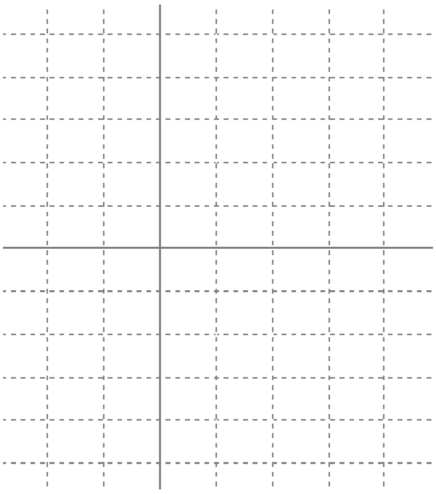
5º) Los intervalos de crecimiento se expresan siempre con respecto al eje x, como veremos en los mencionados ejercicios.

- "Una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo"

En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de monotonía:



PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO: **Estudiar el signo de f'(x)** (debido al teorema 1). Para ver cómo cambia el signo de f'(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (Además, hay que tener en cuenta las posibles discontinuidades de f(x) al indicar los intervalos).

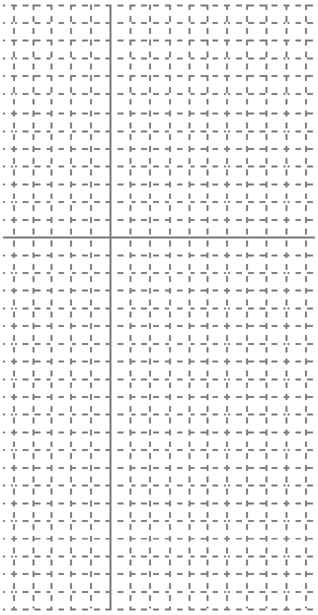


Ejemplo 1: Dada la parábola y = x^2-2x-3 se pide:

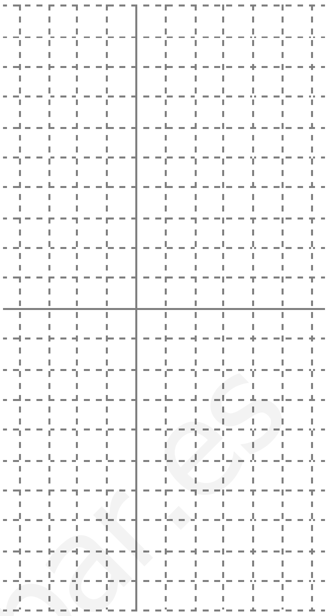
a) Representarla gráficamente

b) Estudiar el signo de f '(x) y deducir sus intervalos de crecimiento, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.

Ejemplo 2: Hallar los intervalos de crecimiento de f(x)=x^3-3x^2-9x+7. Con esa información, dibujar su gráfica.



Ejemplo 3: Hallar los intervalos de crecimiento de $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$
Hacer un esbozo de su gráfica.



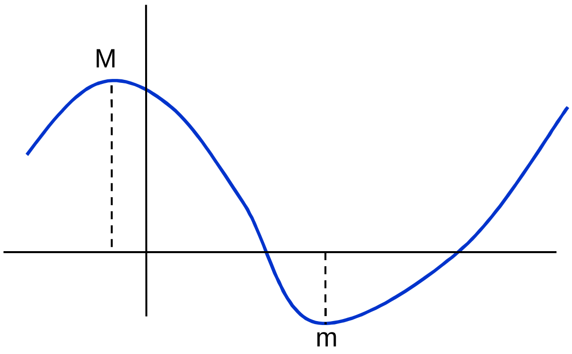
II) MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS (Extremos relativos) *(pág. 315 del libro de ed. Anaya)*

Idea intuitiva:

En un máximo (M) la función pasa de creciente a decreciente. Se llama **máximo relativo** o **local**.

En un mínimo (m) la función pasa de decreciente a creciente. Se llama **mínimo relativo** o **local**[1].

NOTA: Al final de este apartado veremos otros tipos de M o m, los absolutos.



Def:

f(x) tiene un M en **a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)<f(a)

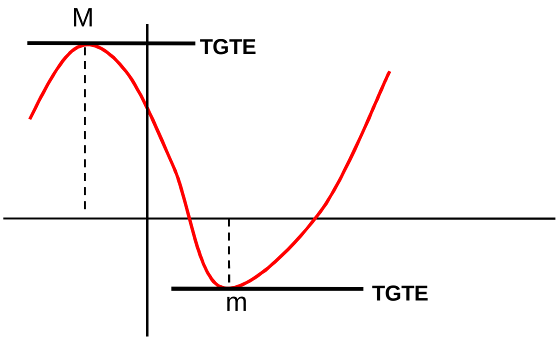
f(x) tiene un m en **a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)>f(a)

TEOREMA 2: $\boxed{x=a\text{ es M o m de } f(x)\Rightarrow f'(a)=0}$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

Justificación gráfica: En un M o m la tangente es horizontal, es decir, su pendiente será nula y por tanto su derivada también:

---

[1] Los extremos relativos también se llaman "puntos singulares" o "puntos críticos".



Observaciones:

1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un M o un m en un punto es que la derivada se anule. De hecho, **puede ocurrir que la derivada se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y=x^3$ entra en el origen con tangente horizontal –es decir, derivada nula–, pero no presenta M ni m, sino lo que se conoce como **punto de inflexión** (que estudiaremos a fondo en el apdo. IV).

2º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

3º) El valor de la función en el **m** puede ser mayor que en el **M**

4º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

5º) Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan f '(x)

6º) Si f '(x) no se anula nunca, no hay **M** ni **m**

2 MÉTODOS PARA HALLAR LOS M y m: Acabamos de ver que los posibles M o m se encuentran entre las raíces de f '(x), pero ¿cómo saber si alguna de estas raíces x=a es M o m, o no lo es? Hay dos formas:

1º) Estudiando el signo de f '(x) a ambos lados de x=a: Si pasa de ↗ a ↘ hay M en x=a
Si pasa de ↘ a ↗ hay m en x=a

En realidad, esto ya lo hemos aplicado en los ejemplos 1, 2 y 3 anteriores.

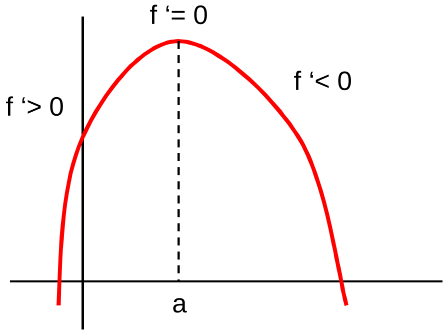
(NOTA: Si f'(x) no cambia de signo, presentará un **punto de inflexión**, como ya hemos explicado anteriormente)

2º) Estudiando el signo de f ''(a):

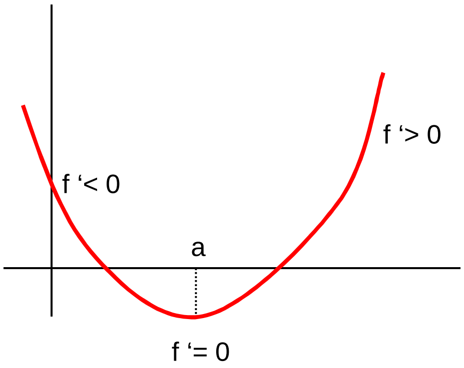
1º) $f'(a)=0 \Rightarrow x=a$ posible M o m
2º) $f''(a)>0 \Rightarrow x=a$ es m
$f''(a)<0 \Rightarrow x=a$ es M

NOTA: Si también f ''(a)=0, este método no decide y hay que recurrir al primer método.

Justificación gráfica:

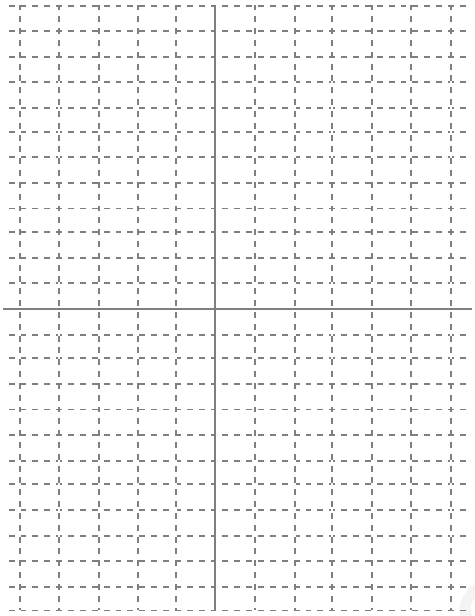


f ' decreciente $\Rightarrow f''(a)<0$ en un M

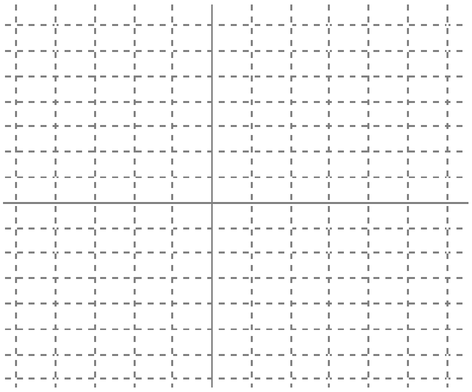


f ' creciente $\Rightarrow f''(a)>0$ en un m

Ejemplo 4: Hallar, mediante f''(x), los extremos relativos de $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$. Dibujar su gráfica.



Ejemplo 5: Ídem con $y=\frac{x^3}{x^2-1}$



Ejercicios final tema: 1, 2 y 3

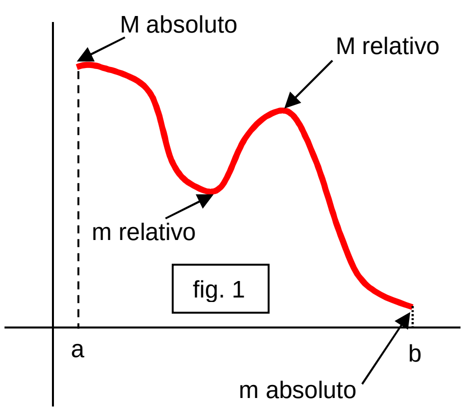
Ejercicios PAEG: 1B jun 2005, 2A sept 2005, 1B sept 2007, 1B sept 2008 ← con parámetros

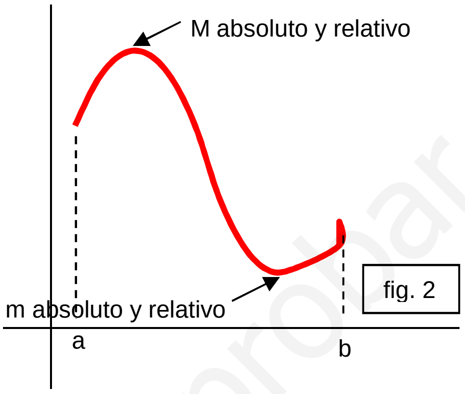
1B jun 2011, 1B jun 2012 (+límite), 1B jun 2010 (+L'Höpital) ← de aplicación real

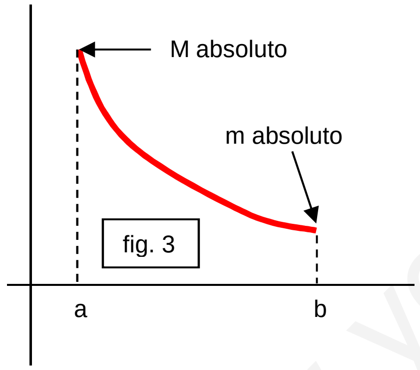
Ejercicios libro Anaya: pág. 315: 5 y 6; pág. 331 y ss.: 25 (a trozos), 27 (con parámetros)

M o m ABSOLUTOS:

Dada una función continua en un intervalo [a,b], pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:







En resumen:

- Los M y m relativos (los que hemos visto en los apartados anteriores) son máximos "locales", mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay M y m absolutos.
- Puede coincidir el M (o el m) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el M (o el m) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)

Ejercicio final tema: 4

III) PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN: *(pág. 288 del libro de Anaya)*

En este tipo de problemas (ejercicios 5 a 14 del final del tema) siempre vamos a tener dos elementos[2]:

1) Una función a maximizar (o minimizar) que depende de dos variables, x e y
2) Dicha función estará sujeta a una restricción, es decir, una ecuación que liga las dos variables.

Se resuelven siguiendo los siguientes pasos:

1) Despejar una de las dos incógnitas en la restricción y sustituir en la función a optimizar.
2) Hallar los M (o m) de la función resultante.
3) Interpretar las soluciones.

---

[2] ¡Cuidado! Existen problemas más sencillos, en los que no hay restricción, y solamente tenemos que encontrar el máximo (o mínimo) de una determinada función. Ver, por ejemplo, el problema 37 de la pág. 306 del libro de texto.

Ejemplo 6: Ejercicio 5, o bien *problema 2A junio 2002*

Ejercicios final tema: 5 a 15

Ejercicios PAEG: 4B jun 99, **1A sept 2001**, 3A sept 2002, 2A jun 2002, **1A sept 2003**, 1A jun 2003, 1A jun 2000, 1A sept 2002, 1B jun 2004, 2A sept 2004, 2A jun 2005, 1A sept 2005, 1A sept 2007, 1A jun 2009, 1A sept 2009 (NOTA: En la PAEG pueden pedir definición de extremo relativo)

Ejercicios libro Anaya: pág. 289: 1 a 4; pág. 304 y ss.: 10 a 15, 34, 36, 38 a 43

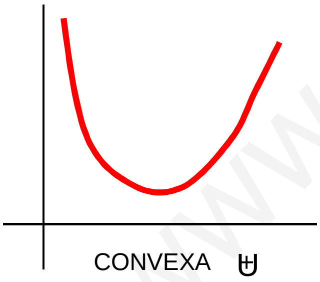
IV) INTERVALOS DE CONCAVIDAD-CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

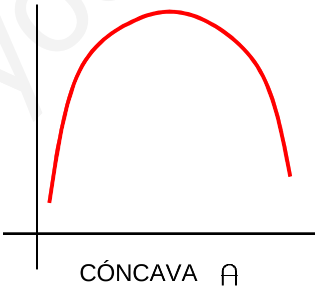
Definiciones:

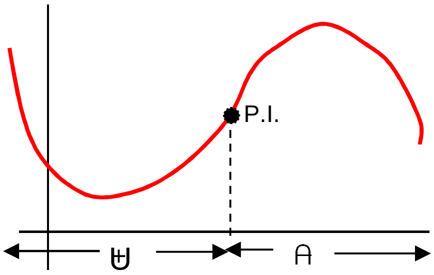
"Una f(x) es convexa[3] (⊎) en un punto cuando la recta tangente en dicho punto queda por debajo de la función"

"Una f(x) es cóncava (⩀) en un punto cuando la recta tangente queda por encima"

"Punto de inflexión (P.I.) es aquel en que la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa"`







"Una f(x) es cóncava (o convexa) en un intervalo cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo"

TEOREMA 3:

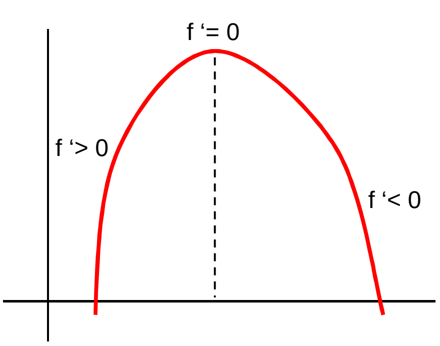
$f''(x)>0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f(x) ⊎ en ese intervalo

$f''(x)<0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f(x) ⩀ en ese intervalo

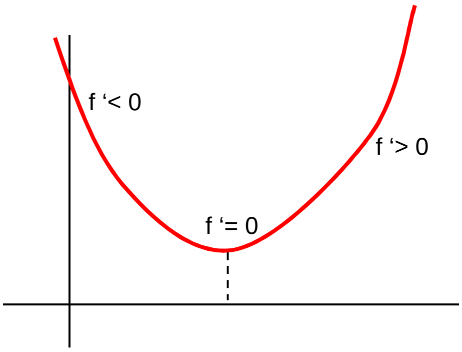
---

[3] Esta elección es totalmente arbitraria: algunos autores llaman cóncava a lo que nosotros llamaremos convexa, y viceversa. Nótese que ambos términos son relativos. Ahora bien, para evitar confusiones, se recomienda indicar, no cualquiera de los dos adjetivos, sino los símbolos matemáticos correspondientes, los cuales están más extendidos.

Justificación gráfica:



f ' decreciente $\Rightarrow$ f ''< 0



f ' creciente $\Rightarrow$ f ''> 0

Observaciones:

1º) El recíproco no siempre es cierto: por ejemplo, una función puede ser convexa en un punto y no ser estrictamente positiva su derivada segunda (piénsese, por ejemplo, en $y=x^4$ en x=0).

2º) Si f ''(a)=0 puede haber P.I. en x=a, ¡pero no necesariamente! Esto lo aclarará el teorema 4.

3º) Por lo tanto, debido al teorema 3, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de concavidad-convexidad** (también llamados "de curvatura") **será estudiar el signo de f ''(x)**. Para ver cómo cambia el signo de f''(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (como hacíamos con los intervalos de crecimiento). De los intervalos de curvatura deduciremos fácilmente los posibles P.I.

Ejemplo 7: Obtener los intervalos de curvatura de las funciones de los ejemplos 4 y 5, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$$

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}$$

TEOREMA 4: $\boxed{x = a \text{ es P.I. de } f(x) \Rightarrow f''(a) = 0}$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

Justificación: ¡Lógico! En un punto de inflexión la función no es ni cóncava ni convexa, es decir, según el teorema 3 no puede ser f '' ni positiva ni negativa, y por lo tanto será cero.

Observaciones:

1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un P.I. en un punto es que la derivada segunda se anule en dicho punto. De hecho, **puede ocurrir que la derivada segunda se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y=x^4$ es tal que su derivada segunda se anula en el origen, pero no presenta P.I.

2º) Puede haber varios **P.I.**, no haber, o infinitos.

3º) Los candidatos a **P.I.** son los que anulan f ''(x)

4º) Si f ''(x) no se anula nunca, no hay **P.I.**

2 MÉTODOS PARA HALLAR LOS P.I.: Acabamos de ver que los posibles P.I. se encuentran entre las raíces de f ''(x), pero ¿cómo saber si un punto x=a tal que f ''(a)=0 es efectivamente P.I.? Hay dos formas:

1º) Estudiando el signo de f ''(x) a ambos lados de x=a: Si pasa de ⊎ a ⋂ es P.I. (convexo-cóncavo)

Si pasa de ⋂ a ⊎ es P.I. (cóncavo-convexo)

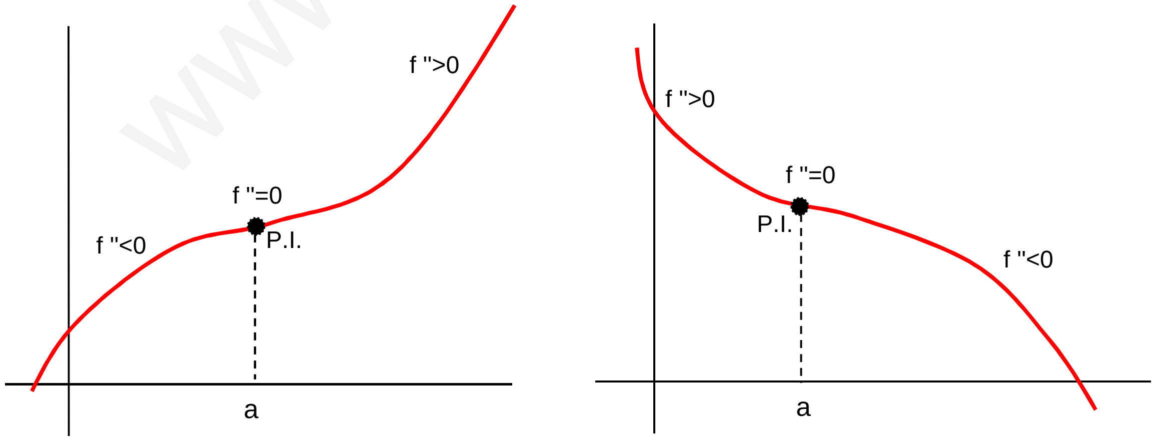
(Nótese que esto es lo que hemos hecho en el ejemplo anterior)

2º) Estudiando el signo de f '''(a):

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f''(a)=0 \\ f'''(a)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = a \text{ es P.I.}}$$

NOTA: Si también f '''(a)=0, este método no decide y hay que recurrir al primer método.

Justificación gráfica:



$$\underbrace{f''\text{ creciente} \Rightarrow f'''>0 \qquad\qquad f''\text{ decreciente} \Rightarrow f'''<0}_{\text{en ambos casos } f'''(a)\neq 0}$$

IMPORTANTE: Nótese que:

f ''(a)=0 y f '''(a)>0 $\Rightarrow$ P.I. cóncavo-convexo en x=a
f ''(a)=0 y f '''(a)<0 $\Rightarrow$ P.I. convexo-cóncavo en x=a

Ejemplo 8: Volver a hacer el ejemplo 7 por este método.

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$$

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}$$

Ejercicios final tema: 16 a 26

Ejercicios PAEG: 1B jun 2007, 1A jun 2006, 1B jun 2008, 1A jun 2012, 1A sept 2011(+ extremos absolutos) ← con parámetros; 1A sept 2008 ← sin parámetros (NOTA: En la PAEG pueden pedir la definición de P.I.)

Ejercicios libro Anaya: pág. 333: 26 (a trozos), 33 (con valor absoluto)

V) M, m y P.I. EN GENERAL:

Hay funciones que cumplen f '(a)=0 pero también f ''(a)=f '''(a)=f ^{iv}(a)=....=0 y sin embargo presentan M, m o P.I. en x=a, como por ejemplo $y=x^4$ o $y=x^5$

En este caso no funcionan los métodos expuestos hasta ahora, y en este tipo de situaciones (que, por otra parte, no son las más usuales) les aplicaremos el siguiente **método general**:

Supongamos que: f '(a)= f ''(a)=......=f $^{(n-1}$(a)=0 pero f $^{(n}$(a)≠0

Entonces: n par $\Rightarrow$ a es M o m (dependiendo de si f $^{(n}$(a) es <0 o >0 respectivamente)

n impar $\Rightarrow$ a es P.I.

No lo vamos a demostrar pues sería complicado. Comprobémoslo con dos ejemplos:

Ejemplo 9: Hallar los posibles M, m o P.I. de las siguientes funciones, representándolas previamente:

a) $y=x^4$

b) $y=x^5$

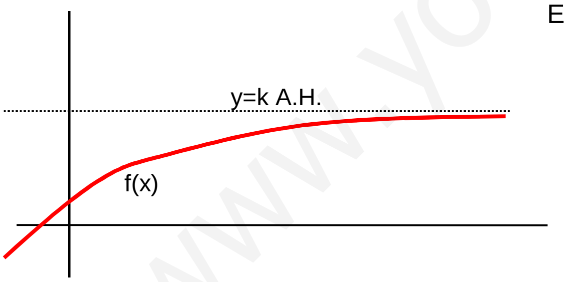
VI) ASÍNTOTAS:

Def: Una asíntota es una recta tangente a la función en el infinito, o dicho de otra forma, la asíntota se va aproximando tanto como queramos a la gráfica de la función, pero nunca llega a tocarla.

$$\text{Existen tres tipos de asíntotas: }\begin{cases}\text{horizontales}\\ \text{verticales}\\ \text{oblicuas}\end{cases}$$

Veamos cómo se obtienen:

a) A.H.[4]:



En la práctica se calcula mediante el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty\\(-\infty)}} f(x)=k \Rightarrow y=k \text{ es A.H.}}$$

Observaciones: 1) Cómo máximo puede haber dos A.H. (una cuando x → ∞ y otra cuando x → -∞), aunque normalmente es una sola.

2) La función puede cortar a la asíntota horizontal para valores finitos de x

Ejemplo 10: Hallar las posibles A.H. de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{4x^2+x+1}{2x^2+3}$

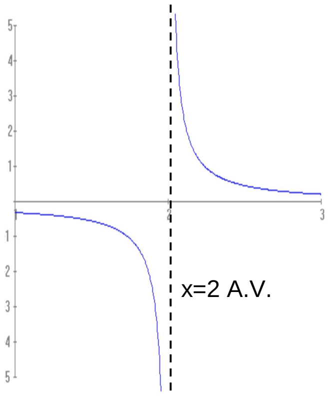
---

[4] Recordar que esta definición ya se vio en el tema 1, apdo. III

b) $y=\dfrac{6x^2-5}{x-2}$

c) $y=\dfrac{6x-5}{x^2+1}$

b) A.V.[5]:



Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{0}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{4\cdot 0^+}=\frac{1}{0^+}=\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{4\cdot 0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=2\ \text{A.V.}$$

En general: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=\underset{(-\infty)}{\infty}\Rightarrow x=a\ \text{es A.V.}}$

Observaciones: 1) En la práctica, en la mayoría de los casos las A.V. serán las x que anulen el denominador, pero no el numerador (apdos. d y e del ejemplo siguiente), aunque a veces hay excepciones (apdo. f).

2) Puede haber una, ninguna o varias A.V.

3) La gráfica nunca puede cortar a la A.V.

Ejemplo 11: Hallar las posibles A.H. y A.V. de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x+3}{x-2}$

b) $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-3x+2}$

c) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+4}$

---

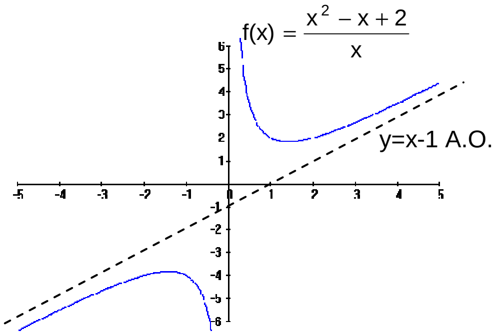
[5] Recordar que esta definición también se vio en el tema 1, apdo. II

d) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

e) $y=\dfrac{\text{sen }x}{x}$

f) $y=\dfrac{\text{sen }x}{x^2}$

c) A.O.:



$$\boxed{\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty\,(o\,-\infty)} \frac{f(x)}{x} \\ n &= \lim_{x\to\infty\,(o\,-\infty)} [f(x)-mx] \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=mx+n \text{ es A.O.}}$$

(no lo vamos a demostrar)

Ejercicio 12: Hallar las asíntotas de las siguientes funciones, e intentar hacer un esbozo de su gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x+3}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ **e)** y=x-lnx

*(Sol: **a)** A.V. x=0; A.O. y=x-1; **b)** A.V. x=–3; A.O. y=x-8; **c)** A.V. x=1; A.O. y=x+1; **d)** A.V. x=±2; A.O. y=x; **e)** A.V. x=0; no tiene A.O.)*

Observaciones:

1) Si sale m=∞ (o -∞) o m=0 ⇒ no hay A.O.

2) Una función puede tener como máximo 2 A.O.

2) IMPORTANTE: Una función no puede tener <u>por el mismo lado</u> (∞ o –∞) a la vez A.H. y A.O.

3) La gráfica puede cortar a la A.O. para valores finitos de x, pero no en el ∞

4) IMPORTANTE: una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.

5) IMPORTANTE: Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo (presentan, más bien, ramas infinitas)

6) Un método alternativo para hallar asíntotas oblicuas consiste en hacer la división polinómica del numerador y el denominador: la expresión del cociente resultante será la ecuación de la A.O. (naturalmente, esto sólo es posible en el caso de funciones racionales).

Ejercicios final tema: 27

Ejercicios PAEG: 1B sept 2009, 1B sept 2007, 1B jun 2013 (+recta tangente), 1B sept 2012 ← con parámetros; 1A jun 2011 (+extremos relativos) ← sin parámetros *(NOTA: En la PAEG pueden pedir la definición de cualquiera de los tres tipos de asíntotas)*

Ejercicios libro Anaya: pág. 331 y ss.: 7, 24, 28 (con parámetros), 29, 32 (con valor absoluto), 39 y 49

VII) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES: *(págs. 316 a 325 del libro de Anaya)*

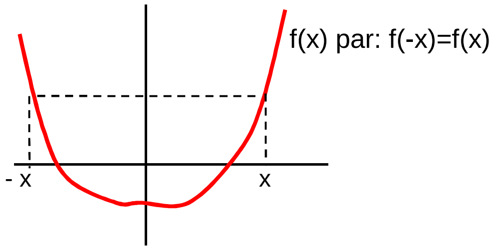
Normalmente, en los problemas de PAEG nos piden que obtengamos, de todas las cuestiones vistas hasta ahora, a lo sumo dos (p.ej. asíntotas e intervalos de curvatura, o asíntotas y M y m, etc). Sin embargo, nosotros vamos a reunir todo lo visto hasta ahora, junto con conocimientos de cursos anteriores, y a la hora de representar una función vamos a hallar, por este orden, los siguientes aspectos:

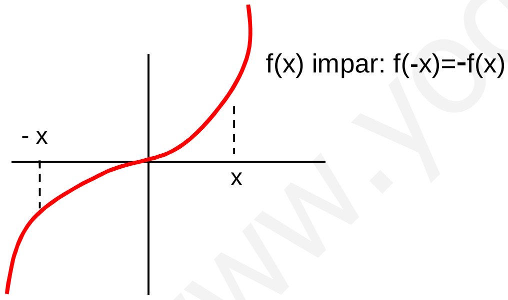
1º) Dom(f):

- Recordar que es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen f(x)
- Las reglas para hallarlo son prácticamente las mismas que las vistas en el apdo. VIII del tema 1 para estudiar la continuidad de las funciones más usuales. *(pág. 312 del libro de texto)*

Ejercicios libro Anaya: pág. 312: 1 y 2

2º) Simetría: *(pág. 313 del libro de Anaya)*





$$\boxed{f(-x)=\begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica} \end{cases}}$$

Ejemplo 13: Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2+x^4}{2}$

b) $y=\dfrac{x\text{ - }x^3}{2}$

c) $y=x^2-x^3$

d) $y=\dfrac{\cos x}{x}$

Observaciones: 1) Si f(x) es impar y está definida en x=0, entonces necesariamente pasa por el origen (P.ej. la función del ejemplo d) no cumple esto)

2) Recordar: La ventaja de saber si una función es simétrica es que basta con estudiarla a la derecha del origen. Por ejemplo, si es par y tiene un M(2,5), tendrá otro M(-2,5), pero si es impar presentará un m(-2,-5)

3) Una función no tiene por qué ser simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no son simétricas.

Ejercicios libro: pág. 313: 3; pág. 334: 42

3º) Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo y=0 (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo x=0	uno o ninguno

Ejemplo 14: Hallar el posible corte con los ejes de las siguientes funciones (e intentar hacer un esbozo de la gráfica):

a) $y = x^2 + 2x - 3$

b) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$

c) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

4º) M y m (⇒ Intervalos de crecimiento)

5º) P.I. (⇒ Intervalos de concavidad)

6º) Asíntotas

7º) Finalmente, a la hora de representar una función, a veces puede ser útil completar la información ya obtenida confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles o que no han quedado claros con el estudio anterior.

Ejemplo 15: Dada $f(x)=(x+2)\,e^{x}$, se pide, por este orden:

a) Hallar, razonadamente, su Dom(f), y sus posibles cortes con los ejes. (*Soluc: (-2,0) y (0,2)*)

b) Hallar sus posibles M y m, y P.I. (*Soluc: m(-3,-1/e^3); P.I. (-4,-2/e^4)*)

c) Con la información anterior, ¿se puede dibujar su gráfica? En caso de precisarse algún dato adicional, obtenerlo, y hacer a continuación la gráfica. (*Soluc: Son necesarias, también, sus asíntotas*)

Ejercicios final tema: 28 y 29

Ejercicios PAEG: 1B jun 97, 1B sept 97, 2B jun 98, 3B sept 98, 1A sept 99, **4A jun 2002**, 3A sept 2003, 2A jun 2004, 1B sept 2005, **1B sept 2006**

Ejercicios libro: pág. 317: 1 y 2 (polinómicas); pág. 319: 1 y 2 (racionales); pág. 321: 1 (con raíces), 2 (logaritmos) y 3 (exponenciales); pág. 325: 1 (con valor absoluto); pág. 331 y ss.: 5 (diversos tipos), 6 (polinómicas), 8 (racionales), 9 y 10 (a trozos), 11 a 17 (diversos tipos), 18 (exponenciales y logarítmicas), 19 (con raíces), 20, 21 y 23 (valor absoluto); pág. 331: 1 a 4 (descripción de una función);

VIII) ANEXO: Cuadro de clasificación de funciones elementales:

- FUNCIONES
  - EXPLÍCITAS
    - ALGEBRAICAS
      - POLINÓMICAS: $y=x^2-5x+6$
      - RACIONALES: $y=\frac{x+3}{x^2-4}$
      - IRRACIONALES: $y=x^2-\sqrt{2x+7}$
    - TRASCENDENTES
      - EXPONENCIALES: $y=5^x$
      - LOGARÍTMICAS: $y=\log(7^x+1)$
      - TRIGONOMÉTRICAS: y=sen x
      - CICLOMÉTRICAS: y=arc cos x
  - IMPLÍCITAS: $3x^2-2y+7=0$

EJERCICIOS de REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES 2º BACH.

INTERVALOS DE CRECIMIENTO. M Y m:

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Aplicar para ello, alternativamente, los dos métodos conocidos: mediante f' y mediante f''. Intentar hacer un esbozo de su gráfica (si se puede).

a) $f(x)=x^4-2x^2$

b) $f(x)=x^3-3x^2+1$

c) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

d) $f(x)=\left(x^3-4x^2+7x-6\right)e^x$

e) $f(x)=\ln x$

f) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

g) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

h) $f(x)=x^4-4x^3+1$

i) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

j) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

k) $f(x)=\frac{1}{x^4+3}$

l) $f(x)=\frac{1}{x^3+x}$

m) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$

n) $f(x)=\frac{4x+5}{2x-3}$

o) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$

p) $y=2x^3-9x^2$

q) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

r) $y=x^3-12x$

s) $y=\frac{x+2}{x-1}$

t) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

u) $y=\frac{x^2-x+2}{x}$

*(Sol: **a)** ↗(-1,0)U(1,∞) ↘(-∞,-1)U(0,1); **b)** ↗(-∞,0)U(2,∞) ↘(0,2); **c)** ↗(-∞,1)U(3,∞) ↘(1,3); **d)** ↗(1,∞) ↘(-∞,-1); **e)** ↗ ∀x∈ℜ; **f)** ↘(-∞,0) ↗(0,∞); **g)** ↗(-∞,-1)U(3,∞) ↘(-1,3); **h)** ↘(-∞,3) ↗(3,∞); **i)** ↗(-∞,-4)U(0,∞) ↘(-4,-2)U(-2,0); **j)** ↗(-∞,0) ↘(0,∞); **k)** ↗(-∞,0) ↘(0,∞); **l)** ↘ ∀x∈Dom(f) **m)** ↘ (-∞,-1) ↗ (-1,∞); **n)** ↘ ∀x∈Dom(f))*

2. ***(S)*** Definir extremo relativo. Razonar por qué la gráfica de la función y=2x+cos x no puede presentar extremos relativos.

3. ***(S)*** Dada $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, considérese la función g(x)=f(x)+cx. Determinar los valores de **c** para los que es creciente para todo x. *(Soluc: c>3√3/8)*

4. ***(S)*** Determinar el máximo y el mínimo de $f(x)=x^5+x+1$ en el intervalo [0,2]

(Soluc: m absoluto en (0,1) y M absoluto en (2,35))

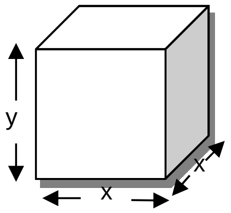
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN:

5. Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible. *(Soluc: 10 y 10)*

6. De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 5 m, determinar el que tiene área máxima.
(Soluc: el que tiene ambos catetos de 5√2/2 m)

7. Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 m.
(Soluc: un cuadrado de lado 10 m.)

8.



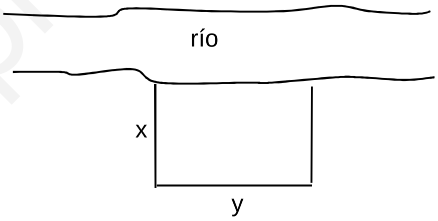
¿Qué dimensiones debe tener un depósito <u>abierto</u> de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros para que en su fabricación se utilice la menor superficie de chapa posible? (Recordar: 1m^3 = 1000 litros) *(Soluc: x = 2 m, y = 1 m)*

9. ***(S)*** Se desea diseñar una lata de conservas cilíndrica de 160 cm^3. Hallar las dimensiones de la más económica, esto es, la que emplee menos chapa en su construcción. *(Soluc: r $\cong$2,94 cm., h $\cong$5,88 cm)*

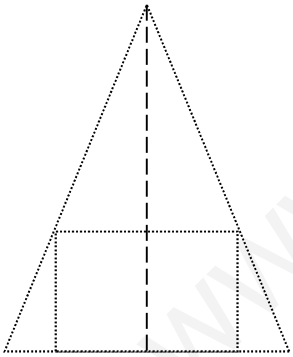
10. Se desea construir un marco para una ventana que debe tener 1 m^2 de luz. El coste del marco se estima en 400 pts. por cada metro de altura y 225 por cada metro de anchura ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico? *(Soluc: 4/3 metros de largo y 3/4 metros de ancho)*

11. De todos los rectángulos de área 9 cm^2 halla las dimensiones del que tiene perímetro mínimo.
(Soluc: un cuadrado de 3 cm de lado)

12. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180000 m^2 ¿Qué dimensiones habrá de tener el terreno de forma que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado? *(Soluc: x = 300 m, y = 600 m)*



13. ***(S)*** Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 metros de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la mayor superficie posible? *(Soluc: r = 5 m)*



14. De entre todos los triángulos isósceles de perímetro 36, hallar el que tiene área máxima. *(Soluc: un triángulo equilátero de lado 12)*

15. ***(S) (*)*** En un triángulo isósceles de base 12 cm y altura 18 cm se quiere inscribir un rectángulo de área máxima, como muestra la figura. Hallar las dimensiones de este rectángulo. (Ayuda: Plantear semejanza de triángulos).

(Soluc: Se trata de un rectángulo de base 6 cm y altura 9 cm)

INTERVALOS DE CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN:

16. Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, y los posibles P.I. de las siguientes funciones (aplicar para ello, alternativamente, los dos métodos conocidos: mediante f'' y mediante f''':

a) $f(x)=x^2+1$
b) $y=x^3$
c) $f(x)=x^2-4x+1$
d) $f(x)=x-x^2$
e) $y=x^3-2x^2-x+2$
f) $f(x)=x^4-6x^2$
g) $y=x^4+2x^3+6x^2+10x+5$
h) $y=x^3+3x^2+3x+1$
i) $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-5x+1$
j) $f(x)=\ln x$
k) $f(x)=x^4$
l) $y=\frac{x^5}{10}+\frac{x^4}{3}+x+1$

(Sol: ***a)*** *⊎ ∀IR;* ***b)*** *⊎ (0,∞) ⩀(-∞,0);* ***c)*** *⊎∀IR;* ***d)*** *⩀ ∀IR;* ***e)*** *⊎ (2/3,∞) ⩀(-∞,2/3);* ***f)*** *⊎ (-∞,-1)U(1,∞) ⩀(-1,1);* ***g)*** *⊎∀IR;* ***h)*** *⊎ (-1,∞) ⩀(-∞,-1);* ***i)*** *⊎(-∞,1)U(2,∞) ⩀(1,2);* ***j)*** *⩀ en su dominio;* ***k)*** *⊎∀IR;* ***l)*** *⩀(-∞,-2) ⊎ (-2,∞))*

17. Definir punto de inflexión. Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^5-5x^3$, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Representarla. *(Soluc: M(–1,2), m(1,–2), P.I.(0,0))*

18. ***(S)*** Ídem para $y = xe^{-x}$ *(Soluc: M(1,1/e), ↗(-∞,1), ↘(1,∞), P.I.(2,2/e²), ⊎ (2,∞), ⩀ (-∞,2))*

19. ***(S)*** Obtener la ecuación de la tangente a la gráfica de $f(x)=2x^3-6x^2+4$ en su punto de inflexión. Intentar dibujar la situación. *(Soluc: y=–6x+6)*

20. ***(S)*** Sea f(x) la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$$

(siendo a y b ∈ IR). Hallar **a** y **b** para que f sea continua y derivable en el punto x=0. Para los anteriores valores de a y b, analizar si f(x) tiene inflexión en el punto x=0. *(Soluc: a=1, b=0; x=0 sí es P.I.)*

21. Obtener los parámetros **a** y **b** para que la función $y=x^2+ax+b$ alcance un mínimo en el punto P(–1,2).

(Soluc: a=2, b=3)

22. Hallar **a**, **b**, **c** y **d** en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que tenga un máximo en el punto M(0,4) y un mínimo en el punto M'(2,0). *(Soluc: a=1, b=–3, c=0, d=4)*

23. Hallar **a**, **b** y **c** en la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ para que tenga un punto de inflexión de abscisa x=3, pase por el punto P(1,0) y alcance un mínimo en x=1. *(Soluc: a=–9, b=6, c=2)*

24. ***(S)*** Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+7$. Hallar **a** y **b** de manera que la curva *y=f(x)* tenga para x=1 una inflexión con tangente horizontal. *(Soluc: a=–3, b=3)*

25. Hallar **a**, **b**, **c** y **d** en la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ para que pase por el punto P(–1,1) y tenga punto de inflexión con tangente horizontal en Q(0,–2). *(Soluc: a=–3, b=c=0, d=2)*

26. ¿Qué valores deben tomar **a**, **b**, **c** y **d** para que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto crítico en x=1 y un punto de inflexión con tangente de ecuación *y=2x* en el origen? *(Soluc: a=–2/3, b=d=0, c=2)*

ASÍNTOTAS:

27. Hallar las asíntotas de las siguientes funciones (e intentar hacer un esbozo de la gráfica, si se puede):

a) $y = x^2 - x + 1$	**b)** $y=\frac{x-1}{x+1}$	**c)** $y = \frac{x^2-1}{x}$

d) $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$

e) $y=\frac{4x}{x^2+4}$

f) $y=\frac{x-1}{x^2-1}$

g) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

h) $y=\frac{3x^3+4x^2+4}{x^2+1}$

i) $y=\frac{x^3}{(1+x)^2}$

j) $y=\mathrm{tg}\,x$

k) $y=\sqrt{x}$

l) $y=\sqrt{x^2\text{-}1}$

m) $y=\ln x$

n) $y=\ln(x+2)$

α) $y=\ln(x^2+1)$

β) $y=\ln(x^2-5x+6)$

γ) $y=\frac{1}{\ln x}$

δ) $y=e^x$

ε) $y=e^{-x}$

ζ) $y=e^{1/x}$

η) $y=xe^x$

ϑ) $y=\frac{x}{e^x}$

ι) $y=xe^{1/x}$

κ) $y=\frac{x}{e^x-1}$

*(Soluc: **a)** no tiene; **b)** x=−1, y=1; **c)** x=0, y=x; **d)** x=1, x−2y+1=0; **e)** y=0; **f)** x=−1, y=0; **g)** x=±1, y=1; **h)** y=3x+4; **i)** x=−1, y=x−2; **j)** y=π/2+kπ; **k)** no tiene; **l)** y=±x; **m)** x=0; **n)** x=−2; **o)** no tiene; **p)** x=2, x=3; **q)** x=1, y=0; **r)** y=0; **s)** y=0; **t)** x=0, y=1; **u)** y=0; **v)** y=0; **w)** x=0, y=x+1; **x)** y=0, y=−x)*

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES:

28. Dadas las siguientes funciones, hallar los intervalos de crecimiento y posibles M y m, intervalos de curvatura y posibles P.I, asíntotas y representación gráfica:

a) $f(x)=\frac{2x^2}{x-1}$

$$\left(\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,0)\cap(2,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(0,2)\text{-}\{1\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(0,0)\text{ y } m(2,8)\\ f(x)\bigcap\forall x\in(-\infty,1)\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\uplus\forall x\in(1,\infty)\end{array}\right)$$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$$\left(\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}f(x)\searrow\forall x\in(-\infty,\text{-}1)\cap(1,\infty)\\ f(x)\nearrow\forall x\in(\text{-}1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow m(\text{-}1,\text{-}1/2)\text{ y } M(1,1/2)\\ \left.\begin{array}{l}f(x)\bigcap\forall x\in(-\infty,\text{-}\sqrt{3})\cap(0,\sqrt{3})\\ f(x)\uplus\forall x\in(\text{-}\sqrt{3},0)\cap(\sqrt{3},\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(\text{-}\sqrt{3},\text{-}\sqrt{3}/4)\text{ y }(\sqrt{3},\sqrt{3}/4)\end{array}\right)$$

c) $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$

$$\left(\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}f(x)\searrow\forall x\in(-\infty,\text{-}\sqrt{3})\cap(\sqrt{3},\infty)\\ f(x)\nearrow\forall x\in(\text{-}\sqrt{3},\sqrt{3})\end{array}\right\}\Rightarrow m(\text{-}\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}/2)\text{ y } M(\sqrt{3},\ \text{-}3\sqrt{3}/2)\\ \left.\begin{array}{l}f(x)\uplus\forall x\in(-\infty,\text{-}1)\cap(0,1)\\ f(x)\bigcap\forall x\in(\text{-}1,0)\cap(1,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(0,0)\end{array}\right)$$

d) $f(x)=\frac{4}{x^2+3}$

$$\left(\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,0)\\ f(x)\searrow\forall x\in(0,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow M(0,4/3)\\ \left.\begin{array}{l}f(x)\uplus\forall x\in(-\infty,\text{-}1)\cap(1,\infty)\\ f(x)\bigcap\forall x\in(\text{-}1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{P.I.}(\text{-}1,1)\text{ y }(1,1)\end{array}\right)$$

e) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

$$\left(\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}f(x)\nearrow\forall x\in(-\infty,\text{-}1)\cap(1,\infty)\\ f(x)\searrow\forall x\in(\text{-}1,1)\text{-}\{0\}\end{array}\right\}\Rightarrow M(\text{-}1,\text{-}2)\text{ y } m(1,2)\\ f(x)\bigcap\forall x\in(-\infty,0)\qquad\text{(no tiene P.I.)}\\ f(x)\uplus\forall x\in(0,\infty)\end{array}\right)$$

f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$

f(x) ↘∀x∈(-∞,-√2)∩(√2,∞)
f(x) ↗∀x∈(-√2,√2) ⇒ M(√2,√2/4) y m(-√2,-√2/4)
f(x)⋂ ∀x∈(-∞,-√6)∩(0,√6)
f(x)⊎∀x∈(-√6,0)∩(√6,∞) ⇒ P.I.(√6,√6/8) y (-√6,-√6/8)

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

f(x) ↗∀x∈(-∞,-1/2)-{-2}
f(x)↘∀x∈(-1/2,∞)-{1} ⇒ M(-1/2,-4/9)
f(x)⊎∀x∈(-∞,-2)∩(1,∞) (no tiene P.I.)
f(x)⋂ ∀x∈(-2,1)

h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

f(x) ↗∀x∈(-∞,-2)∩(0,∞)
f(x)↘∀x∈(-2,0)-{-1} ⇒ M(-2,-4) y m(0,0)
f(x)⋂ ∀x∈(-∞,-1) (no tiene P.I.)
f(x)⊎∀x∈(-1,∞)

i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

f(x) ↗∀x∈(-∞,0)∩(2,∞)
f(x)↘∀x∈(0,2)-{1} ⇒ M(0,-2) y m(2,2)
f(x)∩∀x∈(-∞,1) (no tiene P.I.)
f(x)U∀x∈(1,∞)

j) $f(x)=\dfrac{x^2+11}{x+5}$

f(x) ↗∀x∈(-∞,-11)∩(1,∞)
f(x)↘∀x∈(-11,1)-{-5} ⇒ M(-11,-22) y m(1,2)
f(x)⋂ ∀x∈(-∞,-5) (no tiene P.I.)
f(x)⊎∀x∈(-5,∞)

k) $y=(x^3-4x^2+7x-6)e^x$

f(x) ↘∀x∈(-∞,-1)
f(x) ↗∀x∈(-1,∞) ⇒ m(-1,-18/e)
f(x)⋂ ∀x∈(-∞,-3)U(0,1) ⇒ P.I.: (-3,-90/e^3), (0,-6), (1,-2e)
f(x)⊎∀x∈(-3,0)U(1,∞)

l) $y=x^3-3x+2$

m) $y=x-|x-3|+|x+1|$

n) $y=\dfrac{x^2+3x}{|x|+1}$

o) $f(x)=|x-5|x$

p) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

q) $y=x^3+2x^2-10x-20$

r) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

s) $y=\dfrac{e^x}{x}$

t) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

u) $f(x)=\ln(4-x^2)$

v) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

w) $y=x-\ln x$

29. ***(S)*** Estudiar para qué valores de x está definida la función f(x)=ln[(x–1)(x–2)] y en qué valores es creciente y decreciente. *(Soluc: Dom(f)=(–∞,1)U(2,∞), ↗(2,∞), ↘(–∞,1))*

INTEGRAL INDEFINIDA

MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

El inglés Isaac Newton (1642-1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), aunque antagonistas, los dos principales creadores del cálculo infinitesimal.

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA[1] *(Ver pág. 338 del libro de ed. Anaya)*

Dada f(x)=2x nos preguntamos ¿qué función F(x) es tal que al derivarla nos da f(x)? Claramente es $F(x)=x^2$, pero no sólo esa sino también $F(x)=x^2+2$, $F(x)=x^2-5$,... y en general $F(x)=x^2+C$ (siendo C cte.). A F(x) se le llama "**primitiva** de f(x)". La notación que se sigue es:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

integrando primitiva de f(x) cte. de integración

A $\int f(x)\,dx$ se le llama "integral (indefinida) de f(x)". Nótese que una f(x) puede tener[2] infinitas primitivas, que se diferencian, como vemos, en una constante.

Ejemplos:

a) $\int 2x\,dx = x^2 + C$ pq. $\left(x^2\right)' = 2x$

b) $\int 3x^2\,dx =$

c) $\int \cos x\,dx =$

d) $\int e^x\,dx =$

e) $\int dx =$

f) $\int 2\,dx =$

La cte. de integración C a veces se omite pues se sobreentiende. Nótese que la integración es la operación contraria de la derivación, por lo que la tabla de integrales (ver anexo final de este libro) es prácticamente idéntica a la de derivadas pero al revés. Vamos a justificar, por ejemplo, el caso de <u>la integral de una potencia</u>, que, por cierto, <u>es la más utilizada</u> (el resto se haría igual):

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

Ejercicio: Utilizando la tabla, hallar las siguientes integrales inmediatas, y efectuar la comprobación:

a) $\int x^4\,dx =$

b) $\int x\,dx =$

c) $\int \frac{1}{x^3}\,dx =$

d) $\int \sqrt{x}\,dx =$

e) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx =$

f) $\int \frac{1}{x}\,dx =$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$

h) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx =$

---

[1] En el próximo tema veremos el concepto de integral definida, y entonces comprenderemos que el obtener una primitiva de una función es relevante, pues nos permitirá obtener el área bajo una curva.

[2] Más adelante veremos que no todas las funciones tienen por qué tener una primitiva, al menos "elemental".

II) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL *(Ver pág. 338 del libro de ed. Anaya)*

Son consecuencia de las propiedades de la derivada:

1) $\boxed{\int f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)}$ es decir, “la integral de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de las integrales”.

2) $\boxed{\int k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int f(x) \cdot dx}$ es decir, “las constantes **multiplicativas** pueden entrar o salir de la integral”.

La utilización conjunta de ambas propiedades, junto con la tabla, nos permite resolver un gran número de integrales. Para ello, a veces tendremos que introducir o extraer una constante en el integrando, según convenga, como veremos en el siguiente

Ejercicio: Resolver las siguientes integrales inmediatas (al margen figura cada primitiva); se recomienda efectuar la comprobación:

1) $\int \left(x^2 + x + 1\right)\, dx =$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

2) $\int 6x^3\, dx =$ $= \frac{3x^4}{2} + C$

3) $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right)\, dx =$ $= x^3 + x^2 + x + C$

4) $\int (x+1)^2\, dx =$ $= \frac{(x+1)^3}{3} + C$

(de 2 formas)

5) $\int (x+1)^{50}\, dx =$ $= \frac{(x+1)^{51}}{51} + C$

6) $\int 2x\, \left(x^2 + 1\right)^3\, dx =$ $= \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$

7) $\int x\, \left(x^2 - 2\right)^4\, dx =$ $= \frac{(x^2-2)^5}{10} + C$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$ $= -\sqrt{1-x^2} + C$

9) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}\, dx =$ $= \ln\left(x^3 + x + 5\right) + C$

(*) 10) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx =$ $= x - \text{arctg}\,x + C$

(de 2 formas)

11) $\int \frac{x^2}{x^3+8}\,dx =$ $= \ln\sqrt[3]{x^3+8} + C$

12) $\int \frac{1}{x^3}\,dx =$ $= -\frac{1}{2x^2} + C$

13) $\int \text{ctg}\,x\,dx =$ $= \ln \text{sen}\,x + C$

14) $\int \text{tg}\,x\,dx =$ $= \ln \sec x + C$

15) $\int -\frac{5}{x^2}\,dx =$ $= \frac{5}{x} + C$

16) $\int \frac{\text{sen}\,2x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx =$ $= \ln(1+\text{sen}^2 x) + C$

17) $\int e^{2x+1}\,dx =$ $= \frac{e^{2x+1}}{2} + C$

18) $\int 3^x\,dx =$ $= \frac{3^x}{\ln 3} + C$

19) $\int x\,e^{x^2}dx =$ $= \frac{e^{x^2}}{2} + C$

20) $\int \cos x\,e^{\text{sen}\,x}\,dx =$ $= e^{\text{sen}\,x} + C$

21) $\int \cos 2x\,dx =$ $= \frac{\text{sen}\,2x}{2} + C$

22) $\int \text{sen}(2x+8)\,dx =$ $= -\frac{\cos(2x+8)}{2} + C$

23) $\int x\,\cos(x^2+1)\,dx =$ $= \frac{\text{sen}(x^2+1)}{2} + C$

24) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx =$ $= \text{sen}(\ln x) + C$

(*) 25) $\int tg^2x\ dx =$ $= -x + tg\ x + C$

(*) 26) $\int tg^3x\ dx =$ $= \frac{tg^2x}{2} + \ln(\cos x) + C$

27) $\int sen^3x\ \cos x\ dx =$ $= \frac{sen^4x}{4} + C$

28) $\int \frac{\cos x}{sen^2x}\ dx =$ $= -\operatorname{cosec} x + C$

(*) 29) $\int \left(tg^3x + tg^5x\right)\ dx =$ $= \frac{tg^4x}{4} + C$

30) $\int \frac{x+1}{x}\ dx =$ $= x + \ln|x| + C$

31) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx =$ $= 2\operatorname{arcsen} x + C$

32) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx =$ $= \operatorname{arcsen} x^2 + C$

33) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx =$ $= \operatorname{arcsen} e^x + C$

34) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\ dx =$ $= \operatorname{arcsen} \ln\ |x| + C$

(*) 35) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\ dx =$ $= 2\operatorname{arcsen} \sqrt{x} + C$

CONSECUENCIA: Para adquirir una buena técnica de integración es condición previa el saberse perfectamente la tabla de derivadas

36) $\int \frac{x}{1+x^4}\ dx =$ $= \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + C$

37) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\ dx =$ $= \frac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + C$

38) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\ dx =$ $= -\frac{1}{x-1} + C$

(*) 39) $\int \frac{dx}{x^2+2x+1} =$ $= -\frac{1}{x+1} + C$

(*) 40) $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx =$ $\quad = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$

41) $\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx =$ $\quad = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\ln|x-4| + C$

42) $\int \sqrt{x}\,\left(x^2+x+1\right)\,dx =$ $\quad = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

43) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx =$ $\quad = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$

44) $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx =$ $\quad = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)^2 + C$

45) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx =$ $\quad = \ln|1-\cos x| + C$

46) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx =$

Ejercicios final tema: 1 a 5

Ejercicios PAEG: sept 2012 2A, jun 2011 2A, sept 2005 2B

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 339: 1; pág. 340: 2 y 3; pág. 342: 1 y 2; pág. 345: 1 y 2; pág. 356: 1 a 12

III) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN o CAMBIO DE VARIABLE *(Ver pág. 342 libro de ed. Anaya)*

Se trata de resolver una integral no inmediata $\int f(x)\,dx$ mediante el siguiente procedimiento:

1º) Escogemos el cambio apropiado: x=g(t) y calculamos la diferencial[3] en ambos miembros: $dx=g'(t)\,dt$

2º) Sustituimos las dos expresiones anteriores (**x** y **dx**) en la integral a resolver (con lo que ahora pasará a depender de **t**), simplificamos y, si hemos escogido el cambio adecuado, obtendremos una integral inmediata en **t**, que resolveremos.

3º) Una vez resuelta deshacemos el cambio, es decir, ponemos la expresión obtenida de nuevo en función de **x**

El saber elegir el cambio de variable apropiado en cada caso a veces puede resultar complicado[4], y en cualquier caso lo da la práctica. A veces es algo intuitivo, pero en ciertas integrales (trigonométricas, tipo arco tangente, etc.) pueden darse algunas reglas orientativas:

1. En las integrales NO inmediatas en las que haya $\sqrt{\ }$, suele funcionar el cambio RADICANDO=t^2
2. " " " " " " " " aparezcan $\sqrt{\ }$ de distinto índice, puede funcionar el cambio RADICANDO=$t^{\text{mcm de los índices}}$
3. En las integrales NO inmediatas en las que aparezca a^x, puede ensayarse $a^x=t$
4. Para integrales trigonométricas NO inmediatas existen ciertos cambios establecidos, como veremos en el apdo. VII, al final del tema.

Ejemplo: Resolver $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ mediante[5] el cambio $t^2=x-1$

Ejercicios final tema: 6

Ejercicios PAEG: jun 2007 2A, jun 2010 2B

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 358 y ss.: **25**, 26, 31 y 46

IV) INTEGRAL TIPO ARCOTANGENTE

A) Vamos a ver, en primer lugar, un **caso particular** fácil de resolver:

Ejemplo: $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx =$

---

[3] De momento bastará con saber que **la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función, multiplicada por su incremento dx correspondiente** (es decir, el dx sería como una especie de unidad de medida).

Ejemplos: $d(x^2)=2x\,dx$, $d(t^3)=3t^2\,dt$, etc. y, en general, $\boxed{x=g(t) \Rightarrow dx=g'(t)\cdot dt}$

[4] En la PAEG, algunas veces se indica al alumno el cambio a realizar, pero no siempre…

[5] En este tipo de integrales con una sola raíz cuadrada puede funcionar el siguiente cambio: radicando=t^2

Ejercicio PAEG: jun 2012 2B

B) Veamos ahora el **caso general**:

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales se resuelve ⟶

1º) Hallando sus raíces complejas $a \pm bi$

2º) Haciendo el cambio $x-a=bt$ se transforma[6] en $\int \frac{dt}{1+t^2}$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{x^2+x+1}=$

Ejercicios final tema: 7

C) Si el numerador es un binomio de $1^{\underline{er}}$ grado, se resuelve análogamente, pero la integral resultante será de **tipo neperiano-arcotangente**:

$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ donde ax^2+bx+c no tiene raíces reales se resuelve ⟶

1º) Separando en dos integrales: una tipo ln (inmediata) y otra tipo arctg, para lo cual habrá que ajustar constantes en el numerador.

2º) La 2ª integral, la tipo arctg, se resuelve como en el caso anterior, haciendo el cambio $x-a=b\cdot t$

¡IMPORTANTE!: No conviene invertir los dos pasos anteriores, pues entonces se obtiene una primitiva cuya expresión no es del todo correcta[7].

Ejemplo: Ejercicio 8a

---

[6] Existe otro procedimiento, llamado “completar el cuadrado”, pero el que aquí indicamos suele resultar más sencillo.

[7] En realidad sí podría procederse de esa forma, pero al final habría que simplificar la primitiva resultante…

D) Si el **numerador** es **de grado igual o mayor que el denominador**, se efectúa previamente la división polinómica, se reconstruye a continuación el integrando (mediante la regla D=d·C+R), y se integra finalmente aplicando los procedimientos anteriores.

Ejercicios final tema: 8

Ejercicios PAEG: sept 2000 4A, jun 99 2B, sept 2006 2A (caso particular, con división previa), jun 2009 2A (caso particular, con separación previa)

V) INTEGRACIÓN POR PARTES

(Ver pág. 343 del libro de ed. Anaya)

Esta utilísima técnica se utiliza para hallar, en ciertos casos, la integral de un producto de funciones. Se basa en la diferencial[8] de un producto:

$$d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv \Rightarrow u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du \xrightarrow[\text{ambos miembros}]{\text{integramos}} \boxed{\int u\,dv = u\cdot v-\int v\cdot du}$$

Existen infinidad de reglas mnemotécnicas para esta fórmula, como por ejemplo: "**U**n **d**ía **v**i **u**n **v**iejo **s**oldadito **v**estido **d**e **u**niforme".

Ejemplo: $\int x\, e^{x} dx =$

Consejos para elegir **u** y **dv**: 1) Hay que elegir un **u** cuya derivada no se complique más.

2) El **dv** restante (¡se tiene que llevar siempre el dx!) ha de resultar fácil de integrar.

Existe una sencilla regla mnemotécnica **para elegir u:**

A → arcsen, arccos, arctg, etc.
L → logaritmo
P → polinomio (o cociente de polinomios)
E → exponencial
S → sen, cos, tg, etc.

---

[8] Recordar que la diferencial de una función es igual a la derivada de dicha función, multiplicada por su incremento dx correspondiente. Por lo tanto, conserva las mismas propiedades que la derivada; en particular, para la diferencial del producto, se cumple que d(u·v)=v·du+u·dv

Observaciones: **1.** En el caso $\int \text{exponencial} \cdot \text{trigonométrica} \cdot dx$ podemos tantear ambas posibilidades.

2. Es muy frecuente que, al resolver una integral por partes, haya que aplicar la fórmula dos o más veces (como en el apdo. 5 del siguiente ejercicio).

3. En algunos casos, para que dv resulte una integral inmediata, hay que "partir" el polinomio, como en el apdo. 7 del siguiente ejercicio.

4. En otros casos, al aplicar la fórmula, vuelve a aparecer la integral del principio, pero cambiada de signo: en tal caso llamaremos a ésta I, y la despejaremos (Es lo que se conoce como "iteración", como en el apdo. 6 del siguiente ejercicio).

Ejercicios:

1) $\int x \cos x \, dx =$

$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

2) $\int \ln x \, dx =$

$= x \ln x - x + C$

3) $\int \operatorname{arctg} x \, dx =$

$= x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1} + C$

4) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx =$

$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

5) $\int x^2 \cos x \, dx =$

(Hay que proceder 2 veces)

$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

6) $\int e^x \cos x \, dx =$

(Por iteración)

$$= \frac{e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$$

7) $\int x^3 e^{-x^2} \, dx =$

$$= -\frac{x^2+1}{2e^{x^2}} + C$$

Ejercicios final tema: 9

Ejercicios PAEG: sept 2010 2B, sept 2009 2A, jun 98 4A, sept 99 3B, sept 97 3A

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 343: 1 y 2; pág. 344: 3 y 4; pág. 357: 13 y 14

VI) INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Se trata de hallar $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde: Q(x) es factorizable (es decir, tiene raíces reales)
grad P(x)<grad Q(x) (en caso contrario los dividimos)

NOTA: Interesa previamente comprobar si el numerador es la derivada del denominador, pues en ese caso sería inmediata: $\int \frac{u'}{u}$ (aunque, como puede imaginarse, algo tan sencillo no es lo habitual...)

El tipo de integral que nos ocupa se resuelve por el **MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES**. Dependiendo de cómo sean las raíces de Q(x) tendremos 3 casos:

1º) SÓLO RAÍCES REALES SIMPLES: *(Ver pág. 346 libro de ed. Anaya)*

Ejemplo: $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2} dx$

I) Descomponemos el denominador, teniendo en cuenta que sus raíces son x=1 y x=2:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

II) Descomposición del integrando en fracciones simples[9]:

$$\boxed{\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}} \qquad \textbf{(*)}$$

III) Determinación de las constantes A y B: para ello, multiplicamos ambos miembros de la expresión anterior por el m.c.m. de los denominadores, esto es $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$:

$$2x+1=A(x-2)+B(x-1)$$

A continuación, lo que funciona es dar a x los valores de las raíces (recuérdese que la expresión anterior se cumple para todo x):

$$x=1 \Rightarrow 3=-A;\ \boxed{A=-3}$$

$$x=2 \Rightarrow \boxed{5=B}$$

IV) Sustituimos en (*****) los valores obtenidos de A y B e integramos cada sumando por separado:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx=\int\frac{-3}{x-1}\,dx+\int\frac{5}{x-2}\,dx=\boxed{-3\ln(x-1)+5\ln(x-2)+C}\text{, o bien }=\boxed{\ln\frac{(x-2)^5}{(x-1)^3}+C}$$

Ejercicios: **1)** Resolver $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ haciendo previamente[10] el cambio $e^x=t$ $\left(\text{Soluc}:\ \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-1}}+C\right)$

2) Resolver $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ mediante el cambio $x=t^6$ $\left(\text{Soluc}:\ \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{6\sqrt{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x}+C\right)$

Ejercicios PAEG: jun 2013 2B (+ ∫ trigonométrica inmediata), jun 2000 2A, Sept 98 4A, jun 2008 2A

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 357: 15; pág. 358: 25 d

2º) APARECEN RAÍCES REALES MÚLTIPLES: *(Ver pág. 347 libro ed. Anaya)*

Ejemplo: $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

I) Factorizamos el denominador por Ruffini, obteniendo las raíces x=-1 y x=1 doble:

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

II) Descomposición del integrando en fracciones simples[11]:

---

[9] Este resultado debería ser demostrado, pero ello supera las pretensiones de este estudio. Esta descomposición sólo funciona si grad P(x)<grad Q(x).

[10] Para las dos integrales de este ejercicio recordar los consejos del apdo. III a la hora de escoger un cambio de variable.

[11] También debería ser demostrado.

$$\boxed{\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}}\qquad\textbf{(**)}$$

III) Quitamos denominadores en la expresión anterior multiplicando por el m.c.m. de estos, es decir, $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$:

$$3x+5=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$$

A continuación, damos a x los valores de las raíces y, además, otro valor sencillo como por ejemplo x=0 (recuérdese que la anterior expresión se cumple para todo x):

$$x=-1 \Rightarrow 2=4A;\ \boxed{A=1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow 8=2B+2C \\ x=0 \Rightarrow 5=A-B+C \end{array}\right\}$$

obteniéndose finalmente $\boxed{B=-1/2}$ y $\boxed{C=4}$

IV) Finalmente, sustituimos en (******) los valores obtenidos de las constantes e integramos cada sumando por separado:

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\frac{1/2}{x+1}dx+\int\frac{-1/2}{x-1}dx+\int\frac{4}{(x-1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+4\int(x-1)^{-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+4\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=\boxed{\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{x-1}-\frac{4}{x-1}+C}\text{ ,o bien, }=\boxed{\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{4}{x-1}+C}$$

Ejercicios: **1)** $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}dx$ $\left(\text{Soluc: }\ln\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)}+C\right)$

2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4-x^3}dx$ $\left(\text{Soluc: }\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C\right)$

Ejercicios PAEG: sept 2011 2A, sept 2001 4A, sept 2002 2A, jun 97 3A, sept 2007 2A, jun 2006 2A

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 348: 3 y 4; pág. 357: 16 (se recomienda, además, realizar los ejercicios resueltos de las págs. 349 a 354)

3º) APARECEN RAÍCES COMPLEJAS[12]:

Ejemplo: $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+1}dx$

I) Factorizamos el denominador por Ruffini:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

(Nótese que tiene una única raíz real, x=–1, y dos raíces complejas)

---

[12] Este tipo de integrales no entran en la PAEG de Castilla-La Mancha, al menos en el presente curso 2013-2014, salvo el caso sencillo tipo arcotangente visto en el apdo. IV A

II) Descomposición del integrando en fracciones simples:

$$\boxed{\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}} \qquad \textbf{(***)}$$

III) Quitamos denominadores en la expresión anterior multiplicando por el m.c.m. de estos, es decir, $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$:

$$1=A(x^2-x+1)+(Mx+N)(x+1)$$

A continuación, damos a x el valor de la única raíz real, $x=-1$, y además, otros dos valores arbitrarios sencillos:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow 1=3A;\ \boxed{A=1/3} \\ x=0 \Rightarrow 1=A+N \\ x=1 \Rightarrow 1=A+(M+N)\cdot 2 \end{array}\right\}$$

obteniéndose finalmente $\boxed{M=-1/3}$ y $\boxed{N=2/3}$

IV) Finalmente, sustituimos en (*******) los valores recién obtenidos de las constantes e integramos cada sumando por separado:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx=\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx\ =$$

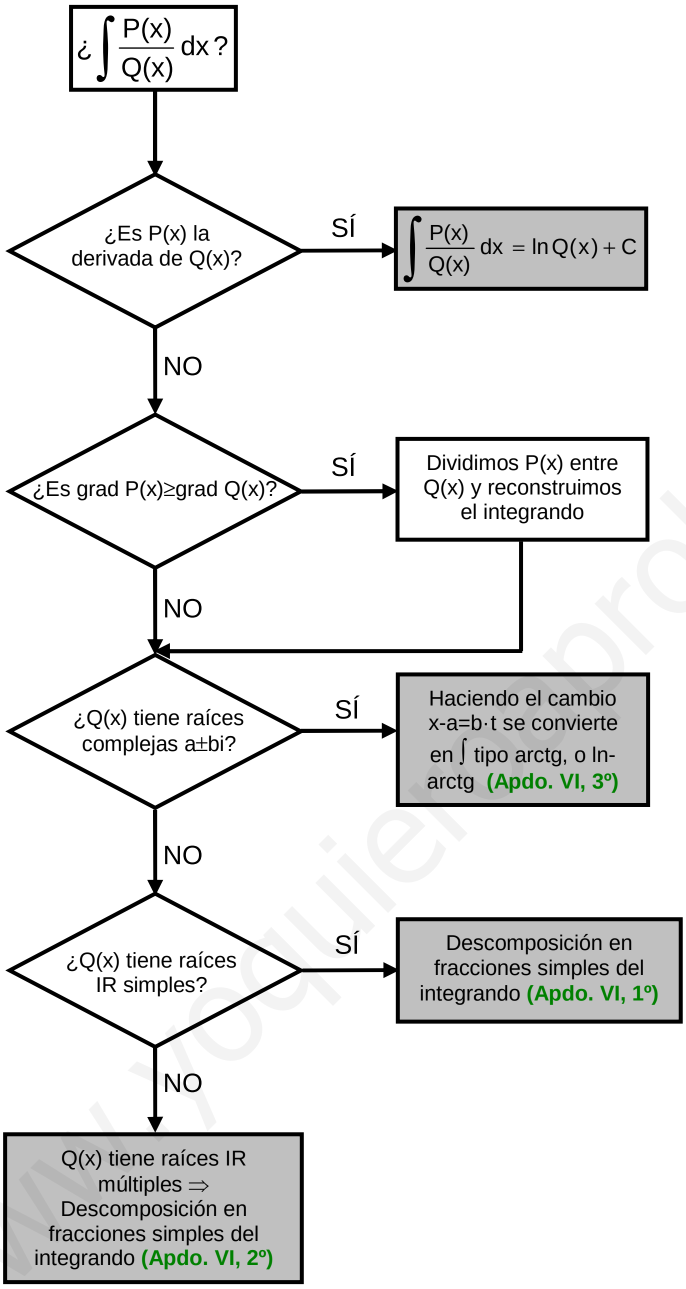
inmediata tipo ln-arctg

Ejercicios: **1)** $\displaystyle\int \frac{5x-12}{x^3-6x^2+13x-10}\,dx$ $\left(\text{Soluc}:\ \ln\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}+5\ \text{arctg}(x-2)+C\right)$

2) $\displaystyle\int \frac{x-6}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$ $\left(\text{Soluc}:\ \ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1}+\text{arctg}\frac{x}{2}+C\right)$

Ejercicios final tema: 10
Ejercicios PAEG: jun 2001 2A

RESUMEN: PROCESO LÓGICO A LA HORA DE INTEGRAR COCIENTES DE POLINOMIOS



VII) INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

- En algunos casos se resuelven transformando el integrando mediante identidades trigonométricas; he aquí algunas de las más habituales:

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1 \Longrightarrow \cos^2x=1-\text{sen}^2x \qquad \boxed{\cos x=\sqrt{1-\text{sen}^2x}}$$

$$\Big\Downarrow$$

$$\text{sen}^2x=1-\cos^2x \qquad \boxed{\text{sen}\,x=\sqrt{1-\cos^2x}}$$

$$\begin{array}{l} 1=\cos^2x+\text{sen}^2x \\ \cos 2x=\cos^2x-\text{sen}^2x \\ \hline \end{array} \xRightarrow{\text{Restando}} 1-\cos 2x=2\text{sen}^2x \qquad \boxed{\text{sen}^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$\Big\Downarrow \text{Sumando}$$

$$1+\cos 2x=2\cos^2x \qquad \boxed{\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Ejemplos:

[13]**1)** $\int \text{sen}^2x\,dx=$

$$=\frac{x}{2}-\frac{\text{sen}\,2x}{4}+C$$

2) $\int \cos^3x\,dx=\int \cos x\,(1-\text{sen}^2x)\,dx=$

$$=\text{sen}\,x-\frac{\text{sen}^3x}{3}+C$$

[14]**3)** $\int \text{sen}^4x\,dx=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$

$$=\frac{3x}{8}-\frac{\text{sen}\,2x}{4}+\frac{\text{sen}\,4x}{32}+C$$

4) $\int \frac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}\,dx=\int \frac{(1-\text{sen}\,x)^2}{(1+\text{sen}\,x)(1-\text{sen}\,x)}\,dx=$

$$=x+2\,\text{tg}\,x-2\sec x+C$$

5) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx=$

(Haciendo el cambio de variable x=sen t)

$$=\frac{\text{arcsen}\,x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

---

[13] Puede ensayarse, o bien utilizar la identidad trigonométrica correspondiente (lo más rápido y recomendable), o bien por partes, eligiendo u=sen x, y reemplazando a continuación $\cos^2x=1-\text{sen}^2x$, con lo cual saldrá por iteración (proceso muy tedioso…).

[14] También puede intentarse por partes, eligiendo $u=\text{sen}^3x$, y reemplazando posteriormente $\cos^2x=1-\text{sen}^2x$; finalmente, habrá que aplicar iteración.

- También pueden resolverse, en ciertos casos, mediante el apropiado cambio de variable; básicamente, hay tres casos principales, que se presentan a continuación, junto con todos los elementos restantes para hacer el cambio:

1º Si el integrando es impar en sen x:

$$\boxed{\cos x = t} \;\Downarrow\; \text{Diferenciamos ambos miembros} \quad -\operatorname{sen} x\, dx = dt \qquad \boxed{dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} \;\Downarrow\; \boxed{\operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2}}$$

2º Si el integrando es impar en cos x:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = t} \;\Downarrow\; \text{Diferenciamos ambos miembros} \quad \cos x\, dx = dt \qquad \boxed{dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \;\Downarrow\; \boxed{\cos x = \sqrt{1-t^2}}$$

3º Si el integrando es par en sen x y cos x:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = t} \;\Downarrow\; \text{Diferenciamos ambos miembros} \quad (1+\operatorname{tg}^2 x)\, dx = dt \qquad \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \;\Downarrow\; \boxed{\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x \;\Downarrow\; \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$$

Los dos primeros cambios suelen funcionar muy bien, no así el tercero, que suele conducir a integrales racionales muy arduas, con raíces complejas múltiples. Finalmente, conviene saber que existe un **cambio general**, **tgx/2=t**, aunque también puede dar lugar a un desarrollo laborioso.

Ejemplos:

6) $\int \cos^3 x\, dx =$

(Haciendo el cambio de variable sen x=t)

$$= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

7) $\int \operatorname{sen}^5 2x\, dx =$

(Haciendo el cambio de variable cos 2x=t)

$$= -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^3 2x}{3} - \frac{\cos^5 2x}{10} + C$$

Ejercicios final tema: 11 a 15

Ejercicios PAEG: sept 2008 2A (teórico-práctico)

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 357 y ss.: 17 a 24, 32, 33, 44, 45, 56 y 57 (integrandos de todo tipo)
págs. 358 y ss.: 27 a 30, 34 a 42, 47 a 49, 51 y 60 (teórico-prácticos)

EJERCICIOS de INTEGRAL INDEFINIDA 2º BACH.

1. Calcular las siguientes integrales **potenciales** (se recomienda hacer la comprobación):

a) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^5}{6}\,dx$ **c)** $\int x^{2/3}dx$ **d)** $\int \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$ **e)** $\int t^2t^3dt$ **f)** $\int x\,x^{2/3}\,dx$

g) $\int \frac{t^3}{t^2}\,dt$ **h)** $\int \frac{x^{2/3}}{x^{1/3}}\,dx$ **i)** $\int \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,dx$ **j)** $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ **k)** $\int \left(t^2\right)^3dt$ **l)** $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$

m) $\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx$ **n)** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$ **o)** $\int \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[4]{x}\,dx$ **p)** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$

(Soluc: **a)** –1/x **b)** $x^6/36$ **c)** $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$ **d)** $3\sqrt[3]{x}$ **e)** $t^6/6$ **f)** $\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8}$ **g)** $t^2/2$ **h)** $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}$ **i)** $\frac{6\sqrt[6]{x^{11}}}{11}$

j) $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}$ **k)** $t^7/7$ **l)** $2\sqrt{x}$ **m)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$ **n)** $3\sqrt[3]{x}$ **o)** $\frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}$ **p)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+4\sqrt{x}$)

2. Calcular las siguientes integrales de **funciones compuestas**:

a) $\int (x+1)^2dx$ **b)** $\int (7x+5)^2dx$ **c)** $\int 2x\,(x^2+1)\,dx$ **d)** $\int 3x^2(x^3+1)\,dx$ **e)** $\int t\,(t^2+3)\,dt$

f) $\int x^2(x^3+2)\,dx$ **g)** $\int (2x+1)^{-3}dx$ **h)** $\int x^2(x^3+1)^{-7}dx$ **i)** $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$ **j)** $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

k) $\int \frac{1}{t^2+2t+1}\,dt$ **l)** $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+3x+1}$ **m)** $\int x\,\sqrt{1+x^2}\,dx$ **n)** $\int x\,\sqrt{1-x^2}\,dx$ **o)** $\int (x+1)(x^2+2x+5)^6dx$

p) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^4}\,dx$ **q)** $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ **r)** $\int (16x+1)\,(8x^2+x-5)\,dx$ **s)** $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx$ **t)** $\int \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$

u) $\int \cos x\,\text{sen}\,x\,dx$ **v)** $\int \cos x\,\text{sen}^2x\,dx$ **w)** $\int \text{sen}x\,\cos^2x\,dx$ **x)** $\int \frac{\text{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$ **y)** $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2x}\,dx$

z) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ **α)** $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ **β)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ **γ)** $\int \frac{\text{arcsen}^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **δ)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\;\text{arcsen}^2x}$

ε) (*) $\int \frac{\text{arctg}\;x/2}{4+x^2}\,dx$

(Soluc: **a)** $(x+1)^3/3$ **b)** $(7x+5)^3/21$ **c)** $(x^2+1)^2/2$ **d)** $(x^3+1)^2/2$ **e)** $(t^2+3)^2/4$ **f)** $(x^3+2)^2/6$

g) $\frac{-1}{4(2x+1)^2}$ **h)** $\frac{-1}{18\,(x^3+1)^6}$ **i)** $\frac{-1}{2(2x+1)}$ **j)** $\frac{-1}{x^2+x+1}$ **k)** $\frac{-1}{t+1}$ **l)** $\frac{-1}{2(x+1)^2}$

m) $\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3}$ **n)** $-\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}$ **o)** $(x^2+2x+5)^7/14$ **p)** $\frac{-1}{9(x^3+1)^3}$ **q)** $\frac{2\sqrt{3x+1}}{3}$ **r)** $(8x^2+x-5)^2/2$

s) $2\sqrt{x+1}$ **t)** $\sqrt{x^2+1}$ **u)** $\text{sen}^2x/2$ o $-\cos^2x/2$ **v)** $\text{sen}^3x/3$ **w)** $-\cos^3x/3$ **x)** $\frac{\text{arc tg}^2x}{2}$

y) –cosec x **z)** $\ln^3x/3$ **α)** –1/lnx **β)** $\ln^2x/2$ **γ)** $\frac{\text{arc sen}^3x}{3}$ **δ)** $\frac{-1}{\text{arc sen}\,x}$

ε) $\frac{\text{arctg}^2\,x/2}{4}$) NOTA: En todas las soluciones se omite, por razones de espacio, la cte. de integración C.

3. Calcular las siguientes integrales de **tipo logarítmico**:

a) $\int 4x^{-1}dx$ **b)** $\int \frac{1}{x-1}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{3x+5}\,dx$ **d)** $\int \frac{1}{ax+b}\,dx$ **e)** $\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$

f) $\int \frac{2x^2}{6x^3+1}\,dx$ **g)** $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ **h)** $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}\,dx$ **i)** $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **j)** $\int \frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx$

k) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ **l)** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$ **m)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc sen}x}\,dx$ **n)** $\int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}x}\,dx$ **o) (*)** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx$

(Soluc: **a)** $\ln x^4$ **b)** $\ln (x-1)$ **c)** $\ln\sqrt[3]{3x+5}$ **d)** $\frac{\ln (ax+b)}{a}$ **e)** $\ln\sqrt[3]{x^3+2}$ **f)** $\ln\sqrt[9]{6x^3+1}$
g) $\ln (x^2+x+1)$ **h)** $\ln\sqrt[6]{3x^2-6x+5}$ **i)** $\ln (1+e^x)$ **j)** $\ln \frac{1}{\operatorname{sen}x+\cos x}$ **k)** $\ln (\ln x)$ **l)** $\ln (\operatorname{arctg} x)$
m) $\ln (\operatorname{arcsen} x)$ **n)** $\ln (1+\operatorname{tg} x)$ **o)** $\ln \operatorname{sen}^2\sqrt{x}$)

4. Calcular las siguientes integrales de **tipo exponencial**:

a) $\int e^{-x}\,dx$ **b)** $\int e^{2x}\,dx$ **c)** $\int e^{-2x}\,dx$ **d)** $\int e^{2x+1}\,dx$ **e)** $\int e^{-2x+1}\,dx$

f) $\int x\,e^{x^2-22}\,dx$ **g)** $\int x\,e^{-x^2}dx$ **h)** $\int x^2\,e^{x^3+1}\,dx$ **i)** $\int (2x+1)\,e^{x^2+x-1}\,dx$ **j)** $\int \cos x\,e^{\operatorname{sen}x}dx$

k) $\int \frac{1}{x}e^{\ln x}\,dx$ **l)** $\int \sec^2 x\;e^{\operatorname{tg}x}\,dx$ **m)** $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$ **n)** $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **o)** $\int 12^x dx$

p) $\int (6^x)^2\,dx$ **q)** $\int \frac{7^x}{5^x}\,dx$ **r)** $\int 5^x\,9^x\,dx$

(Soluc: **a)** $-1/e^x$ **b)** $e^{2x}/2$ **c)** $\frac{-1}{2\,e^{2x}}$ **d)** $e^{2x+1}/2$ **e)** $-e^{-2x+1}/2$ **f)** $\frac{e^{x^2-22}}{2}$ **g)** $-\frac{1}{2\,e^{x^2}}$
h) $\frac{e^{x^3}+1}{3}$ **i)** e^{x^2+x-1} **j)** $e^{\operatorname{sen}x}$ **k)** x **l)** $e^{\operatorname{tg}x}$ **m)** $e^{\operatorname{arctg}x}$ **n)** $e^{\operatorname{arcsen}x}$
o) $12^x/\ln 12$ **p)** $36^x/\ln 36$ **q)** $\frac{(7/5)^x}{\ln 7/5}$ **r)** $\frac{45^x}{\ln 45}$)

5. Calcular las siguientes integrales **trigonométricas sencillas**:

a) $\int \cos(-2x)\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{3}\operatorname{sen}x\,dx$ **c)** $\int \cos\frac{x}{3}\,dx$ **d)** $\int \operatorname{sen}(x+1)\,dx$ **e)** $\int \cos(2x+5)\,dx$

f) $\int \operatorname{sen}(-x+1)\,dx$ **g)** $\int 3\cos(2x+6)\,dx$ **h)** $\int x\operatorname{sen}x^2\,dx$ **i)** $\int 2x\cos(x^2+255)\,dx$ **j)** $\int x\operatorname{sen}(3x^2+7)\,dx$

k) $\int x\cos(-3x^2-5)\,dx$ **l)** $\int 7x^2\operatorname{sen}(4x^3+5)\,dx$ **m)** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$ **n)** $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ **o)** $\int \frac{\cos\ln x}{x}\,dx$

p) $\int \frac{\cos(\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}\,dx$

(Soluc: **a)** $\frac{\operatorname{sen}2x}{2}$ **b)** $-\frac{\cos x}{3}$ **c)** $3\operatorname{sen}\frac{x}{3}$ **d)** $-\cos(x+1)$ **e)** $\frac{\operatorname{sen}(2x+5)}{2}$ **f)** $\cos(-x+1)$

g) $\frac{3}{2}\text{sen}(2x+6)$ **h)** $-\frac{\cos x^2}{2}$ **i)** $\text{sen}(x^2+255)$ **j)** $-\frac{\cos\ (3x^2+7)}{6}$ **k)** $-\frac{\text{sen}\ (-3x^2-5)}{6}$ **l)** $-\frac{7\cos\ (4x^3+25)}{12}$

m) $\text{sen}\ \sqrt{x}$ **n)** $-2\cos\sqrt{x}$ **o)** $\text{sen}(\ln x)$ **p)** $\text{sen}(\text{arctg}\ x)$)

6. Calcular las siguientes integrales por el método de sustitución o **cambio de variable**:

a) $\int (x+2)^{10}\, x\, dx$ *mediante x+2=t* **b)** $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ *haciendo t^2=x-1* **c)** $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ *con t=e^x*

d) $\int \frac{x}{(x+1)^3}\, dx$ *haciendo x+1=t* **e)** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx$ **f)** $\int \frac{(x+1)^{10}}{x}\, dx$

(Soluc: **a)** $\frac{(x+2)^{12}}{12}-2\frac{(x+2)^{11}}{11}$ **b)** $2\left(\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5}+\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right)$ **c)** $\text{arc tg}\ e^x$ **d)** $-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}$ **e)** $2\left(\sqrt{x}-\text{arctg}\sqrt{x}\right)$

f) $\frac{(x+1)^{10}}{10}+\frac{(x+1)^9}{9}+\ldots+\frac{(x+1)^2}{2}+x+1+\text{Ln}\, x$)

Recordar algunos consejos:

1. En las integrales NO inmediatas en las que haya $\sqrt{\ }$, suele funcionar el cambio RADICANDO=t^2
2. “ “ “ “ “ “ “ “ aparezcan $\sqrt{\ }$ de distinto índice, puede funcionar el cambio RADICANDO=$t^{\text{mcm de los índices}}$
3. En las integrales NO inmediatas en las que aparezca a^x, puede ensayarse a^x=t
4. Para integrales trigonométricas NO inmediatas ver los cambios vistos en el tema.

7. Calcular las siguientes integrales de **tipo arco tangente**:

a) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$ **b)** $\int \frac{1}{9x^2+6x+2}\, dx$ **c)** $\int \frac{x^3}{1+x^8}\, dx$ **d)** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ **e)** $\int \frac{\sec^2 x}{1+tg^2x}\, dx$

f) $\int \frac{a^x}{1+a^x}\, dx$ **g)** $\int \frac{2^x}{1+4^x}\, dx$ **h)** $\int \frac{3^x}{1+9^x}\, dx$ **i)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}\ (1+x)}\, dx$ **j)** $\int \frac{1}{x\ (1+\ln^2 x)}\, dx$

k) $\int \frac{3x+27}{1+(3x+27)^4}\, dx$ **l)** $\int \frac{1}{3+x^2}\, dx$ **m)** $\int \frac{1}{4x^2+4x+2}\, dx$ **n)** $\int \frac{1}{x^2+4}\, dx$

(Soluc: **a)** arctg(x+1) **b)** $\frac{\text{arctg}\ (3x+1)}{3}$ **c)** $\frac{\text{arctg}\ x^4}{4}$ **d)** arctg e^x **e)** x **f)** $\frac{\ln(1+a^x)}{\ln a}$

g) $\frac{\text{arctg}2^x}{\ln 2}$ **h)** $\frac{\text{arctg}3^x}{\ln 3}$ **i)** $2\text{arctg}\sqrt{x}$ **j)** arctg(lnx) **k)** $\frac{\text{arctg}(3x+27)^2}{6}$ **l)** $\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$

m) $\frac{1}{2}\text{arctg}(2x+1)$ **n)** $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}$)

8. Calcular las siguientes integrales de **tipo neperiano-arco tangente**:

a) $\int \frac{x}{x^2+2x+17}\, dx$ **b)** $\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\, dx$ **c)** $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$ **d)** $\int \frac{x+1}{x^2+6x+13}\, dx$ **e)** $\int \frac{x+1}{25+x^2}\, dx$

f) $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\, dx$ **g)** $\int \frac{2x+7}{x^2+x+1}\, dx$ **h)** $\int \frac{x}{x^2+2x+3}\, dx$ **i)** $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13}\, dx$ **j)** $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13}\, dx$

k) $\int \frac{2x+4}{x^2+4}\, dx$

(Soluc: **a)** $\ln\sqrt{x^2+2x+17}-\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{x+1}{4}$ **b)** $\ln\sqrt{x^2+2x+2}-2\text{arctg}(x+1)$ **c)** $\ln\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

d) $\ln\sqrt{x^2+6x+13}-\text{arctg}\frac{x+3}{2}$ **e)** $\ln\sqrt{x^2+25}+\frac{1}{5}\text{arctg}\frac{x}{5}$ **f)** $\ln\sqrt{x^2-2x+5}+2\ \text{arctg}\frac{x-1}{2}$

g) $\ln(x^2+x+1)+4\sqrt{3}\ \text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **h)** $\ln\sqrt{x^2+2x+3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$ **i)** $\ln\sqrt{x^2-6x+13}+2\ \text{arctg}\frac{x-3}{2}$

j) $\ln(x^2-4x+13)+3\ \text{arctg}\frac{x-2}{3}$ **k)** $\ln(x^2+4)+2\ \text{arctg}\frac{x}{2}$)

9. Calcular **por partes** las siguientes integrales:

a) $\int x\ \ln x\,dx$ **b)** $\int\sqrt{x}\ \ln x\,dx$ **c)** $\int x^2\ln x\,dx$ **d)** $\int \ln^2 x\,dx$ **e)** $\int x^2e^x\ dx$

f) $\int\ln(x+1)\ dx$ **g)** $\int\text{arc}\cos x\ dx$ **h)** $\int x^2\ \cos x\ dx$ **i)** $\int x^3e^{-x^2}\ dx$ **j)** $\int(x^2-2x-1)\ e^x\ dx$

k) $\int e^x\ \text{sen}\ x\,dx$ **l)** $\int(x^2+1)\ e^{-x}\ dx$ **m)** $\int x^3\ \cos x^2\ dx$ **n)** $\int x^2e^{2x+1}\ dx$ **o)** $\int(x^2+1)\ \text{sen}\,2x\,dx$

(Soluc: **a)** $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$ **b)** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ \ln x-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}$ **c)** $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$ **d)** $x\ln^2x-2x\ln x+2x$

e) $e^x(x^2-2x+2)$ **f)** $x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)$ **g)** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ **h)** $x^2\text{sen}x+2x\cos x-2\text{sen}x$

i) $-\frac{x^2+1}{2e^{x^2}}$ **j)** $e^x(x^2-4x+3)$ **k)** $\frac{e^x(\text{sen}x-\cos x)}{2}$ **l)** $-\frac{x^2+2x+3}{e^x}$

m) $\frac{1}{2}x^2\ \text{sen}\ x^2+\frac{1}{2}\cos x^2$ **n)** $\frac{x^2}{2}e^{2x+1}-\frac{x}{2}e^{2x+1}+\frac{1}{4}e^{2x+1}$)

10. Calcular las siguientes integrales **racionales**:

a) $\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$ **b)** $\int\frac{x^2-6x+7}{x^3-4x^2+x+6}\,dx$ **c)** $\int\frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4}\,dx$ **d)** $\int\frac{1}{x^2-5x}\,dx$

e) $\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ **f)** $\int\frac{2x^3-5x^2+4x-2}{x^2-3x+2}\,dx$ **g)** $\int\frac{2x^2+3}{x^3+x^2-2}\,dx$ **h)** $\int\frac{x^2-2x+10}{x^3-3x+2}\,dx$

i) $\int\frac{7x^2+3x+5}{x^3+x}\,dx$ **j)** $\int\frac{9x+23}{x^2+6x+9}\,dx$ **k)** $\int\frac{8x^2-2x-1}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$ **l)** $\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx$

m) $\int\frac{2x^2-4x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$ **n)** $\int\frac{2x^2-8x-1}{2x^2-7x+3}\,dx$ **o)** $\int\frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx$ **p)** $\int\frac{x+2}{x^2-x-6}\,dx$

q) $\int\frac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4}\,dx$ **r)** $\int\frac{dx}{e^x+1}$

(Soluc: **a)** $\ln\frac{(x-3)^7}{(x-2)^5}$ **b)** $\ln\frac{\sqrt[3]{x-2}\ \sqrt[6]{(x+1)^7}}{\sqrt{x-3}}$ **c)** $\ln(x^2-x-2)-\frac{1}{x-2}$ **d)** $\ln\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}$

e) $\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\frac{4}{x-1}$ **f)** $x^2+x+\ln[(x-1)(x-2)^2]$ **g)** $\ln\left[(x-1)\ \sqrt{x^2+2x+2}\right]-2\text{arctg}(x+1)$

h) $\ln\frac{(x+2)^2}{(x-1)}-\frac{3}{x-1}$ **i)** $\ln\left[x^5(x^2+1)\right]+3\text{arctg}\ x$ **j)** $\ln(x+3)^9+\frac{4}{x+3}$ **k)** $\ln\left[(x-1)\cdot\sqrt{(x^2+4)^7}\right]+\frac{5}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}$

l) $\frac{x^2}{2}+x+\ln(x^2-3x+2)$ **m)** $\ln(x^2-3x+2)-\frac{1}{x-1}$ **n)** $x-\ln\frac{\sqrt[5]{(x-3)^7}}{\sqrt[10]{(2x-1)^9}}$ **o)** $\ln(x^2+x-6)$

p) $\ln(x-3)$ **q)** $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-x-2)-\frac{1}{x-2}$ **r)** $x-\ln(e^x+1)$)

11. Calcular las siguientes integrales **trigonométricas no inmediatas**, haciendo cambios o transformando los integrandos:

a) $\int \cos^5 x\, dx$ (Hacer senx=t) **b)** $\int \text{sen}^5 x\, dx$ (Hacer cosx=t) **c)** $\int \frac{\text{sen}\, x + \text{tg}\, x}{\cos x}\, dx$ (Descomponer el integrando)

d) $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$ **e)** $\int \sec x\, dx$ **f)** $\int \cos x\, \text{ctg}^2 x\, dx$ $\left(\text{Sustituir } \text{ctg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x} - 1\right)$

g) $\int \cos^2 3x\, dx$

(Soluc: **a)** $\text{sen}\, x - \frac{2}{3}\text{sen}^3 x + \frac{\text{sen}^5 x}{5}$ **b)** $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5}$ **c)** $\sec x - \ln \cos x$ **d)** $\frac{x}{8} - \frac{\text{sen}4x}{32}$
e) $\ln\sqrt{\frac{\text{sen}\, x + 1}{1 - \text{sen}\, x}}$ **f)** $-\text{cosec}\, x - \text{sen}\, x$ **g)** $\frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\, 6x}{12}$)

12. Calcular **por el método más adecuado** (entre paréntesis figura una ayuda) las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ (inmediata) **b)** $\int \frac{x-1}{3x^2 - 6x + 5}\, dx$ (tipo ln) **c)** $\int (x-1)\, e^x\, dx$ (por partes)

d) $\int (x^2 - 2x - 3) \ln x\, dx$ (por partes) **e)** $\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$ (raíces $\Re$ simples) **f)** $\int \frac{x+5}{x^2 + x - 2}\, dx$ (raíces$\Re$ simpl

g) $\int \frac{6x+8}{x^2 + 2x + 5}\, dx$ (ln-arctg) **h)** $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 5x + 4}\, dx$ (raíces $\Re$ simples) **i)** $\int \sec^3 x\, dx$ (cambio senx=t)

j) $\int \frac{1 + \text{sen}^2 x}{\text{sen}x \cos x}\, dx$ (cambio senx=t) **k)** $\int \frac{\cos x}{1 - \cos x}\, dx$ (transformar el integrando) **l)** $\int \cos 3x\, \text{sen}^2 3x\, dx$ (inmediata)

m) $\int x^2\, \text{sen}3x\, dx$ (por partes) **n)** $\int x\, \text{arctg}x\, dx$ (por partes) **o)** $\int x^2\, e^{3x}\, dx$ (por partes)

p) $\int \frac{x-3}{x^2 + 49}\, dx$ (ln-arctg) **q)** $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$ (raíces$\Re$ simples) **r)** $\int x \ln(x+1)\, dx$ (por partes)

s) $\int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx$ (inmediata) **t)** $\int \text{sen}(\ln x)\, dx$ **u)** $\int x\left[\ln(x^2+1) - e^{-x}\right] dx$

v) $\int \frac{1+2x}{1+x^2}\, dx$ **w)** $\int \frac{1+x}{1-x}\, dx$ (hacer la división) **x)** $\int \frac{x^2 + x + 1}{x+1}\, dx$ (hacer la división)

y) $\int \frac{x^2 + 1}{x - 1}\, dx$ (hacer la división) **z)** $\int \frac{x}{x^2 + 9}\, dx$ **α)** $\int \frac{\sqrt{7 + 2\text{tg}x}}{\cos^2 x}\, dx$

β) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}\, dx$ (tipo arcsen) **γ)** $\int \frac{1}{x\left[\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2\right]}\, dx$ (hacer ln x=t)

(Sol: **a)** $\frac{-1}{x-1}$ **b)** $\ln\sqrt[6]{3x^2 - 6x + 5}$ **c)** $xe^x - 2e^x$ **d)** $\ln x\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x$
e) $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **f)** $\ln\frac{(x-1)^2}{x+2}$ **g)** $\ln(x^2 + 2x + 5)^3 + \text{arctg}\frac{x+1}{2}$ **h)** $\frac{x^2}{2} + 5x + \ln\sqrt[3]{\frac{(x-4)^{65}}{(x-1)^2}}$
i) $\ln\sqrt{\text{sen}x + 1} - \ln\sqrt[3]{\text{sen}x - 1} - \frac{1}{4(\text{sen}x - 1)} - \frac{1}{4(\text{sen}x + 1)}$ **j)** $\ln\frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x}$ **k)** -x-cosecx-ctgx **l)** $\frac{\text{sen}^3 3x}{9}$
m) $-\frac{x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2x\text{sen}3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27}$ **n)** $\frac{x^2 \text{arctg}\, x - x + \text{arctg}\, x}{2}$ **o)** $\frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{3} + \frac{2e^{3x}}{9}$ **p)** $\ln(x^2 + 49) - \frac{6}{7}\text{arctg}\frac{x}{7}$

q) $\frac{x^2}{2}+x+\ln x-\ln\sqrt[3]{(x-2)^2}-\ln\sqrt[3]{x+1}$ **r)** $x^2\ln\sqrt{x+1}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\ln\sqrt{x+1}$ **s)** $\frac{\ln^4 x}{4}$ **t)** $\frac{1}{2}x(\operatorname{sen}\ln x-\cos\ln x)$

u) $\frac{x^2\ln\sqrt{x^2+1}}{2}+\ln\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x+1}{e^x}$ **v)** $\operatorname{arctg}x+\ln(x^2+1)$ **w)** $-x-\ln(1-x)^2$ **x)** $\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)$

y) $\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)^2$ **z)** $\ln\sqrt{x^2+9}$ **α)** $\frac{\sqrt{(7+2\operatorname{tg}x)^3}}{3}$ **γ)** $\ln\sqrt[6]{\frac{(\ln x-2)^2(\ln x+1)}{(\ln x-1)^3}}\,)$

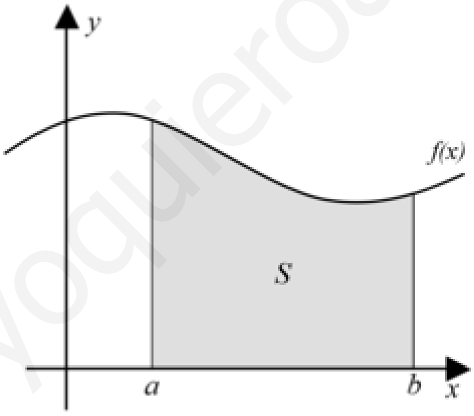
13. Calcular la primitiva de $f(x)=\ln^2 x$ que se anula en $x=e$

14. Determinar f(x) sabiendo que $f'''(x)=24x$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ y $f''(0)=2$ (Soluc: $f(x)=x^4+x^2+x$)

15. Hallar un polinomio cuya derivada sea x^2+x-6 y tal que el valor de su máximo sea tres veces mayor que el de su mínimo. *(Soluc: $p(x)=x^3/3+x^2/2-6x+71/4$)*

INTEGRAL DEFINIDA

APLICACIÓN al CÁLCULO de ÁREAS



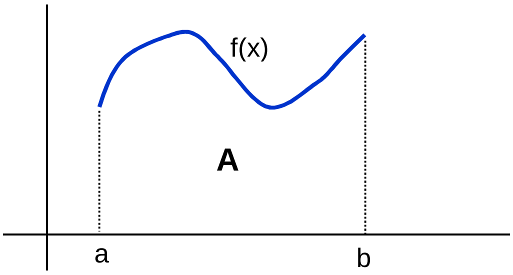
MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas
I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

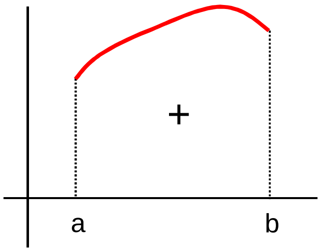
I) CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA *(ver págs. 371 y 372 del libro de ed. Anaya)*

DEF: $\int_a^b f(x)\,dx$ = área del recinto limitado por la curva f(x), el eje x, y las rectas verticales x=a y x=b

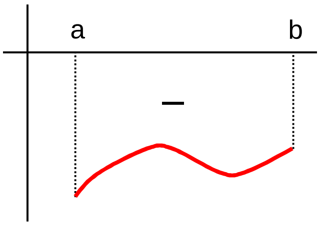
Gráficamente, coincide con el área A del dibujo[1]:



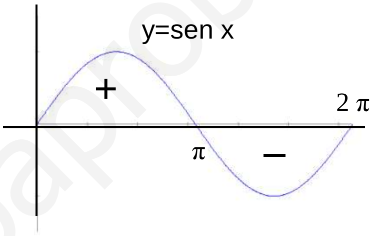
Signo de la integral definida: Hay 3 posibilidades:



Cuando la curva está por encima del eje x, el área es positiva (lógico pues f(x)>0 en ese caso.



Si está por debajo, entonces la integral definida es negativa (ya que entonces f(x)<0)



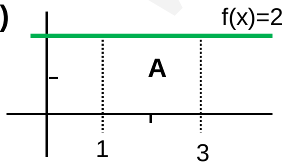
p.ej. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 0$

¿Cómo se calcula?: Mediante la **REGLA DE BARROW**[2]: se trata de hallar una primitiva F(x) mediante los procedimientos del tema anterior, y a continuación valorarla entre los extremos a y b:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Ejemplos justificativos: *(ver más ejemplos justificativos en págs. 366 y 367 del libro de ed. Anaya)*

a)



$A = \int_1^3 2\,dx =$

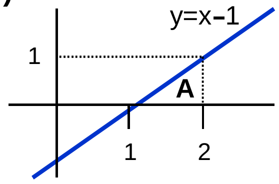
(Puede comprobarse el resultado gráficamente)

---

[1] La definición anterior puede entenderse intuitivamente si pensamos que f(x)·dx representaría el área de un rectángulo infinitesimal de altura f(x) y anchura tan pequeña como queramos dx, por lo que la integral definida vendría a ser la suma de esos infinitos pequeños rectángulos. Para una comprensión más rigurosa de este hecho véanse las págs. 364 y 365 del libro de ed. Anaya.

[2] Isaac Barrow (1630-1677), eminente matemático inglés y profesor de Isaac Newton en Cambridge. Ver la justificación de esta regla, que se conoce como *2º Teorema fundamental del cálculo integral*, en pág. 364 del libro de ed. Anaya.

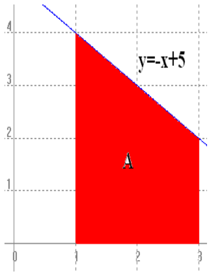
b)



$$A=\int_1^2 (x-1)\,dx=$$

Compruébese que el área A del triángulo es efectivamente la calculada:

c)



$$A=\int_1^3 (-x+5)\,dx=$$

Podemos comprobar que coincide con área A del trapecio, la cual viene dada por:

$$A=\frac{B+b}{2}h=$$

Nótese, por consiguiente, que la integral definida tiene una utilísima aplicación al cálculo de áreas.

Ejercicio: Comprobar por Barrow que $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}x\,dx=0$

Ejercicios PAEG: jun 2009 2B, sept 2008 2A, jun 2008 2B
Ejercicios final tema: 1 a 8
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 371: 2; pág. 372: 1 y 2; pág. 381: 1 a 3

II) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA *(Ver estas y más propiedades en pág. 368 libro ed. Anaya)*

1) Si $c\in[a,b]$: $\boxed{\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f}$ Esta propiedad nos será muy útil a la hora de hallar el área de un recinto compuesto como suma de dos o más subáreas. Su justificación es trivial, tanto gráficamente como aplicando la regla de Barrow.

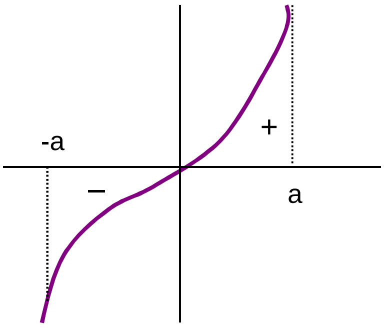
2) $\boxed{\int_a^a f=0}$ Obvio y fácil de probar.

3) $\boxed{\int_a^b f=-\int_b^a f}$ Puede demostrarse aplicando la regla de Barrow.

4) $\boxed{\int_a^b f\pm\int_a^b g=\int_a^b f\pm g}$ Es una consecuencia inmediata de una propiedad análoga de la integral indefinida. Una aplicación de esto es el **ejercicio 9** del final del tema.

5) $\boxed{\int_{-a}^{a} \text{función impar} = 0}$

La interpretación gráfica es obvia:



Las dos áreas son iguales pero de signo opuesto, por lo que su suma es cero.

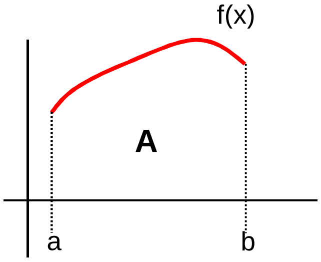
Por ejemplo, podemos concluir que $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x \, dx = 0$ sin necesidad de hacer la integral.

III) ÁREA BAJO f

(ver pág. 373 del libro de ed. Anaya)

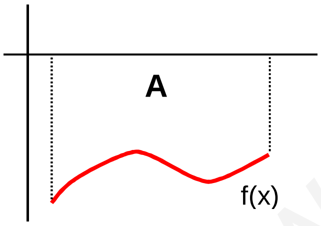
En cada uno de los tres casos vistos en el apartado I habrá que proceder de forma distinta:

1) f es positiva:



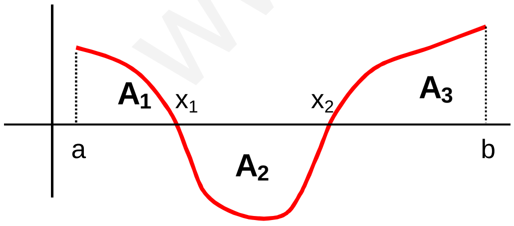
$A = \int_a^b f(x)\, dx$ (por la propia definición de la integral definida)

2) f es negativa:



$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$ o bien: $A = -\int_a^b f(x)\, dx$

3) f es positiva y negativa (se alterna):



por la propiedad 1

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^{x_1} f + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \int_{x_2}^{b} f$$

NOTA: En general **habrá que hallar los puntos en que f(x) corta al eje x** (x_1 y x_2 en el ejemplo anterior) **pues no sabemos de antemano si f(x) cambia de signo**[3]. También, a veces conviene representar f(x), pues puede formar con respecto al eje x dos o más subáreas (ver p. ej. ejercicio 15 del final del tema)

---

[3] Recordar que para obtener los puntos en que una función corta al eje x hay que resolver la ecuación f(x)=0

Ejemplo: Hallar el área limitada por la parábola $y=x^2-4x$ y el eje x (Un esbozo de la gráfica no es obligatorio, pero puede ser útil…)

Nótese que en este ejemplo la integral en sí resulta negativa, pues la parábola está por debajo del eje x, pero el valor absoluto la convierte en **positiva**, como debe ser **por tratarse de un área.**

NOTA: Si nos pidieran el **área respecto al eje y**, entonces intercambiaríamos la x con la y (véase el ejercicio 38), ¡pero no olvidemos que los límites de integración estarán ahora en el eje y! Todo esto puede comprobarse gráficamente mirando al trasluz la hoja en la que hemos dibujado el recinto.

Ejercicios PAEG: 1B sept 2004, 1A jun 2004, 2B sept 2008, 2B sept 2009

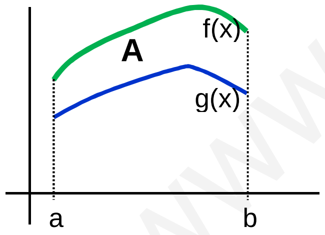
Ejercicios final tema: 10 a 16

Ejercicios libro ed. Anaya (los resaltados en negrita se recomiendan): pág. 374: 1; pág. 381: 4 a 8, 22, **30** y 42 (se recomienda ver también los ejercicios resueltos: 1 pág. 374 y 2, 3 y 4 pág. 376)

IV) ÁREA LIMITADA POR DOS CURVAS *(ver pág. 373 del libro de texto de ed. Anaya)*

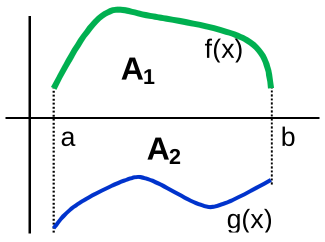
Existen tres posibilidades:

1) Ambas curvas son positivas[4] y no se cortan:



$$A=\int_a^b f-\int_a^b g=\int_a^b (f-g)$$

2) Ambas curvas son de distinto signo y no se cortan:

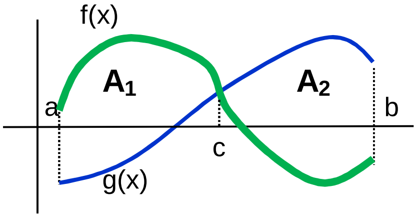


$$A_T=A_1+A_2=\int_a^b f-\int_a^b g=\int_a^b (f-g)$$

---

[4] Nótese que llegaríamos a la misma fórmula si ambas curvas fueran negativas, es decir, situadas bajo el eje X

3) Ambas curvas se cortan:



En este caso hay que hallar los puntos de corte y separar en varias integrales; por ejemplo, en el caso de la figura:

$$A_T = A_1 + A_2 = \int_a^c (f-g) + \int_c^b (g-f)$$

Como conclusión, en general tendremos que resolver previamente el sistema formado por ambas funciones para hallar el punto o los puntos donde se cortan. Además, conviene dibujar el recinto pues a veces hay que hallar el área pedida como suma de varias subáreas, por dos razones: o bien porque se obtienen dos o más recintos separados (p. ej. ejercicio 26 final tema), o bien porque se obtiene un recinto único delimitado superior e inferiormente por curvas distintas (problemas 35 y ss. final tema, o junio 97 2A).

Ejemplo: Problema 4B sept 97

NOTA: En algunos problemas, una vez dibujado el recinto, convendrá intercambiar la x con la y para hacer lo anterior con respecto al eje y (como en el problema 1B junio 98). Otra solución puede ser subdividir el recinto en sectores.

Ejercicios final tema: 18 y ss.

Ejercicios PAEG (por orden de complejidad):

- Jun 2012 2A, jun 2001 1A, jun 2003 3A, jun 99 1B, sept 99 4B, sept 2007 2B, jun 2007 2B, sept 2006 2B, jun 2006 2B, jun 2010 2A ← área entre rectas y/o parábolas
- sept 98 2A, jun 2002 3A ← hallar previamente la recta tangente
- sept 2000 1A, sept 2002 4A ← valor absoluto
- sept 2012 2B, jun 2011 2B, jun 2000 4A, Jun 97 2A, jun 98 1B, sept 98 2A ← varios recintos
- sept 2011 2B, jun 2013 2ª (+ recta tangente) ← con parámetro

Ejercicios libro: pág. 374: 2; pág. 381 y ss.: 9 a **15**, **18**, 21, **24**, 31, 33, 34 y **43** (cálculo de áreas)
pág. 382 y ss.: 23, 25, 26, 27, 35 a 41 y 68 (teórico-prácticos, con parámetros, etc.)
(se recomienda ver también los ejercicios resueltos: 2 pág. 374 y 5 a 8 pág. 377 y ss.)

42 EJERCICIOS de INTEGRAL DEFINIDA 2º BACH.

Integral definida:

1. Enunciar la regla de Barrow. Calcular: $\int_1^3 |x|dx$ *(Soluc: 4)*

2. Calcular: $\int_0^1 x\sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^3}-a^3}{3b^2}\right)$

3. Calcular: $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\,\text{sen}x^2\,dx$ *(Soluc: 1/2)*

4. Calcular: $\int_0^1 x\,\text{arctg}\,x\,dx$ *(Soluc:π/4–1/2)*

5. Calcular: $\int_0^1 (x^2+1)e^{-2x}\,dx$ $\left(Soluc: \frac{3}{4}-\frac{7}{4e^2}\right)$

6. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ $\left(Soluc: \ln\frac{4}{3}\right)$

7. Calcular: $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$ $\left(Soluc: \ln\sqrt[3]{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\right)$

8. Hallar el valor de $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}\,x\,dx$ sin necesidad de integrar, **razonadamente**. *(Soluc: 0)*

9. Sean: $a=\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}^2x\,dx$ $b=\int_0^{\pi/2} x\cos^2x\,dx$

Calcular **a+b** y **a–b** y obtener los valores de **a** y **b**. *(Soluc: a=(π²+4)/16; b=(π²-4)/16)*

Área bajo una curva:

10. Calcular el área limitada por la curva $y=\frac{1}{x^2+4}$, las rectas x=2, x=$2\sqrt{3}$ y el eje x. *(Soluc: π/24 u²)*

11. Hallar los valores de a, b y c en el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ de forma que P(1)=4, P'(1)=8 y P(2)+15P(0)=0
Representar la función y calcular el área finita comprendida entre la curva y el eje x.
(Soluc: $P(x)=3x^2+2x-1$; 32/27 u²)

12. Calcular el área limitada por la curva $y=\ln^2 x$, las rectas x=1, x=e^2 y el eje x. *(Soluc: 2e²-2 u²)*

13. Calcular el área limitada por la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ y las rectas y=0, x=0, x=$\sqrt{2}$/2. *(Soluc: (π+2)/8 u²)*

14. Calcular el área comprendida entre la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$, el eje x y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva. *(Soluc: $\pi/3$ u^2)*

15. Dada la función $y=\frac{x}{x^2+2}$, calcular el área encerrada por la curva, el eje x y las rectas perpendiculares al eje x que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada. *(Soluc: Ln2 u^2)*

16. Considerar la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } -2\le x<0 \\ 2x & \text{si } \;\;0\le x<2 \\ 10-3x & \text{si } \;\;2<x\le 4\end{cases}$. Representarla y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ **b)** $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$ **c)** $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

17. Considérese la función

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si } 0\le t\le 1 \\ 1 & \text{si } \;1\le t\le 2\end{cases}$$

y sea $F(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt \qquad 1\le x\le 2$

a) Hallar una expresión explícita para F(x) *(Soluc: F(x)=x-1)*

b) Dibujar F(x)

Área entre dos curvas:

18. Calcular el área encerrada entre las gráficas de las líneas y=x, y=x(6–x) *(Soluc: 125/6 u^2)*

19. Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas $y=x^2$, $y=-2x^2+3$ *(Soluc: 4 u^2)*

20. Dibujar la curva $y=x^2-3x-10$, y calcular el área del recinto limitado por esta curva y la recta y=2x–4 *(Soluc: 343/6 u^2)*

21. Hallar el área de la región limitada, para x>0, por $y=x^3$ y la recta y=8x *(Soluc: 16 u^2)*

22. Calcula el área comprendida entre las curvas $f(x)=x^4+5x^3-7x^2+2x-1$ y $g(x)=x^4+4x^3-8x^2+4x-1$, sin necesidad de representarlas. *(Soluc. 37/12 u^2)*

23. Sean $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x)=|1-x|$. **a)** Dibujar sus gráficas en los mismos ejes y hallar sus puntos de intersección. **b)** Determinar el área del recinto encerrado entre ambas gráficas. *(Soluc. 13/24 u^2)*

24. Calcular el área de la región del semiplano *$y\geq 0$* limitada por la curva y=Ln x, su tangente en x=1 y la recta x=3. *(Soluc: la tangente es y=x–1; el área es 4-3Ln3 u^2)*

25. Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ *(Soluc: 1/3 u^2)*

26. Calcular el área de la región encerrada entre $y=x^3$ e $y=\sqrt[3]{x}$ *(Soluc: 1 u^2)*

27. Hallar el área de la región acotada del plano limitada por las parábolas *$y=x^2-x$, $y^2=2x$.* *(Soluc: 2 u^2)*

28. Calcular el área de la región situada entre la recta x=1 y las curvas $y=x^2$ e y=8/x *(Soluc: 8Ln2-7/3 u^2)*

29. Hallar el área del recinto acotado por las curvas $y=x^3$, y=16/x y la recta x=1 *(Soluc: 16ln2-15/4 u^2)*

30. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y=e^{3x}$ y la cuerda de la curva que une el punto de abscisa x=0 con el de abscisa x=1 *(Soluc: (e^3+5)/6 u^2)*

31. Sea a>0. Hallar, en función de a, el área limitada por la parábola $y=x^2$ y la recta y=ax *(Soluc: $a^3/6$ u^2)*

32. Se considera la función $y=\frac{2x^2}{9-x^2}$

a) Dibujar su gráfica indicando su dominio de definición.

b) Calcular el área de la región acotada limitada por la curva anterior y la recta *y=1* *(Soluc:6[√3+ln(2-√3)] u^2)*

33. Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva $y=x^2$ y las rectas y=x, x=0, x=2 *(Soluc:1 u^2)*

34. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=x^{1/3}$,entre x=-1 y x=1 *(Soluc:3/2 u^2)*

Ejercicios con varios recintos (más elaborados):

35. Calcular el área del recinto limitado por las rectas y=x, y=2x y la parábola $y=x^2$ *(Soluc: 7/6 u^2)*

36. Calcular el área limitada por la gráfica de la función f(x)=Ln x, el eje x y la recta tangente a dicha gráfica en el punto x=e. *(Soluc: (e-2)/2 u^2)*

37. Se considera la función $y=x^{3/2}$

a) Dibujar la gráfica.

b) Calcular la recta tangente en x=1 a la gráfica dibujada y calcular el área limitada por dicha gráfica, la tangente y el eje x. *(Soluc: tangente: 3x-2y-1=0; área=1/15 u^2)*

38. Hallar el área limitada por la curva $x=16-y^2$ y el eje y *(Soluc: 256/3 u^2)*

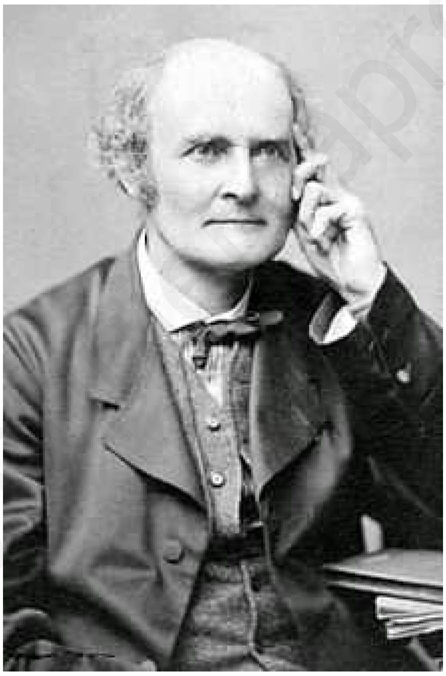
39. Hallar el valor de la constante **b** para que la función $f(x)=x^3-2x^2+bx$ tenga por tangente en el origen a la bisectriz del primer cuadrante. Calcular entonces el área de la región limitada por esa tangente y la gráfica de f. *(Soluc: b=1; 4/3 u^2)*

40. Hallar el valor del parámetro **a** para que el área limitada por las gráficas de las funciones $f_1(x)=\sqrt{ax}$ y $f_2(x)=x^2/a$ en el primer cuadrante sea igual a tres unidades. *(Soluc: a=3)*

41. Sabiendo que el área comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta y=bx es 1, calcular el valor de **b**. *(Soluc: $b=1/\sqrt[3]{3}$)*

42. Calcular el valor de **a** sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y=x^2+ax$ y la recta y+x=0 es 36 *(Soluc: a=5)*

MATRICES
y GRAFOS



*El inglés Arthur **Cailey** (1821-1895), introductor en 1855 de la notación matricial actual.*

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I. DEFINICIONES [1]

Definición: «Una **matriz m**x**n** es una ordenación de números dispuestos en **m** filas y **n** columnas»

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0 & -2\\ 4 & 7 & -3 & 9\end{pmatrix}_{3\times 4}$$

dimensión
(u orden)

nº filas

nº columnas

Definición: «El elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz A es el elemento que ocupa la fila **i** y la columna **j** de dicha matriz»:

Ejemplo: En la matriz del ejemplo anterior, $a_{32}=7$ ¿Cuánto vale a_{14}? ¿Y a_{22}?

En general,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & .. & a_{2n}\\ .. & & & & & ..\\ .. & & & & & ..\\ .. & & & & & ..\\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & .. & a_{mn}\end{pmatrix}_{mxn}$$

Reseña histórica: Aunque siempre se habían utilizado "cajas" para ordenar datos, el estudio sistemático de matrices lo llevaron a cabo matemáticos ingleses en la 2ª mitad del siglo XIX, en estrecha relación con la Geometría: fue James Joseph Sylvester (1814-1897) quien utilizó por primera vez el término "matriz" en 1848–1850. En 1853, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) hizo importantes aportaciones a la teoría de matrices. Por su parte, Arthur Cayley (1821-1895) introdujo en 1858 la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Utilidad de las matrices: – Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
– Problemas de Geometría.
– Problemas de tablas y grafos (Economía, etc.)

Definición: «Dos **matrices** son **iguales** si tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales»

Ejemplos: Las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ x & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & y\\ 2 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

serán iguales sii x=2 e y=–5. En cambio,

$$C=\begin{pmatrix}x & -2 & 2\\ 7 & 1 & 11\\ 0 & y & 3\end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 7 & 0 & 11\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 50 y ss. del libro de ed. Anaya.

o

$$C=\begin{pmatrix}2 & x & -2 & 7\\ 0 & 1 & y & -5\end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix}2 & 2 & z\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

nunca podrán ser iguales ¿Por qué?

II. TIPOS de MATRICES [2]

II.1 Desde el punto de vista de su forma o dimensión:

Matriz fila: «Es aquella que consta de una sola fila». También se suele llamar vector fila. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 5\end{pmatrix}_{1x4}$$

Matriz columna: «Es aquella que consta de una sola columna». También se suele llamar vector columna. Por ejemplo:

$$B=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}_{3x1}$$

Matriz cuadrada: «Es aquella que tiene mismo número de filas y columnas». Por ejemplo:

$$C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}_{2x2}$$

Matriz rectangular: «Es aquella que tiene distinto número de filas y columnas (es decir, que no es cuadrada)». Por ejemplo:

$$D=\begin{pmatrix}0 & 4 & 12\\ -5 & 4 & 0\\ 10 & 1/2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}_{4x3}$$

También, obviamente, toda matriz fila, o columna, es rectangular.

Diagonal de una matriz: «Está formada por los elementos que ocupan el mismo nº de fila y columna». Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0 & -2\\ 4 & 7 & -3 & 9\end{pmatrix}_{3x4}$$

diagonal

:

---

[2] Ver pág. 50 del libro de ed. Anaya.

II.2 Matriz traspuesta: «Dada una matriz A, se define su traspuesta, que se designa como $\mathbf{A}^t$ (también, a veces, $^t\mathbf{A}$) como aquella que se obtiene cambiando ordenadamente sus filas por sus columnas». Por lo tanto, obviamente si A es mxn, A^t será nxm.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

¿Cómo sería la traspuesta de una matriz fila?

Esta matriz traspuesta jugará un papel fundamental cuando definamos la matriz inversa en el próximo tema.

II.3 Desde el punto de vista de sus elementos:

Matriz nula: «Es aquella que está formada completamente por ceros». Se designa como **0**. Ejemplos de matrices nulas son:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4x3} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad \text{etc.}$$

Matriz opuesta: «Dada una matriz A se define su opuesta, que se designa como **–A**, como aquella que se obtiene cambiando de signo todos sus elementos». Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & 0 & 2 \\ -4 & -7 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: «Es aquella que tiene nulos todos los elementos que no están en la diagonal». Ejemplos de matrices diagonales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad: «Es una matriz diagonal cuadrada cuyos elementos de la diagonal son todos 1. Se designa como $\mathbb{1}$ o $\mathbb{I}$». Ejemplos de matrices identidad:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} \qquad \text{etc.}$$

Esta matriz será importante cuando definamos la matriz inversa en el próximo tema.

Matriz triangular superior: «Es aquella matriz cuyos elementos por encima de la diagonal son todos nulos». Ejemplos de matrices triangulares superiores serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: «Es aquella matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal son todos nulos». Ejemplos de matrices triangulares inferiores serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica: «Es aquella matriz que coincide con su traspuesta, es decir, $\mathbf{A=A^t}$». Puede comprobarse que las siguientes matrices son simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1/3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es obvio que, para que una matriz sea simétrica, es indispensable que sea cuadrada. Además, cada elemento tiene que ser simétrico respecto a la diagonal.

Matriz antisimétrica: «Es aquella matriz que coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir, $\mathbf{A=-A^t}$». Puede comprobarse que las siguientes matrices son antisimétricas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz antisimétrica, evidentemente, ha de ser cuadrada. Además, cada elemento tiene que ser simétricamente opuesto respecto a la diagonal, la cual a su vez tiene que estar formada completamente por ceros.

Ejercicios final tema: 1 y 2

III. OPERACIONES con MATRICES

III.1 SUMA de MATRICES [3]

«Para poder sumar dos matrices: **1º** Ambas tienen que tener la misma dimensión

2º En tal caso, se suman término a término»

---

[3] Ver págs. 52 y 56 del libro de ed. Anaya.

NOTA: Es obvio que, para restar dos matrices, sumaremos a la primera la opuesta de la segunda, o más sencillamente, restaremos término a término.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Propiedades: CONMUTATIVA: $A+B=B+A$

ASOCIATIVA: $(A+B)+C=A+(B+C)$

ELEMENTO NEUTRO: La matriz nula, 0, tal que $A+0=A$

ELEMENTO OPUESTO: La matriz opuesta, –A, tal que $A+(-A)=0$

Todas ellas son de inmediata demostración. Estas propiedades hacen que las matrices sean un **grupo abeliano** con la adición[4].

III.2 PRODUCTO de un NÚMERO por una MATRIZ [5]

Supongamos que nos planteamos cómo sería, por ejemplo, el triple de una matriz, es decir, la operación 3A. Es obvio que sería equivalente a A+A+A. Investiguemos con un ejemplo:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: «Para multiplicar una matriz por un número se multiplican por dicho número todos los elementos de la matriz»

Ejemplos:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades: DISTRIBUTIVA respecto al producto por un número: $\lambda(A+B)= \lambda A+\lambda B$

DISTRIBUTIVA respecto al producto por una matriz: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

ASOCIATIVA MIXTA: $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

---

[4] En honor del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829)

[5] Ver págs. 52 y 56 del libro de ed. Anaya.

Todas estas propiedades son de inmediata demostración.

Ejercicio: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Indicar de qué tipo son.

b) Obtener la traspuesta de A

c) Indicar la opuesta de B

d) Hallar: $A+A^t=$ $2A=$

$-3B=$ $3A-2A^t=$ $A+B=$

Ejercicios final tema: 3

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 52: 1 (Comprobación de las propiedades de λA)

III.3 PRODUCTO de MATRICES [6]

El producto de dos matrices no se define, como cabría esperar, multiplicando los elementos que ocupan el mismo lugar. La razón es que la multiplicación así definida no tendría ninguna utilidad. Vamos a explicar a continuación cómo se define el producto de dos matrices. A priori puede parecer una forma caprichosa pero cuando se estudien las aplicaciones lineales en 1º de cualquier estudio universitario de ciencias se entenderá el porqué.

Para poder multiplicar dos matrices:

1º Dimensionalmente, el número de columnas de la 1ª matriz debe ser igual[7] al número de filas de la 2ª; entonces, la matriz resultante tendrá el mismo nº de filas que la 1ª y de columnas que la 2ª. En lenguaje matricial:

$$A_{mxn}\cdot B_{nxp}=C_{mxp}$$

2º En tal caso, «el elemento **ij** de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila **i** de la 1ª matriz por cada elemento de la columna **j** de la 2ª, y sumando dichos productos»

---

[6] Ver págs. 54 y 57 del libro de ed. Anaya.

[7] La razón hay que buscarla en la 2ª condición.

Ejemplo: Vamos a explicar, paso a paso, cómo se multiplican las siguientes dos matrices:

$$\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}*&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}$$

Vemos, en primer lugar, que dimensionalmente el producto es posible, y que la matriz producto va a ser 2x3. Pasemos a obtener su primer elemento, el $\mathbf{c_{11}}$, que se obtendrá multiplicando la fila 1 de A y la columna 1 de B:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad -3}\\ 0\quad\ \ 2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\left(\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\3\end{matrix}&\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\end{matrix}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)}&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

El $\mathbf{c_{12}}$ se obtendrá multiplicando la misma fila 1 de A y la siguiente columna, la 2, de B:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad -3}\\ 0\quad\ \ 2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\left(\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0\\3\end{matrix}}&\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\end{matrix}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&\boxed{1\cdot 0+(-3)\cdot 3}&*\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

El $\mathbf{c_{13}}$ se obtendrá multiplicando la misma fila 1 de A y la última columna de B, la 3:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad -3}\\ 0\quad\ \ 2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\left(\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}&\begin{matrix}0\\3\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}}\end{matrix}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&\boxed{1\cdot 4+(-3)\cdot 5}\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

Para obtener $\mathbf{c_{21}}$ pasamos a multiplicar la fila 2 de A por la columna 1 de B:

$$\begin{pmatrix}1\quad -3\\ \boxed{0\quad\ \ 2}\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\left(\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\3\end{matrix}&\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\end{matrix}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&1\cdot 4+(-3)\cdot 5\\ \boxed{0\cdot(-2)+2\cdot(-1)}&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ -2&*&*\end{pmatrix}$$

Para obtener $\mathbf{c_{22}}$ multiplicamos la misma fila de A, la 2, por la columna 2 de B:

$$\begin{pmatrix}1\quad -3\\ \boxed{0\quad\ \ 2}\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\left(\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0\\3\end{matrix}}&\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\end{matrix}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&1\cdot 4+(-3)\cdot 5\\ 0\cdot(-2)+2\cdot(-1)&\boxed{0\cdot 0+2\cdot 3}&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ -2&6&*\end{pmatrix}$$

Finalmente, $\mathbf{c_{23}}$ lo obtendremos multiplicando la fila 2 de A por la columna 3 de B:

$$\begin{pmatrix}1\quad -3\\ \boxed{0\quad\ \ 2}\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\left(\begin{matrix}\begin{matrix}-2\\-1\end{matrix}&\begin{matrix}0\\3\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}}\end{matrix}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&1\cdot 4+(-3)\cdot 5\\ 0\cdot(-2)+2\cdot(-1)&0\cdot 0+2\cdot 3&\boxed{0\cdot 4+2\cdot 5}\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ -2&6&10\end{pmatrix}$$

NOTA: No es obligatorio indicar el · entre ambas matrices.

Ejercicio: Efectuar los siguientes productos de matrices, cuando se pueda:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

e) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

f) $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

g) $$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

h) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} =$$

i) $$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

Propiedades: **NO ES CONMUTATIVO**: $\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$ en general

ASOCIATIVA: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

ELEMENTO NEUTRO: La matriz identidad o unidad, $\mathbb{1}$ o $\mathbb{I}$: $A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A$

DISTRIBUTIVA: por la dcha. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

por la izda. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Algunas de estas propiedades requieren una demostración relativamente complicada… Nosotros aquí vamos más bien a justificarlas mediante ejemplos prácticos:

Ejercicios final tema: 4 a 11 ← operaciones con matrices
12 a 16 ← potencias n-ésimas de matrices, con posible ley de recurrencia
17 a 20 ← matrices que conmutan
21 a 25 ← miscelánea
26 a 33 ← aplicación de las matrices a tablas y grafos

Ejercicio PAEG: 4B jun 2000 (SSEE matricial sencillo); 3A jun 2011 (potencia n-ésima + SS.EE. matricial)

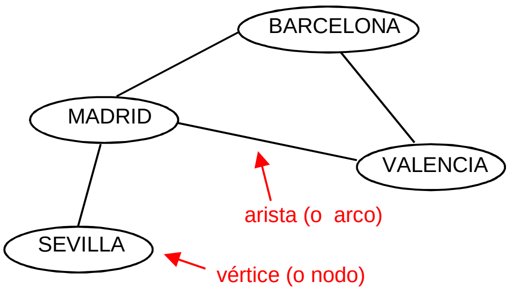
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 55:2; pág. 57: 2 (comprobar propiedades); pág. 61: 3 a 10; pág. 72 y ss.:1 a 9, 21, 22, 32, 34, **35**, 36 (operaciones con matrices), 10 a 15 (ecuaciones y sistemas matriciales sencillos), 30 y 31 (aplicación de las matrices a tablas y grafos), 37 a 40, 43, 45, 48 (teórico-prácticos)

III.4 USO de DERIVE PARA MATRICES y DETERMINANTES

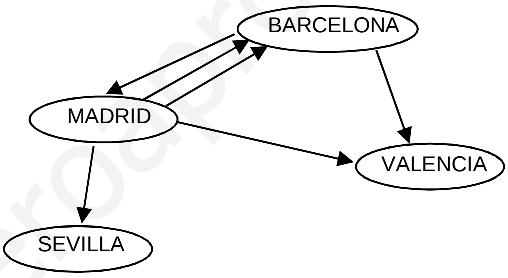
- **Introducir una matriz:** [⋮⋮⋮]
- **Trasponer una matriz:** [ ]` + **=**
- Una vez introducidas varias matrices, se pueden operar en la forma usual.
- **Potencia de una matriz:** [ ]^n + **=**

IV. GRAFOS Y MATRICES DE ADYACENCIA

Un **grafo** (del griego *grafein*, trazar) es una forma de representar de una manera cómoda las posibles relaciones entre objetos:



Ejemplo 1: Hipotética red del AVE



Ejemplo 2: Vuelos diarios de una compañía

Tipos de grafos

- **Dirigidos:** El ejemplo 2, o la red de aguas de una ciudad, o un organigrama con una serie de tareas.
- **No dirigidos:** El ejemplo 1, o la red de carreteras de un país, o la red telefónica. (Pueden verse como un caso particular, bidireccional, de los anteriores).

Matriz de adyacencia de un grafo: Es una matriz cuadrada que se utiliza para representar un grafo, de forma que sus filas y columnas representan ordenadamente los vértices del grafo, y cada elemento **ij** indica el nº de aristas entre el vértice **i** y el vértice **j**.

Observaciones: 1ª) Cada grafo tiene una matriz de adyacencia única, y viceversa. (En el caso de un grafo no dirigido, es importante remarcar que el elemento ij de la matriz de adyacencia indica la relación entre el vértice i y el vértice j, ¡y no al revés!).

2ª) Se denomina matriz de adyacencia, obviamente, porque indica cómo es la relación entre vértices adyacentes.

Veamos cómo son las matrices de adyacencia de los ejemplos anteriores:

Ejemplo 1:

Previamente, ordenamos alfabéticamente las distintas ciudades para situarlas en las filas y columnas:

$$\begin{array}{c|cccc|} & B & M & S & V \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ M & 1 & 0 & 1 & 1 \\ S & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{c|cccc|} & B & M & S & V \\ B & 0 & 1 & 0 & 1 \\ M & 2 & 0 & 1 & 1 \\ S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Observaciones: 1ª) Obviamente, la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido siempre es simétrica.

2ª) Algunos autores sólo consideran matrices de adyacencia binarias, es decir, compuestas de 0 y 1, por lo que sus elementos sólo indican si hay relación (1) o no (0) entre vértices.

3ª) La diagonal no siempre va a estar compuesta por 0: ¡Puede haber bucles!

Ejercicios final tema: 34, 35 y 36

36 EJERCICIOS de MATRICES y GRAFOS 2º BACH.

1. Hallar x e y para que ambas matrices sean iguales: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 & 0 \\ y & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Indicar tres ejemplos de matriz simétrica de orden 3

Operaciones con matrices:

3. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

hallar: **a)** A+B **b)** –B **c)** A–B **d)** 2C **e)** –3A **f)** A+3B–4C

4. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

hallar: **a)** A·B **b)** B·A **c)** A·C **d)** C·A **e)** B·C **f)** C·B **g)** B^2 **h)** A^2 **i)** $B\cdot B^t$ **j)** B^3 **k)** $B\cdot \mathbb{1}_{3x3}$

(Sol: ***a)*** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$; ***b)*** *No se puede;* ***c)*** $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; ***d)*** *No se puede;* ***e)*** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$; ***f)*** $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & 11 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$; ***g)*** $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;

h) *No se puede;* ***i)*** $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}$; ***j)*** $\begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 21 & 39 & -3 \\ 12 & 36 & -12 \end{pmatrix}$; ***k)*** *B)*

5. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto AB, o bien el BA, sea una matriz de una sola fila? Indicar ejemplos.

6. Comprobar si existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

escribir los productos AB y BA.

8. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Comprobarlo para dos matrices de orden 3.

9. Resolver la ecuación matricial siguiente e indicar la dimensión de la matriz **X**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2X = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Calcular $A^2 - 3A - \mathbb{I}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Comprobar que, dadas dos matrices cuadradas A y B, se verifica: **a)** $\boxed{(A+B)^t=A^t+B^t}$

b) $\boxed{(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t}$

(Utilizar matrices 3x3)

Potencias n-ésimas de matrices:

12. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^n = 2^{n-1} A$

13. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Bigg($*Sol:* **b)** $B^n=a$; **c)** $C^n=3^{n-1}C$; **e)** $E^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **g)** $G^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **h)** $H^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg)$

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2, A^3 y A^4, deduciendo una fórmula general para A^n

b) Demostrar que la fórmula anterior también es válida para A^{n+1}

c) ¿Cuánto valdría A^{99}? $\Bigg($*Sol:* $\begin{pmatrix} 1 & 99 & 99 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg)$

15. ***(S)*** Calcular A^2, A^3 y A^{428} dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ *(Soluc: $A^{428}=A^2$)*

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2, A^3 y A^4

b) Razonar cuánto valdría A^{10} $\Bigg($*Sol:* $\begin{pmatrix} 1 & 45 & 55 \\ 0 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg)$

Matrices que conmutan:

17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, encontrar la expresión general de la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tal que el producto de ambas conmute. $\left(\textit{Soluc}: B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

18. Hallar la forma general de las matrices X que conmutan con $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}: X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\right)$

19. Hallar la forma general de las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

20. Ídem con $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}: X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\right)$

Problemas varios:

21. ***(S)*** Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2+\mathbb{1}=0$. Obtener una matriz B_{2x2}, distinta de $\pm A$, que también verifique la relación $B^2+\mathbb{1}=0$

22. ***(S)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A-\lambda\mathbb{I})^2$ sea la matriz nula. *(Soluc: λ=1)*

23. ***(S)*** Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad

$$\begin{pmatrix}1 & y\\ x & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

(Soluc: hay cuatro soluciones posibles: -2,2,1; 2,2,-1; 2,-2,1; -2,-2,-1)

24. **a)** Encontrar dos matrices X e Y que cumplan: $\left.\begin{aligned}2X+Y&=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\ X-Y&=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$

b) Ídem con $\left.\begin{aligned}2X-3Y&=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\\ X-Y&=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$ $\left(\textit{Sol:}\ X=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}\right)$

25. Calcular **x**, **y**, **z**, **t** para que se cumpla que $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}: \begin{pmatrix}5/2 & 3/2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)$

Operaciones con datos en tablas:

26. Las velocidades medias de tres coches *A, B ,C* en km/h, vienen dadas por la matriz

$$V=\begin{pmatrix}50\\ 80\\ 120\end{pmatrix}$$

El número de horas que cada coche viaja viene dado por la matriz $H = (3 \quad 4 \quad 6)$. Calcular los productos *HV* y *VH*, interpretando los valores de los términos de las matrices resultantes.

(Soluc: El único término de HV representa el total recorrido por los tres coches, 1190 km; cada término de VH representa los km recorridos por el coche a la velocidad que indica la fila en que está situado viajando el número de horas que indica la columna)

27. Se realiza una comparación del precio de cuatro productos en tres supermercados distintos. Los precios por kg de los productos en los distintos supermercados vienen dados por la matriz

$$\begin{array}{l|ccc|} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \text{Verdura} & 8 & 9 & 10 \\ \text{Carne} & 40 & 50 & 40 \\ \text{Pan} & 4 & 4 & 3{,}5 \\ \text{Fruta} & 12 & 15 & 14 \end{array}$$

El número de kg comprados respectivamente de cada producto cierto día por una familia está dado por la matriz $(2 \quad 3 \quad 1 \quad 2)$. Mediante el producto apropiado de matrices, comparar el coste del total de la compra en los tres supermercados. *(Soluc: La matriz del coste total de los productos es (164 202 171,5))*

28. El consumo anual medio en litros de leche desnatada, semi y entera de tres familias F_1, F_2 y F_3 viene dado por la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{c|ccc|} & \text{desn} & \text{semi} & \text{entera} \\ F_1 & 430 & 157 & 8 \\ F_2 & 545 & 210 & 1 \\ F_3 & 120 & 80 & 3 \end{array}$$

mientras que la evolución de los precios en € de tales productos en los últimos años es:

$$B = \begin{array}{c|cccc|} & 2006 & 2007 & 2008 & 2009 \\ \text{desn} & 80 & 83 & 90 & 92 \\ \text{semi} & 83 & 87 & 88 & 90 \\ \text{ent} & 85 & 88 & 90 & 95 \end{array}$$

Calcular e interpretar $A \cdot B$ *(Soluc: Representa el gasto anual de cada familia en leche)*

29. En un centro de estudios de idiomas los alumnos de francés y alemán se distribuyen en 4 niveles como indica la matriz **A**. Los precios que pagan los alumnos por hora de clase dependen del nivel en que se encuentren y de que el aula disponga o no de puestos de laboratorio de idiomas, según figura en la matriz **B**. Calcular lo que percibiría este centro educativo por hora de cada idioma impartido dependiendo de que las aulas estén o no dotadas de los medios mencionados.

$$A = \begin{array}{c|cc|} & \text{FR.} & \text{AL.} \\ 1 & 12 & 16 \\ 2 & 10 & 11 \\ 3 & 15 & 11 \\ 4 & 10 & 7 \end{array} \qquad B = \begin{array}{r|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{sin lab.} & 5 & 5{,}5 & 8 & 10 \\ \text{con lab.} & 7 & 7 & 10 & 12 \end{array}$$

(Soluc: Haciendo BA obtenemos FR sin lab=335 €, FR con lab=424 €, AL sin lab=298,50 € y AL con lab=383 €)

30. Una factoría produce encendedores $\mathbf{P_1}$, rotuladores $\mathbf{P_2}$, y llaveros $\mathbf{P_3}$, para cuya elaboración se precisan materias primas como gas $\mathbf{M_1}$, tinta $\mathbf{M_2}$, plástico $\mathbf{M_3}$ y metal $\mathbf{M_4}$. Dos compañías distribuidoras $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ se encargan de proporcionar a los comercios estos productos. Sea:

$$A=\begin{array}{c} \\ D_1 \\ D_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1000 & 650 & 400 \\ 1000 & 600 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz de pedido de los tres productos por parte de los distribuidores,

$$B=\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz que expresa la cantidad de cada una de las materias primas, en gramos, por unidad de cada producto, y

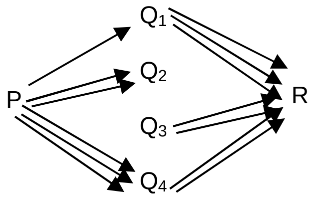
$$C=\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

la matriz de costes por gramo de cada material ¿Qué materias primas forman parte de los llaveros, y en qué cantidades por unidad producida? Calcular e interpretar el significado de **AB**, **BC** y **ABC**.

(Soluc: En cada llavero hay 30 gr de plástico y 30 gr de metal; AB expresa la cantidad total de cada materia prima que precisa cada distribuidora; BC es la matriz de costes de cada producto; A BC expresa los beneficios que obtiene cada distribuidora)

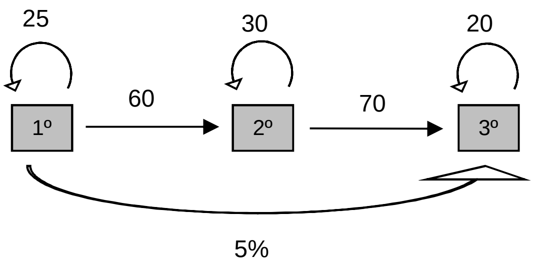
Operaciones con datos en grafos:

31. *(pág. 53 libro ed. Anaya)* Para viajar de P a R no hay vuelo directo, sino que hay que hacer escala en alguno de los cuatro aeropuertos de la ciudad Q, según el siguiente grafo:



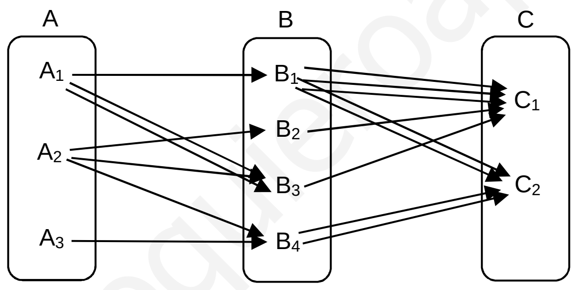
(Por ejemplo, para ir de P a Q_2 hay dos vuelos, mientras que no hay ninguno de Q_2 a R). Construir la matriz fila que representa los vuelos de P a Q_i y la matriz columna de los vuelos de Q_i a R ¿Qué debemos hacer con ambas matrices para obtener el número de combinaciones de vuelos de P a R? ¿Cuántas formas hay de ir de P a R? *(Soluc: Multiplicarlas; 9 formas distintas)*

32. En una academia de idiomas hay 100 alumnos en 1º, 90 en 2º y 80 en 3º. Al final de curso se dan los resultados que se resumen en el siguiente grafo:



Por ejemplo, el 25% de los alumnos de 1º repite, el 60% pasa a 2º y el 5% pasa directamente a 3º (el resto abandona). Formar adecuadamente la matriz 3x3 que representa el % de alumnos que pasan a los diferentes cursos. ¿Cómo debe operarse con la matriz columna que recoge el nº de alumnos por nivel en el presente curso para obtener el nº de alumnos por nivel el próximo curso? *(Soluc: Hay que multiplicar la matriz cuadrada por la matriz columna, y el resultado será 25 87 84)*

33. *(pág. 55 libro ed. Anaya)* En una ciudad A hay tres aeropuertos A_1, A_2 y A_3, en B hay cuatro y en C dos. Una persona que quiera ir de A a B un cierto día de la semana, y de B a C al día siguiente, dispone de los vuelos que se recogen en el siguiente grafo:

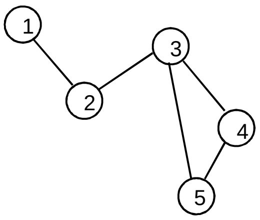


Construir sendas matrices que representen los vuelos de A a B y de B a C. ¿Qué operación debe hacerse entre ellas para obtener el número de formas distintas de ir de A a C?

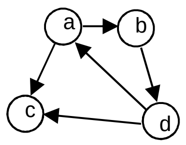
Matriz de adyacencia:

34. Dados los siguientes grafos, indicar de qué tipo se tratan y obtener su matriz de adyacencia:

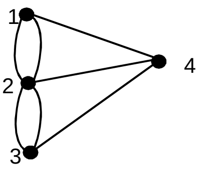
a)



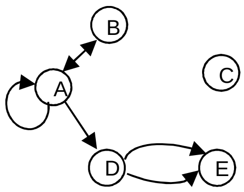
b)



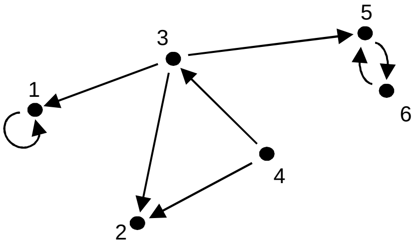
c)



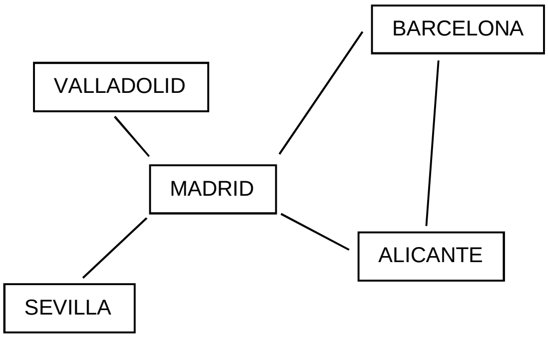
d)



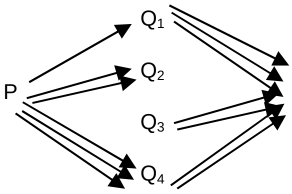
e)



f)



g)



35. Dadas las siguientes matrices de adyacencia, dibujar los grafos que representan, e indicar de qué tipo se tratan:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

36. Los distintos vuelos de una compañía a aeropuertos de 4 países A, B, C y D vienen definidos por la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 1 & 2 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dibujar el grafo correspondiente.

DETERMINANTES

El francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), además de desarrollar importantes contribuciones a la teoría de determinantes, fue de hecho el primero en utilizar el término «determinante», en 1801.

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González

IES Fernando de Mena

Dpto. de Matemáticas

I. DEFINICIÓN

Determinantes[1] de orden 2: «Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de dicha matriz, que se designa como det(A), o también $|A|$, como el resultado de la siguiente regla:

$$\det(A)=|A|=\overset{+\qquad\quad -}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

la cual se conoce como **regla de Sarrus**[2]»

Observaciones: 1ª) El determinante así definido puede resultar un número positivo, negativo o nulo

2ª) El determinante tiene que ser necesariamente de una matriz cuadrada.

3ª) La razón de definir así esta nueva herramienta es su enorme utilidad, que se verá en este tema y siguientes, fundamentalmente la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la Geometría.

Ejercicio 1: Calcular los siguientes determinantes de orden 2 (Obsérvese el primer ejemplo):

a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-(-2)\cdot 4=14$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=$

c) $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=$

d) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}=$

f) $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1/2 \end{vmatrix}=$

g) $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=$

Ejercicios final tema: 1 y 2

Ejercicio PAEG: 3B jun 2010

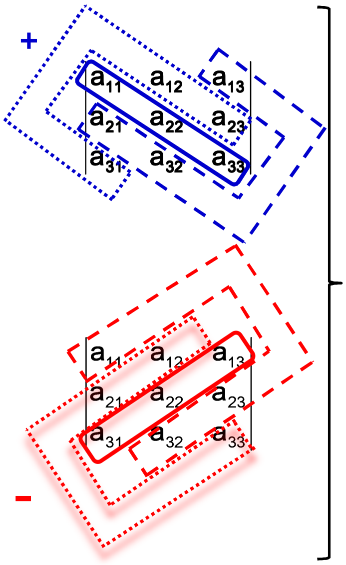
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 95: 1 y 2

---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 78 a 80 del libro de ed. Anaya.

[2] Fue ideada por el matemático francés Pierre Frédéric Sarrus en 1833.

Determinantes[3] de orden 3: En este caso la regla de Sarrus consiste en sumar los 6 posibles productos de 3 elementos en los que interviene un elemento de cada fila y columna (es decir, las 6 diagonales); los 3 productos a los que no se les cambia el signo (**+**) y los 3 a los que sí (**–**) vienen dados por el siguiente esquema:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{+} \underbrace{- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}_{-}$$

Ejercicio 2: Calcular los siguientes determinantes de orden 3 (Obsérvese el primer ejemplo):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 4 = 4 + 18 + 12 - 9 - 4 - 24 = \boxed{-3}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 1)*

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 25)*

d) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 34)*

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 36)*

f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 0)*

---

[3] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver pág. 89 del libro de ed. Anaya.

g) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 0)*

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ *(Soluc: 0)*

Ejercicios final tema: 3

¿Existirá una regla de Sarrus para determinantes de orden 4? La respuesta es que sí, pero resulta tan complicada –consta de 24 elementos– que no es muy práctica; en su lugar veremos en el apdo. III un método mucho más cómodo, la llamada «Regla de Laplace».

Reseña histórica: En su sentido original, el determinante determina –de ahí su nombre– la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, y fue introducido en este sentido para el caso de orden 2 por el italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) en 1545 como una regla para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. El alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hizo lo propio en 1693 en relación con los sistemas de ecuaciones lineales de mayor orden. Por lo tanto, los determinantes surgen siglos antes que las matrices: recuérdese que en el tema anterior vimos que el inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) fue quien utilizó por primera vez el término "matriz" en 1848-1850, dando a entender que la matriz era "la madre de los determinantes".

Las contribuciones más prolíficas a la teoría de los determinantes fueron las del matemático francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien, por ejemplo, demostró por primera vez que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$. Además, utilizó por primera vez el término «determinante», en 1801. El desarrollo de un determinante por cofactores fue empleado por primera vez por el matemático francés Pierre de Laplace (1749-1827) en 1772. Por su parte, el inglés Arthur Cayley (1821-1895) es el inventor de la notación actual de los determinantes mediante barras (1841) y establece la fórmula para el cálculo de la inversa de una matriz mediante determinantes (1858).

II. PROPIEDADES de los DETERMINANTES [4]

① «Si permutamos dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo[5]»

Ejemplo justificativo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Permutando, por ejemplo c_1 y c_3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

---

[4] Ver págs. 82 y 83 del libro de ed. Anaya.

[5] Esta propiedad es fácil de demostrar aplicando la regla de Sarrus.

② **«Si dos filas (o columnas) son iguales, el determinante es nulo[6]»**

Ejemplo justificativo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

③ **«Si todos los elementos de una fila (o columna) son nulos, el determinante es cero[7]»**

④ **«Si multiplicamos por el mismo número todos los elementos de una fila (o columna), el valor del determinante queda multiplicado por dicho número[8]»**

De las 6 líneas posibles, indiquémoslo, por ejemplo, para c_2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & k\cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k\cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo justificativo: En un ejemplo anterior hemos visto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24$$

Ahora bien, utilizando esta propiedad en sentido inverso, es decir, sacando factor común 3 de f_2, resulta más fácil su cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Observaciones: 1ª) Como pudo advertirse en el ejemplo anterior, esta propiedad es muy útil a la hora de simplificar, cuando se pueda, un determinante de coeficientes elevados antes de calcularlo, a base de extraer factor común de una (o varias) línea(s):

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{extrayendo de } f_1}}{5} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de } f_2}}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de } f_3}}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

2ª) Esta propiedad se puede aplicar en el otro sentido, es decir, para introducir –cuando convenga– un factor multiplicativo en un determinante. ¡IMPORTANTE! **Dicho factor multiplicativo podemos introducirlo en la fila o columna que deseemos, pero sólo en una:**

---

[6] Esta propiedad es una consecuencia de la anterior.

[7] Esta propiedad es obvia debido a la regla de Sarrus.

[8] De nuevo fácil de demostrar aplicando Sarrus.

$$3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2/3 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1/3 & 2\end{vmatrix}=$$

3ª) ¡CUIDADO! Conviene no confundir esta propiedad con la idea, vista en el tema anterior, de que para multiplicar una constante por una matriz se multiplicaban todos los elementos de dicha matriz.

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2/3 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1/3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 9 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

4ª) **CONSECUENCIA: «Si dos filas (o columnas) son proporcionales, el determinante es cero».**

Efectivamente, si dos filas (o columnas) son proporcionales, entonces podemos extraer la constante de proporcionalidad de una de ellas, con lo cual pasará a tener dos filas (o columnas) iguales, y debido a la 2ª propiedad el determinante valdrá cero.

Ejemplo justificativo:

Podemos predecir, sin necesidad de desarrollarlo, que el siguiente determinante vale cero:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -2 & -6\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

Ya que $c_3=3c_2$. Compruébese.

⑤ **Descomposición en sumandos a partir de los elementos de una fila (o columna):** La siguiente descomposición es válida[9] cualesquiera que sean las filas (o columnas), y el nº de sumandos; nosotros aquí la indicamos para la f_2 y 3 sumandos:

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d+e+f & g+h+i & j+k+l\\ m & n & p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & g & j\\ m & n & p\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c\\ e & h & k\\ m & n & p\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c\\ f & i & l\\ m & n & p\end{vmatrix}$$

Observaciones: 1ª) Como ya se ha indicado, la descomposición es válida ya sea por cualquier fila o columna, y por el nº de sumandos que deseemos. Por ejemplo, comprobémoslo desarrollando el siguiente determinante cuyo valor (-24) ya conocemos, por f_3 y 2 sumandos:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 1+1 & 1+0 & 1+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 9\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}= \quad + \quad =-24$$

---

[9] La demostración por Sarrus es sencilla pero muy laboriosa.

O por c_1 y 3 sumandos:

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\textcircled{1}+\boxed{0}+0&2&-1\\\textcircled{1}+\boxed{1}+1&-6&9\\\textcircled{1}+\boxed{1}+0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\textcircled{1}&2&-1\\\textcircled{1}&-6&9\\\textcircled{1}&1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boxed{0}&2&-1\\\boxed{1}&-6&9\\\boxed{1}&1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&-6&9\\0&1&3\end{vmatrix}=\quad+\quad+\quad=-24$$

También funciona con restas; comprobémoslo desarrollando por f_1:

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\textcircled{2}-\boxed{1}&\textcircled{2}-\boxed{0}&\textcircled{1}-\boxed{2}\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\textcircled{2}&\textcircled{2}&\textcircled{1}\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boxed{1}&\boxed{0}&\boxed{2}\\3&-6&9\\2&1&3\end{vmatrix}=\quad-\quad=-24$$

2ª) ¡CUIDADO! No se puede descomponer a la vez por dos filas (o columnas), sino que hay que descomponer primero por una y luego por otra:

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&3\\2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1+1&0+1&2+1\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}\neq\cancel{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}}=\quad+\quad=\neq$$

INCORRECTO

Lo correcto es lo siguiente:

Desarrollamos por f_2

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&3\\2&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1+1&0+1&2+1\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1+1&1+1&1+2\end{vmatrix}=$$

Desarrollamos ambos por f_3

$$=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&2\\1&1&2\end{vmatrix}+\cancel{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}+\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\quad+\quad+\quad+\quad=$$

0, porque $f_2=f_3$

3ª) La utilidad de esta propiedad se verá más adelante, a la hora de calcular ciertos determinantes simplificándolos previamente...

⑥ **«Si una fila (o columna) es combinación lineal de las restantes, el determinante es cero, <u>y viceversa</u>[10]»**

Para entender esta propiedad, primero tenemos que recordar qué se entiende por combinación lineal. Por ejemplo, una combinación lineal de las filas de una matriz es una expresión de este tipo:

$$\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3+\ldots \quad \text{donde } \alpha,\beta,\gamma\ldots\in\Re$$

Por ejemplo, son combinaciones lineales las siguientes:

$$f_1=f_2+f_3 \qquad c_3=c_2+2c_3 \qquad f_1=3f_2-f_3 \qquad c_2=3c_3$$

Y no lo son expresiones como $f_1=f_2+5$, $f_3=f_1\cdot f_2$, $c_2=2+c_1+c_3$, etc.

---

[10] Esta propiedad fue demostrada por primera vez por el alemán Heinrich F. Scherk (1798-1855), en 1825.

Por último, nótese que, por ejemplo, $f_1=f_2-f_3$ es equivalente a $f_2=f_1+f_3$ o $f_3=f_2-f_1$

Ejemplo justificativo: Vamos a inventarnos un determinante cuyas filas cumplan, por ejemplo, la combinación lineal $f_3=f_1+f_2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 4 & -4 & 8 \end{vmatrix}$$

Pues bien, puede comprobarse que su valor es 0.

Observaciones: **1ª)** Lo curioso de este teorema es que el inverso también se cumple: si un determinante es nulo hay una combinación lineal. Por ejemplo, en el ejercicio 2, apdo. h, obtuvimos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, hay por fuerza una combinación lineal en sus filas. ¿Cuál es?

2ª) Pero más sorprendente es que si hay combinación lineal por filas también debe haberla por columnas ¿Podría encontrarse en el caso de los dos determinantes nulos anteriores?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 4 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

En el primer caso es bastante obvia, no tanto en el segundo. Encontrar la combinación lineal en algunos casos puede llegar a ser un reto[11]…

3ª) Esta propiedad es una de las grandes aplicaciones de los determinantes, y el motivo de que los vayamos a utilizar hasta final de curso: son como una especie de herramienta o test que nos permite detectar si hay o no combinación lineal.

⑦ **«El determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes[12]»**:

$$\boxed{\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B}$$

«El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta[13]»:

$$\boxed{\det(A)=\det(A^t)}$$

Una última propiedad:

$$\boxed{\det(\lambda A)=\lambda^n\det A} \quad \text{donde A es una matriz de orden n}$$

---

[11] De todas formas, más adelante veremos un método para obtener la combinación lineal de forma algebraica, es decir, sin recurrir a nuestra mayor o menor vista "matemática"…

[12] Esta propiedad fue demostrada por primera vez por el francés Agustin-Louis Cauchy (1789-1857). La demostración es complicada.

[13] La demostración, al igual que la de la siguiente fórmula, es trivial. Inténtese…

Ejercicio justificativo: De la 1ª fórmula:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

De la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

De la 3ª:

$$2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

⑧ **«Si a una fila (o columna) le sumamos (o restamos) una combinación lineal de las restantes, el determinante no varía[14]»**

Ejemplo justificativo: Vamos a partir de uno de los determinantes del ejercicio anterior, de valor conocido:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Y, por ejemplo, vamos a sumar a f_1 la combinación lineal f_2+f_3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_1=f_1+\underbrace{f_2+f_3}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{la que cambia} \\ \leftarrow \text{no varían} \\ \end{matrix}$$

la que cambia no varían

Puede comprobarse que el valor del determinante no ha variado.

Observaciones: 1ª) En la combinación lineal no tienen por qué figurar todas las restantes filas (o columnas); de hecho, no es habitual que ello ocurra. Por ejemplo, en el determinante anterior, hubiera sido mucho más útil sumar a c_1 la columna c_3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_1=c_1+c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

la que cambia no varía

---

[14] La demostración de esta propiedad, que no es complicada, se basa en las anteriores.

De esta forma, hemos creado varios ceros, lo cual es, obviamente, muy útil a la hora de calcular determinantes. Y esta es precisamente la idea del método de Gauss, que veremos a continuación.

2ª) Es importante hacer notar que la(s) fila(s) o columna(s) de la combinación lineal no varían, y que la que cambia es aquella a la que sumamos (o restamos, que también puede ser) la combinación lineal. También hay que tener en cuenta que la fila (o columna) a la que sumamos (o restamos) la combinación lineal no se puede ver multiplicada por ningún número, ni cambiada de signo, porque entonces sí que varía el determinante. Por ejemplo, no podemos hacer $f_2=2f_2-f_3$, o $c_1=-c_1+c_3$, etc.

Consecuencia: MÉTODO de GAUSS para calcular determinantes de cualquier orden: «Consiste en, mediante la utilización de la propiedad anterior, transformar la matriz en triangular inferior o escalonada; el determinante será entonces igual al producto de los elementos de la diagonal[15]». Por ejemplo, para orden 4:

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c\cdot d$$

Ejemplo justificativo: Aunque no es lo habitual, vamos a aplicar el método de Gauss para calcular un determinante de orden 3 cuyo valor ya conozcamos, como por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

En primer lugar, y como se trata de hacer ceros debajo de la diagonal, es muy recomendable conseguir tener un 1 (también vale un -1) en la esquina superior izquierda de la matriz; en este caso lo conseguimos permutando f_1 y f_3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrows f_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que, debido a la propiedad ①, hemos cambiado de signo el determinante. Este 1 en esa posición se llama pivote (de hecho, este método a veces se llama "pivotal"). Una vez conseguido el pivote, hacemos ceros debajo de él:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_2=f_2+2f_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3=f_3-3f_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \underset{\text{Por Sarrus}}{=} -(-6) = 6$$

la que cambia

no varía (la del pivote)

---

[15] Ideado por el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Trivial, por ejemplo, en el caso de orden 3, por Sarrus: $\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c$

Pero para lo que resulta verdaderamente útil este método es para determinantes de orden 4 o superior; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix}2&0&-4&0\\1&1&-1&1\\2&2&2&1\\1&2&1&1\end{vmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ f_1\leftrightarrows f_2}}{=}-\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\2&0&-4&0\\2&2&2&1\\1&2&1&1\end{vmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ f_2=f_2-2f_1\\ f_3=f_3-2f_1\\ f_4=f_4-f_1}}{=}-\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&-2&-2\\0&0&4&-1\\0&1&2&0\end{vmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ f_2\leftrightarrows f_4}}{=}\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\0&1&2&0\\0&0&4&-1\\0&-2&-2&-2\end{vmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ f_4=f_4+2f_2}}{=}\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\0&1&2&0\\0&0&4&-1\\0&0&2&-2\end{vmatrix}\underset{\substack{\uparrow\\ f_4=f_4-(1/2)f_3}}{=}\begin{vmatrix}1&1&-1&1\\0&1&2&0\\0&0&4&-1\\0&0&0&-3/2\end{vmatrix}=-6$$

Nótese que este método pivotal es ordenado, es decir, el pivote va saltando por la diagonal, y se trata en cada paso de hacer ceros debajo de él. Además, como puede verse en el penúltimo paso, el pivote no tiene por qué ser necesariamente 1 (o –1). Una desventaja de este método es que a veces se hace laborioso conseguir un pivote…

Ejercicios final tema: 4 a 14

Ejercicio PAEG: 3B jun 2013, 3A jun 2013, 3A sept 2012, 3B jun 2010 (+ matrices), 3A sept 2008, 1B jun 2003, 4B jun 2002, 3B jun 2005, 3A sept 2006, 1B sept 2010 (+ intervalos concavidad)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 83: 3 y 4; págs.. 95 y ss.: 8, 14, 20, 38 y 39 (propiedades de los determinantes), 3 y 15 (ecuaciones con determinantes)

III. DESARROLLO de un DETERMINANTE por los ELEMENTOS de una FILA [16]

Supongamos una matriz cuadrada:

Menor complementario del elemento a_{ij}: «Es el determinante que resulta de suprimir la fila **i** y la columna **j** de la matriz A; se designa como α_{ij}»

Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\longrightarrow\quad\alpha_{23}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}=\ldots$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\longrightarrow\quad\alpha_{42}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{33}&a_{34}\end{vmatrix}=\ldots$$

etc…

Adjunto del elemento a_{ij}: «Es el menor complementario α_{ij} precedido del signo + o – según que la suma de la fila **i** y la columna **j** sea par o impar, respectivamente. Se designa como A_{ij}»:

$$\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}}$$

---

[16] Ver págs. 85 y ss. del libro de ed. Anaya.

En realidad, el signo al que hay que afectar el menor complementario α_{ij} se calcula más fácilmente mediante la "regla del tablero de ajedrez"; por ejemplo, para una matriz cuadrada de orden 4:

$$\begin{pmatrix} \overset{+}{*} & \overset{-}{*} & \overset{+}{*} & \overset{-}{*} \\ \overset{-}{*} & \overset{+}{*} & \overset{-}{*} & \overset{+}{*} \\ \overset{+}{*} & \overset{-}{*} & \overset{+}{*} & \overset{-}{*} \\ \overset{-}{*} & \overset{+}{*} & \overset{-}{*} & \overset{+}{*} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: Escoger un determinante de orden 3 de valor conocido y hallar los adjuntos correspondientes a una línea –por ejemplo, A_{11}, A_{12} y A_{13}, correspondientes a la 1ª fila–. Calcular a continuación la expresión $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ y comprobar que se obtiene $|A|$.

Supongamos $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ cuyo valor es, como vimos, –24

Para ver el signo correspondiente a cada adjunto según la regla del tablero de ajedrez señalamos dichos signos en la fila donde vamos a hacer el desarrollo, es decir, f_1:

$$A=\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{-1} \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{11}=\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-18-9=-27$$

$$A=\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{-1} \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-(9-18)=9$$

$$A=\begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{-1} \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3+12=15$$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot(-27)+2\cdot 9+(-1)\cdot 15= \\ =-27+18-15=-24=|A|$$

Puede comprobarse que si hacemos un desarrollo tal por cualquiera de las otras 5 líneas se obtendrá siempre el valor del determinante. Esto es precisamente lo que descubrió el francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827):

MÉTODO de LAPLACE para calcular determinantes de cualquier orden: «El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila (o columna) cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes[17]».

---

[17] Ver demostración en pág. 86 del libro de ed. Anaya.

Ejercicio 4: Desarrollar el determinante anterior por Laplace por otra línea y comprobar que se obtiene $|A|$.

Ejercicio 5: Desarrollar por Laplace el siguiente determinante de un ejemplo anterior, y comprobar que se obtiene el mismo resultado (–6):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: Adviértase que conviene desarrollar por una línea que contenga el mayor número de ceros posible)

- Nótese que con el método de Laplace podemos justificar la validez del método de Gauss. En efecto, si en el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

hacemos un desarrollo por Laplace por c_1 obtendremos trivialmente $a\cdot b\cdot c\cdot d$ (C.Q.D.)

- Como es fácil de advertir, a la hora de hacer un desarrollo por Laplace por una línea conviene tener el mayor número posible de ceros; de ahí la conveniencia del siguiente

MÉTODO PRÁCTICO (o Método mixto) para calcular determinantes de cualquier orden: «Antes de desarrollar por una fila (o columna) por Laplace conviene hacer el mayor número posible de ceros en ella, aplicando la propiedad ⑧, es decir, sumando combinaciones lineales apropiadas[18]»

Ejercicios final tema: 15 a 22

Ejercicio PAEG: 3B jun 2009

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 87: 3; pág. 88: 1; págs.. 95 y ss.: 9, 10 y 43 (cálculo de determinantes de orden 4 o superior); pág. 97: 19 (cálculo de determinantes en función de un parámetro)

IV. MATRIZ INVERSA [19]

IV.1 DEFINICIÓN y CÁLCULO

Recordar: El inverso de 2 es 2^{-1} porque $2\cdot 2^{-1}=2^{-1}\cdot 2=1$. De la misma forma se define la inversa de una matriz:

Definición: «La **matriz inversa** de una matriz cuadrada A se designa como $\mathbf{A^{-1}}$ y es aquella que verifica:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\mathbb{1}}$$

Dada A, no siempre existe A^{-1}, pero si existe se dice que A es **regular** o **inversible**; en caso contrario, A se llama **singular** »

¿Cómo se calcula? Necesitamos previamente la siguiente definición:

Matriz adjunta de una matriz cuadrada A: «Es la matriz formada por los adjuntos correspondientes $\mathbf{A_{ij}}$. Se designa como **Adj(A)**»:

La matriz inversa se calcula mediante la siguiente fórmula[20]: $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot {}^{t}\text{Adj}(A)}$

Consecuencia: $\boxed{\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0}$

Observaciones: **1ª)** Por lo tanto, en la práctica es preferible comenzar por calcular |A| para ver si $\exists\, A^{-1}$, y en caso afirmativo calcular a continuación la adjunta.

2ª) Existe otro método, debido a Gauss, para calcular la inversa, quizá más laborioso.[21]

---

[18] Ver pág. 88 del libro de ed. Anaya.

[19] Ver págs. 58 y 111 del libro de ed. Anaya.

[20] Ver demostración en pág. 112 del libro de ed. Anaya. El inglés Arthur Cayley (1821-1895) fue quien estableció esta fórmula, en 1858.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}\longrightarrow |A|=4-8-6+8=-2\Longrightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}{}^{+}2&{}^{-}-2&{}^{+}2\\{}^{-}2&{}^{+}1&{}^{-}0\\{}^{+}3&{}^{-}-2&{}^{+}2\end{pmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{lll}A_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&2\end{pmatrix}=\boxed{2} & A_{12}=-\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}=\boxed{-4} & A_{13}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}=\boxed{-7}\\ A_{21}=-\begin{pmatrix}-2&2\\-2&2\end{pmatrix}=\boxed{0} & A_{22}=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}=\boxed{-2} & A_{23}=-\begin{pmatrix}2&-2\\3&-2\end{pmatrix}=\boxed{-2}\\ A_{31}=\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\end{pmatrix}=\boxed{-2} & A_{32}=-\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}=\boxed{4} & A_{33}=\begin{pmatrix}2&-2\\2&1\end{pmatrix}=\boxed{6}\end{array}\right]\rightarrow \mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&-4&-7\\0&-2&-2\\-2&4&6\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow {}^{t}\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-2&4\\-7&-2&6\end{pmatrix}\longrightarrow \boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot{}^{t}\mathrm{Adj}(A)=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\-4&-2&4\\-7&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&-2\\7/2&1&-3\end{pmatrix}}$$

Comprobación: $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&-2\\7/2&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}=$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&-3&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow |A|=6-6=0\Longrightarrow \boxed{\nexists\, A^{-1}}$$

IV.2 USO de DERIVE PARA MATRICES y DETERMINANTES

- **Introducir una matriz:** [⋮⋮⋮]
- **Hallar su determinante:** DET[ ] + =
- **Trasponer una matriz:** [ ]\` + =
- **Adjunta de una matriz:** ADJOINT[ ] + =
- **Inversa de una matriz:** [ ]^(-1) + =

---

[21] Ver pág. 58 del libro de ed. Anaya. Para calcular la inversa de una matriz de orden 4 es preferible por matriz adjunta; para orden 5 o superior, compensa más por Gauss…

- **Potencia de una matriz:** [ ]^n + **=**

Ejercicios final tema: 23 a 34

Ejercicio PAEG: 3B sept 2005, 1B sept 2003, 3B jun 99, 3A jun 2008

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 59: 1 y 2; pág. 72: 16 a 18; pág. 112: 1 y 2; pág. 120: 9 y 10 ← Cálculo de A^{-1}
pág. 120: 12, 28, 29, 30 y 37 ← Cálculo de A^{-1} con parámetro

IV.3 ECUACIONES MATRICIALES

«Son aquellas en las que la incógnita **X** y los coeficientes **A**, **B**, **C**… son matrices». También existen los sistemas matriciales. Recordemos que no existe la división de matrices; por tanto, para despejar **X** hay que multiplicar por una determinada matriz inversa **por el mismo lado en ambos miembros** (pues el producto de matrices no es conmutativo):

Ejemplo: Supongamos la siguiente ecuación matricial:

$$AX+B=C \quad \text{donde A, B, C y X son matrices}$$

Comenzamos a despejar **X** aplicando las propiedades permitidas de matrices vistas en el tema anterior:

$$AX=C-B$$

A continuación, para despejar **X**, en este caso tenemos que multiplicar ambos miembros **y por el mismo lado** –en concreto el izquierdo– por A^{-1}:

$$A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$$

Y teniendo en cuenta que, por la definición de matriz inversa, $A^{-1}A=\mathbb{1}$, nos queda:

$$\mathbb{1}\,X=A^{-1}(C-B)$$

Finalmente, y como la matriz $\mathbb{1}$ es el elemento neutro del producto:

$$\boxed{X=A^{-1}(C-B)}$$

NOTA: En el antepenúltimo paso hubiera sido incorrecto proceder de la siguiente forma:

$$\xcancel{A^{-1}AX=(C-B)A^{-1}}$$

¿Por qué?

Ejercicios final tema: 35 a 49

Ejercicio PAEG: 2B sept 2002, 3B sept 2007, 3A jun 2006, 3A jun 2004 ← Matrices de orden 2

1B jun 2001, 3B sept 2000, 3B jun 97, 3A sept 99, 1B sept 2001, 3B sept 2004, 2B sept 98, 1A jun 98, 3B sept 97, 3A jun 2009, 3A sept 2010, 3A sept 2009 ← Matrices de orden 3

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 121 y ss.: 21 a 25 y 32; pág. 74: 36

V. RANGO de una MATRIZ [22]

Definición: «Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** (se suele abreviar como **l.d.**)cuando uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, son **linealmente independientes (l.i.)**»:

NOTA: Alguno de los coeficientes de la combinación lineal puede ser 0 (lo cual, por cierto, es lo habitual…)

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow f_3=f_1+f_2 \\ \longleftarrow f_4=f_2+f_3 \end{array}$$

En este caso cualquiera de los siguientes conjuntos de vectores fila: $\{f_1, f_2\}$, $\{f_1, f_3\}$, $\{f_1, f_4\}$, $\{f_2, f_3\}$, $\{f_2, f_4\}$ y $\{f_3, f_4\}$ es l.i. Ahora bien, en el momento en que introduzcamos en cualquiera de ellos un vector de los restantes pasará a ser l.d.; por ejemplo, $\{f_1, f_2, f_3\}$ es l.d. porque hay combinación lineal.

Por cierto, si $f_4=f_2+f_3$, y $f_3=f_1+f_2$, ¿qué relación hay entre $\{f_1, f_2, f_4\}$? Compruébese.

¿Y entre $\{f_1, f_3, f_4\}$?

Definición: «**Rango** de una matriz = nº de filas (o columnas) l.i.»

En el ejemplo anterior, $\text{rg}\,A=2$, ya que hemos visto que como máximo hay 2 vectores fila l.i.

Observaciones: **1ª)** «El rango por filas coincide con el rango por columnas»[23]

Lo que dice este teorema es que si, por ejemplo, en la matriz anterior había a lo sumo 2 filas l.i, también habrá como máximo 2 columnas l.i. Por cierto, ¿Podría encontrarse alguna de las combinaciones lineales por columnas?

2ª) Vamos a reescribir, por motivos prácticos, y a la luz de la definición de dependencia lineal, la propiedad ⑥:

$$\boxed{|A|=0 \Leftrightarrow \text{sus filas (o columnas) son l.d.}}$$

Por lo tanto, un determinante es una magnífica herramienta a modo de test para descubrir la posible existencia de combinación lineal[24] y, por tanto, para hallar el rango de un conjunto de vectores, o lo que es lo mismo, de una matriz.

---

[22] El rango de una matriz también se llama característica. Ver págs. 63 a 65 y 89-90 del libro de ed. Anaya.

[23] Ver demostración de este teorema en pág. 67 del libro de ed. Anaya.

[24] Nótese que con ello descubrimos la existencia de combinación lineal. Cómo es en concreto la combinación es otro asunto; ahora bien, normalmente basta únicamente con saber si hay o no combinación.

Cálculo práctico del rango de una matriz: Existen 3 métodos:

1º Por determinantes[25] (Orlando menores)[26]:

Definición: «Dada una matriz, un menor de orden **k** es cualquier determinante de orden **k** que podemos obtener suprimiendo filas y/o columnas»:

Ejemplo: En la matriz del ejemplo anterior algunos menores de orden 2 serían los señalados con recuadro:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\2&1&-2&4&5\\3&-1&1&3&7\\5&0&-1&7&12\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=5$$ que resulta de suprimir f_3, f_4, c_3, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}1&-2\\-1&1\end{vmatrix}=-1$$ que resulta de suprimir f_1, f_4, c_1, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}-1&2\\7&12\end{vmatrix}=-26$$ que resulta de suprimir f_2, f_3, c_1, c_2 y c_3

Ejemplos de menores de orden 3 serían:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\2&1&-2&4&5\\3&-1&1&3&7\\5&0&-1&7&12\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&-2\\3&-1&1\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir f_4, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}2&1&-2\\3&-1&1\\5&0&-1\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir f_1, c_4 y c_5

$$\begin{vmatrix}-2&-1&2\\-1&3&7\\0&7&12\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir f_2, f_3, c_1, c_2 y c_3

Por cierto, era de esperar que todos los menores de orden 3 fueran nulos ¿Por qué?

Menores de orden 4 hay claramente cinco, todos ellos obviamente nulos; he aquí dos ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\2&1&-2&4&5\\3&-1&1&3&7\\5&0&-1&7&12\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&3&-1\\2&1&-2&4\\3&-1&1&3\\5&0&-1&7\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir c_5

$$\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\2&-2&4&5\\3&1&3&7\\5&-1&7&12\end{vmatrix}=0$$ que resulta de suprimir c_2

---

[25] Ver pág. 89 del libro de ed. Anaya.

[26] Según la R.A.E. orlar es añadir algo alrededor de una hoja, párrafo, imagen, etc.

Este ejemplo nos conduce al siguiente resultado:

«El rango de una matriz es igual al orden del mayor menor no nulo de dicha matriz»

Y en este hecho se basa el siguiente

Procedimiento ordenado para hallar el rango de una matriz (Orlando menores):

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{matrix}} & \begin{matrix}3 & -1 & 2\\ -2 & 4 & 5\end{matrix}\\ \begin{matrix}3 & -1\\ 5 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 3 & 7\\ -1 & 7 & 12\end{matrix}\end{pmatrix}$$

1º) Empezamos eligiendo un menor de orden 2 no nulo (p. ej. el recuadrado), que, por tanto, nos garantiza que $\text{rg}\,A\geq 2$, es decir, al menos f_1 y f_2 son l.i.:

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0 \Rightarrow \text{rg}\,A\geq 2$$

(Si todos los menores de orden 2 que pudiéramos formar cubriendo ordenadamente toda la matriz fueran nulos, concluiríamos que $\text{rg}\,A=1$)

2º) Al menor anterior le vamos orlando sucesivamente el resto de columnas y la siguiente fila, es decir, f_3: vamos calculando sucesivamente cada uno de los tres menores de orden 3 posibles, es decir, $|c_1\ c_2\ c_3|$, $|c_1\ c_2\ c_4|$ y $|c_1\ c_2\ c_5|$, y en cuanto encontremos uno de ellos no nulo $\Rightarrow \text{rg}\,A\geq 3$

Ahora bien, si estos tres menores fueran nulos concluiríamos que f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2 y pasaríamos a repetir el procedimiento anterior con f_4: si los tres menores de orden 3 fueran también nulos, como no nos quedan más filas $\Rightarrow \text{rg}\,A=2$; pero si alguno fuera no nulo $\Rightarrow \text{rg}\,A\geq 3$

(En este ejemplo concreto podemos comprobar que los seis menores de orden 3 que podemos formar y que cubren ordenadamente la matriz son todos nulos $\Rightarrow \boxed{\text{rg}\,A=2}$)

3º) Formaríamos los dos menores de orden 4 posibles que cubren ordenadamente la matriz y que resultan de orlar el menor de orden 3 anterior no nulo: si ambos son nulos $\Rightarrow \text{rg}\,A=3$; en caso contrario, y como ya no nos quedan más filas para orlar $\Rightarrow \text{rg}\,A=4$

Observaciones:

1ª) $\text{rg}\ A_{mxn}=\min(m,n)$

Por lo tanto, si por ejemplo la matriz es 4x5 y hemos obtenido que el rg es 4, significa que hay 4 columnas l.i., es decir, cualquier columna es combinación lineal de las cuatro restantes.

2ª) Si, por ejemplo, todos los menores de orden 3 que puedan formarse cubriendo ordenadamente la matriz son nulos, el rango se queda en 2, es decir, por razones obvias de dependencia lineal el rango no puede saltar a 4 (pues todos los menores de orden 4 por fuerza serían nulos).

3ª) El procedimiento es de abajo a arriba, es decir, empezamos estudiando si el rango al menos es 2, y vamos subiendo. Ahora bien, si hay un parámetro en la matriz y hay que estudiar el rango en función de éste se recomienda proceder de arriba abajo, por el motivo que veremos cuando hagamos los ejercicios del final del tema.

4ª) La única matriz de rango 0 es la matriz nula, **O**.

5ª) Para hallar el rango con Derive: RANK[ ]^n + **=**

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1 & 5 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 9 & 2\end{pmatrix}$$

1º) Empezamos eligiendo el menor de orden 2 recuadrado, que, al ser no nulo, nos garantiza que $\operatorname{rg}A \geq 2$, es decir, al menos f_1 y f_2 son l.i.:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}A\geq 2$$

2º) Al menor anterior le vamos orlando sucesivamente el resto de columnas y la siguiente fila, es decir, f_3:

$$|c_1\ c_2\ c_3|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-2+2+1-1=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1 & 5 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 9 & 2\end{pmatrix}$$

$$|c_1\ c_2\ c_4|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=10+1-6-3+5-4\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}A\geq 3$$

(Nótese que ya no es necesario hallar $|c_1\ c_2\ c_5|$; ahora bien, si estos tres menores hubieran sido nulos concluiríamos que f_3 es combinación lineal de f_1 y f_2 y pasaríamos a repetir el procedimiento anterior orlando con f_4).

3º) Calculamos a continuación los dos menores de orden 4 posibles que cubren ordenadamente la matriz y que resultan de orlar el menor de orden 3 anterior no nulo:

$$|c_1\ c_2\ c_3\ c_4|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -2 & 9\end{vmatrix}= \qquad =0$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1 & 5 & 1\\ 2 & 4 & -2 & 9 & 2\end{pmatrix}$$

$$|c_1\ c_2\ c_4\ c_5|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 5 & 1\\ 2 & 4 & 9 & 2\end{vmatrix}= \qquad =9\neq 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{rg}A=4}$$

(Si ambos hubiesen sido nulos $\Rightarrow \operatorname{rg}A=3$)

2º Por Gauss [27] (i.e. por matrices):

3 transformaciones permitidas entre matrices (el rango no varía):

1ª) Podemos permutar 2 filas (o columnas) y el rango de la matriz no varía.

En efecto, si existe combinación lineal, evidentemente el hecho de que permutemos dos filas (o columnas) no va a hacer que ésta desaparezca; simplemente, cambiará de expresión.

2ª) Podemos multiplicar (o dividir) **una fila (o columna) por un número** (≠0) y el rango no varía.

En efecto, si existe combinación lineal, el hecho de que multipliquemos una fila (o columna) por un número (≠0) tampoco va a hacer que ésta desaparezca; en todo caso, cambiará de expresión.

3ª) A una fila (o columna) podemos sumarle (o restarle) **una combinación lineal de las restantes** y el rango no varía.

Ídem.

3 supresiones permitidas en una matriz (el rango no varía):

1ª) Podemos suprimir filas (o columnas) nulas y el rango de la matriz no varía.

En efecto, un vector fila (o columna) formado íntegramente por 0 no puede aportar nada a efectos de combinación lineal.

2ª) Podemos suprimir una fila (o columna) proporcional a otra y el rango no varía.

En efecto, el hecho de que exista una fila (o columna) proporcional a otra no aporta nada al rango de la matriz, es decir, si suprimimos una de las dos (¡No las dos!) evidentemente el rango no variará. Por ejemplo:

$$\text{rg}\begin{pmatrix}-1&3&1&2\\1&1&1&1\\\cancel{5}&\cancel{5}&\cancel{5}&\cancel{5}\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}-1&3\\1&1\end{matrix}}&\begin{matrix}1&2\\1&1\end{matrix}\end{pmatrix}=2 \quad \text{porque} \quad \begin{vmatrix}-1&3\\1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

¡CUIDADO! En general, si hay n filas (o columnas) proporcionales entre sí, se suprimen n–1 (¡no todas!), y nos quedamos con una.

3ª) Podemos suprimir una fila (o columna) que sea combinación lineal de las restantes y el rango no varía.

La razón es análoga a la del caso anterior:

$$\begin{array}{r}\\ \\ f_3=f_1+f_2 \rightarrow\\ f_4=f_2+f_3 \rightarrow\end{array}\text{rg}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\2&1&-2&4&5\\\cancel{3}&\cancel{-1}&\cancel{1}&\cancel{3}&\cancel{7}\\\cancel{5}&\cancel{0}&\cancel{-1}&\cancel{7}&\cancel{12}\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2\\2&1&-2&4&5\end{pmatrix}=2 \quad \text{porque} \quad \begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$$

Por último, a veces se utiliza el hecho de que $\mathbf{rg\,A=rg\,A^t}$, de obvia justificación.

---

[27] Ver pág. 66 del libro de ed. Anaya.

Cálculo del rango por Gauss: **«Mediante las 6 operaciones anteriores hacemos 0 debajo de la diagonal; el rango será entonces igual al nº de elementos no nulos en ella»**

Por ejemplo, supongamos que hemos aplicado las 6 operaciones permitidas y llegamos a la siguiente matriz triangular:

$$\ldots = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

ya que, en efecto, el menor $|c_1\ c_2\ c_3|$ es no nulo. Hay que hacer hincapié en que, a la hora de hacer el recuento final de elementos no nulos sobre la diagonal, hay casos en los que se puede evitar algún 0 a base de permutar columnas. Por ejemplo, supongamos que al aplicar Gauss llegamos a la siguiente matriz:

$$\ldots = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Podríamos concluir equivocadamente que el rango es 2. Ahora bien, si permutamos columnas y seguimos triangularizando la matriz:

$$\ldots = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrows c_4}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{f_3=f_3-2f_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

En cambio, en el siguiente caso:

$$\ldots \underset{\text{suprimimos } f_2 \text{ por ser } \propto \text{a } f_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_2 \leftrightarrows c_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

De todas formas, y como ya comentamos al hablar del cálculo de determinantes, lna desventaja del método de Gauss es que a veces se hace laborioso conseguir un pivote.

3º Método mixto (método práctico): «Se recomienda calcular el rango por menores, pero aplicando, cuando proceda, alguna de las seis operaciones permitidas»

Ejercicios final tema: 50 a 53

Ejercicio PAEG: 3A jun 2007, 3A sept 2004, 3A sept 98, 4B jun 98 ← Rango en función de un parámetro

3B jun 2012 ← teórico + matriz inversa

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 73: 29; págs.. 96 y ss.: 12, 13, 16 a 18 (rango en función de un parámetro); pág. 64: 2 a 5; págs. 73 y ss.: 27 y 28 (dependencia lineal de vectores)

53 EJERCICIOS de DETERMINANTES 2º BACH.

Cálculo de determinantes. Propiedades:

1. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 33 & 55 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

(*Soluc:* ***a)*** *30;* ***b)*** *-66;* ***c)*** *0;* ***d)*** *0;* ***e)*** *0;* ***f)*** *0;* ***g)*** *2;* ***h)*** *-50;* ***i)*** *0;* ***j)*** *0;* ***k)*** *0;* ***l)*** *0*)

2. Hallar el valor del determinante de: **a)** La matriz nula de orden 2 **b)** La identidad de orden 2 **c)** Cualquier matriz diagonal de orden 2 (*Soluc:* ***a)*** *0;* ***b)*** *1;* ***c)*** *el producto de los elementos de la diagonal*)

3. Calcular los siguientes determinantes de orden 3 aplicando la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

(*Soluc:* ***a)*** *-15;* ***b)*** *-36;* ***c)*** *-11;* ***d)*** *0;* ***e)*** *-168;* ***f)*** *385;* ***g)*** *-114;* ***h)*** *3;* ***i)*** *14;* ***j)*** *1000*)

4. Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, utilizar las propiedades de los determinantes para hallar razonadamente:

a) $|2A|$ **b)** $|A^t|$ **c)** $|-5A|$ **d)** $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} b & 3a & c \\ h & 3g & i \\ 2e & 6d & 2f \end{vmatrix}$ **j)** $\begin{vmatrix} a & b-2a & a-c \\ d & e-2d & d-f \\ g & h-2g & g-i \end{vmatrix}$

(*Soluc:* ***a)*** *32;* ***b)*** *4;* ***c)*** *-500;* ***d)*** *4;* ***e)*** *12;* ***f)*** *–4;* ***g)*** *8;* ***h)*** *16;* ***i)*** *24;* ***j)*** *-4*)

5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcular razonadamente el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ *(Soluc: 200)*

6. Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

7. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *(Soluc: todos valen 5)*

8. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

9. Justificar que si A es una matriz cuadrada de orden 3 y k un número real, entonces $\det(kA)=k^3 \det(A)$

10. Justificar, mediante una matriz de orden 3, que $\det A=\det A^t$

11. Resolver el problema 22 de los ejercicios del tema anterior mediante determinantes
(Ayuda: aplicar que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes)

12. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$\textbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{b)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: Previamente hacer ceros debajo de la diagonal) *(Soluc: **a)** x=±1; **b)** x=b, x=c)*

13. ***(S)*** Resolver la ecuación $\det(A-x\mathbb{1})=0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, $\mathbb{1}$ la matriz unidad de dimensión 3 y $x\in\Re$ la incógnita. *(Soluc: x=0, x=1, x=4)*

14. Calcular por **Gauss** (es decir, haciendo ceros bajo la diagonal) los siguientes determinantes:

$$\textbf{a)}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&-1&1\end{vmatrix}\quad \textbf{b)}\begin{vmatrix}1&3&2&1\\3&5&3&2\\3&6&3&2\\6&4&5&3\end{vmatrix}\quad \textbf{c)}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&x&1&1\\-1&-1&x&1\\-1&-1&-1&x\end{vmatrix}\quad \textbf{d)}\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\quad \textbf{e)}\begin{vmatrix}3&2&2&1\\1&1&1&2\\4&3&1&3\\4&3&0&2\end{vmatrix}\quad \textbf{f)}\begin{vmatrix}3&2&2&4\\0&-1&5&1\\2&1&3&2\\4&3&2&6\end{vmatrix}$$

$$\textbf{g)}\begin{vmatrix}3&2&2&4\\0&-1&5&1\\2&1&3&2\\4&3&2&6\end{vmatrix}\quad \textbf{h)}\begin{vmatrix}3&-2&4&0\\0&-1&10&6\\5&0&-2&5\\-1&2&4&6\end{vmatrix}\quad \textbf{i)}\begin{vmatrix}1&20&5&1\\-4&-12&0&6\\2&0&5&15\\0&3&2&-1\end{vmatrix}\quad \textbf{j)}\begin{vmatrix}13&2&15&1\\1&-1&1&6\\2&7&-2&5\\9&0&4&0\end{vmatrix}\quad \textbf{k)}\begin{vmatrix}10&6&0&-1\\-1&-3&0&0\\0&1&5&-5\\-5&13&12&0\end{vmatrix}\quad \textbf{l)}\begin{vmatrix}1&0&1&-1\\1&1&1&1\\-1&2&1&-1\\0&1&2&1\end{vmatrix}$$

(*Sol:* ***a)*** *8;* ***b)*** *-2;* ***c)*** $(x+1)^3$; ***d)*** *48;* ***e)*** *2;* ***f)*** *-3;* ***g)*** *140;* ***h)*** *364;* ***i)*** *-4254;* ***j)*** *-2098;* ***k)*** *-1312;* ***l)*** *10*)

15. Calcular por el método más conveniente (preferentemente por **Laplace**, haciendo ceros previamente):

$$\textbf{a)}\begin{vmatrix}2&3&-2&4\\3&-2&1&2\\3&2&3&4\\-2&4&0&5\end{vmatrix}\quad \textbf{b)}\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\2&3&2&-2\\2&4&2&1\\3&1&5&-3\end{vmatrix}\quad \textbf{c)}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&1\\0&0&1&1\\3&4&1&2\end{vmatrix}\quad \textbf{d)}\begin{vmatrix}5&1&2&2\\6&-3&5&1\\7&-1&1&6\\8&-1&1&7\end{vmatrix}\quad \textbf{e)}\begin{vmatrix}2&3&-5&4\\-2&4&7&3\\3&2&-3&-5\\4&-3&4&-2\end{vmatrix}\quad \textbf{f)}\begin{vmatrix}4&-3&5&-2&3\\5&6&6&4&5\\2&3&5&3&2\\4&4&7&4&4\\3&3&6&3&3\end{vmatrix}$$

$$\textbf{g)}\begin{vmatrix}2&1&0&-2\\1&-1&1&3\\0&2&1&-1\\-1&4&0&2\end{vmatrix}\quad \textbf{h)}\begin{vmatrix}1&1&0&1&0\\0&-2&0&0&3\\-1&0&2&1&1\\1&1&0&4&2\\3&1&1&0&1\end{vmatrix}\quad \textbf{i)}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&3\\0&4&1\end{vmatrix}\quad \textbf{j)}\begin{vmatrix}2&0&-1&1\\0&1&0&2\\1&1&1&-1\\1&3&2&0\end{vmatrix}\quad \textbf{k)}\begin{vmatrix}2&-2&7&4\\-4&-4&3&6\\-2&0&5&-6\\-4&-6&15&4\end{vmatrix}\quad \textbf{l)}\begin{vmatrix}1&-1&-1&0\\2&-2&1&1\\0&0&2&-1\\-1&2&1&3\end{vmatrix}$$

(*Sol:* ***a)*** *-286;* ***b)*** *-72;* ***c)*** *0;* ***d)*** *2;* ***e)*** *1899;* ***f)*** *6;* ***g)*** *-52;* ***h)*** *7;* ***i)*** *-10;* ***j)*** *-2;* ***k)*** *0;* ***l)*** *-5*)

16. ***(S)*** Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix}10&10&10\\5a&5b&5c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$

(*Soluc:* $50(b-a)(c-a)(c-b)$)

17. ***(S)*** Calcular:

$$\begin{vmatrix}abc&-ab&a^2\\-b^2c&2b^2&-ab\\b^2c^2&-b^2c&3abc\end{vmatrix}$$

(Ayuda: extraer previamente factores del determinante) (*Soluc:* $2a^2b^4c^2$)

18. ***(S)*** Calcular:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1+a&1&1&1\\1&1+b&1&1\\1&1&1+c&1\end{vmatrix}$$

(Ayuda: hacer ceros en la uª columna) (*Soluc:* $-abc$)

19. ***(S)*** Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la uª fila las restantes, y después sacando factor común)

(Soluc: $3(x+1)(3-x)^3$)

20. ***(S)*** Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la 4ª fila las demás, y extrayendo factor común) *(Soluc: 4a+1)*

21. ***(S)*** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: hacer ceros debajo de la diagonal, factorizando los polinomios que vayamos obteniendo, para así poder sacar factores comunes) *(Soluc: x=1)*

22. Resolver la siguiente ecuación, sabiendo que una solución es $x=-(a+b+c+d)$:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: sumar a la 1ª col. las otras, y después sacar factor común)

(Soluc: las otras raíces son x=a, x=b, x=c y x=d)

Matriz inversa:

23. Definir matriz inversa. Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices, y **comprobar** el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(Sol: ***a)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ***c)*** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; ***d)*** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; ***e)*** $\nexists$; ***f)*** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ***g)*** $\nexists$; ***h)*** $\begin{pmatrix} 1/2 & -2 & -1/2 \\ -7/8 & 17/4 & 11/8 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$; ***i)*** *no se puede)*

24. Calcular, para los valores del parámetro **a** que lo haga posible, la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Soluc: para a≠5 existe inversa)

25. Averiguar para qué valores del parámetro **t**, la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para t=2, si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

(Soluc: para t=1 o t=3 no tiene inversa)

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro **m** existe A^{-1} *(Soluc:* $\exists A^{-1} \; \forall m$*)*

b) Hallar dicha inversa para m=1

27. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de **a** y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$$

28. ***(S)*** Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$

29. ***(S)*** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz *simétrica* P no singular tal que $B=P^{-1}AP$

30. ***(S)*** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de **a** y **b** la matriz A tiene inversa? Determinar la matriz A^{-1}.

(Soluc: para a≠0 y b≠0 $\exists A^{-1}$*)*

31. ***(S)*** Determinar para qué valor o valores de **x** tiene inversa la matriz

$$\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

y calcularla en función de **x**. *(Soluc: para* $x\neq 0$ existe inversa)

32. Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases A, B y C, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:

	Peso (g)	**Precio (€)**
A	250	1
B	500	1,80
C	1000	3,30

A una farmacia se le ha suministrado 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 € ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia? (Obligatorio utilizar matrices).

(Soluc: 2 tipo A, 2 tipo B, 1 tipo C)

33. ***(S)*** Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2+2A+\mathbb{I}=0$, comprobar que A es invertible.

34. Demostrar que $|A^{-1}| = 1/|A|$

Ecuaciones matriciales:

35. ***(S)*** Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

36. ***(S)*** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar una matriz X tal que A·X+B=A

37. ***(S)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

38. ***(S)*** Resolver la ecuación matricial X·A=B+C, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

39. Resolver la ecuación matricial AX+B=C, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

40. Resolver la ecuación matricial AB=XC siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}_{3x2}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}_{2x3}\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&3&0\\3&-1&1\end{pmatrix}_{3x3}$$

41. Resolver la ecuación matricial ***A·X·A = B*** siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&3&3\\1&0&-1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

42. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}5&4&-1\\-2&3&3\\1&6&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\3&0&1\end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz inversa de A–𝟙, siendo 𝟙 la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial XA–2B=X

43. Resolver la ecuación matricial CX+AB=C siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-2&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&3&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

44. Resolver la ecuación matricial AX–BCX=A siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

45. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial **ABX–CX=2C**

46. Resolver la ecuación matricial A^2X–B=A^2 siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(Ayuda: calcular primero A^2 y renombrarla como C)

47. ***(S)*** Resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

48. Despejar X en las siguientes ecuaciones matriciales:

a) AX=B *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot B$]*

b) XA=B *[Soluc: $X= B\cdot A^{-1}$]*

c) AX–B=A *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot(A+B)= \mathbb{I}+A^{-1}\cdot B$]*

d) BXB=C *[Soluc: $X=B^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$]*

e) AXB=C *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$]*

f) XA=B–A *[Soluc: $X=(B-A)\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}-\mathbb{I}$]*

g) CX+2B=A *[Soluc: $X=C^{-1}\cdot(A-2B)$]*

h) XA–3B=X *[Soluc: $X=3B\cdot D^{-1}$ donde $D=A-\mathbb{I}$]*

i) BX+AB=C *[Soluc: $X=B^{-1}\cdot(C-AB)$]*

j) AX+C=BCX *[Soluc: $X=D^{-1}\cdot C$ donde $D=BC-A$]*

k) ABX+2C=CX *[Soluc: $X=D^{-1}\cdot 2C$ donde $D=C-AB$]*

l) $AX+B^2=C$ *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot(C-B^2)$]*

m) $A^2X=BC$ *[Soluc: $X=D^{-1}\cdot BC$ donde $D=A^2$]*

n) $AX-B^3C=A$ *[Soluc: $X=A^{-1}\cdot(A+B^3\cdot C)= \mathbb{I}+A^{-1}B^3C$]*

49. TEORÍA: **a)** ¿Existe la división de matrices? ¿Cuál es, entonces, la forma de despejar la matriz **X** en una expresión de la forma

$$\mathbf{A\cdot X+B=C}$$

, donde **A** y **B** son matrices?

b) Si una matriz **A** tiene inversa, ¿cuál es la relación entre $|A^{-1}|$ y $|A|$?

c) Comprobar que

$$\boxed{{}^{t}\mathrm{Adj}(A)=\mathrm{Adj}(A^{t})}$$

es decir, la traspuesta de la adjunta es la adjunta de la traspuesta. Utilizar una matriz cuadrada de orden 3.

d) Probar que

$$\boxed{\det\left[{}^{t}\mathrm{Adj}(A)\right]=\left[\det(A)\right]^{n-1}}$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n.

e) Comprobar, utilizando matrices cuadradas de orden 3:

$$\boxed{(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}}$$

Rango de una matriz. Independencia lineal:

50. Definir rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $D=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 10 & -2 & 4 & 6 \\ 15 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ **e)** $E=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ **g)** $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **h)** $H=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **i)** $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **j)** $J=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

k) $K=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ **l)** $L=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **m)** $M=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -5 \\ -8 & 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$ **n)** $N=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

o) $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **p)** $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ **q)** $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

*(Soluc: **a)** rgA=3; **b)** rgB=2; **c)** rgC=3; **d)** rgD=1; **e)** rgE=2; **f) rgF=**2; **g)** rgG=2; **h)** rgH=1; **i)** rgI=3; **j)** rgJ=3; **k)** rgK=2; **l)** rgL=2; **m)** rgM=1; **n)** rgN=3; **o)** rgO=0; **p)** rgP=2)*

51. Calcular, según los valores del parámetro **a**, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 2a & a \\ 0 & a & 3a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} a & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & a & 3 & a-1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & a-2 & 4 & a & 4 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & a & -3 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ a & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & a+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

*(Soluc: **a)** a≠1 y a≠-2⇒ rg=3; a=1⇒ rg=1; a=-2⇒ rg=2; a≠0 y a≠3/5⇒ rg=3; **b)** a=0⇒ rg=1; a=3/5⇒ rg=2; **c)** rg=3 ∀ a; **d)** a≠2 y a≠3⇒ rg=4; a=2 o a=3⇒ rg=3; **e)** a≠3⇒ rg=3; a=3⇒ rg=2; **f)** rg=3 ∀ a; **g)** a≠2⇒ rg=4; a=2⇒ rg=3; **h)** a≠2⇒ rg=4; a=2⇒ rg=3)*

52. Calcular el rango de los siguientes vectores fila. Caso de ser linealmente dependientes, hallar una relación de dependencia:

u=(2,1,7,3)
v=(1,1,3,0)
w=(1,–4,8,15)

(Ayuda: aplicar Gauss) *(Soluc: rg=2; -5**u**+9**v**+**w**=0)*

53. Explicar por qué si en un conjunto de vectores está el $\vec{0}$, entonces son linealmente dependientes. Poner un ejemplo.

DISCUSIÓN y RESOLUCIÓN de

SS.EE.LL.

El alemán Ferdinand Georg ***Frobenius*** *(1849-1917), quien completó el enunciado y demostración del teorema formulado en 1875 por el francés Eugène* ***Rouché*** *(1832-1910)*

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I. INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES [1]

Concepto de SS.EE.LL.: Conviene recordar qué era un sistema de ecuaciones lineales (abreviado, SS.EE.LL.), algo ya visto en cursos anteriores. Por ejemplo, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$$

es un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (abreviadamente, 2x2). Su solución es única, como puede comprobarse: x=1, y=2. Nótese que la solución, aunque única, está formada por una pareja de números (¡No son dos soluciones!). Un sistema tal con solución única recibe el nombre de **compatible determinado**. El adjetivo lineal se aplica porque las incógnitas no aparecen elevadas a un exponente, ni multiplicadas entre sí, ni dividiendo, ni dentro de una raíz, etc, sino formando lo que en temas anteriores hemos definido como una combinación lineal[2].

Por su parte, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ -4x-6y=-16 \end{array}\right\}$$

puede comprobarse que tiene ∞ soluciones, no sólo la x=1, y=2 anterior, sino también x=4, y=0; x=7, y=-2; x=-2, y=4, etc. Un sistema con ∞ soluciones se llama **compatible indeterminado**. La razón, recuérdese, salta a la vista: la 2ª ecuación (en adelante, E_2) es proporcional a la 1ª (E_1), por lo que puede eliminarse, quedando E_1, ecuación con 2 incógnitas, que obviamente se satisfará para ∞ pares x, y.

Finalmente, puede comprobarse que

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ -4x-6y=10 \end{array}\right\}$$

carece de solución, ya que si simplificamos E_2:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=8 \\ 2x+3y=-5 \end{array}\right\}$$

vemos que es imposible que una misma expresión sea a la vez igual a dos números diferentes. Un sistema que carece de solución se llama **incompatible**.

Cuadro resumen[3]:

$$\begin{array}{c}\text{TIPOS DE SISTEMAS}\\ \text{(desde el p. de v. del}\\ \text{nº de soluciones)}\end{array} \begin{cases} \text{COMPATIBLE: Tiene solución} \begin{cases} \text{DETERMINADO: solución única} \\ \text{INDETERMINADO: } \infty \text{ soluciones} \end{cases} \\ \text{INCOMPATIBLE: No tiene solución} \end{cases}$$

---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 30 y 31 del libro de ed. Anaya.

[2] Por ejemplo, el siguiente sistema sería no lineal:

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2+3xy=8 \\ \frac{1}{x}-\sqrt{y}=-1 \end{array}\right\}$$

[3] Ver pág. 32 del libro de ed. Anaya.

Recordamos de cursos pasados que en principio había tres métodos para resolver este tipo de sistemas: sustitución, igualación y reducción. Nosotros este curso vamos a utilizar el método de reducción; en concreto un caso particular, llamado **método de Gauss** (lo veremos en este apartado). Además, también veremos un método mejor, la **regla de Cramer** (apdo III), que utiliza determinantes. Por otra parte, los sistemas que abordaremos habitualmente serán 3x3.

Notación matricial de un SS.EE.LL.[4]: Sea un SS.EE.LL. 3x3 genérico:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{aligned}\right\}$$

Es obvio comprobar que dicho sistema puede expresarse en notación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

M=matriz de coeficientes, o del sistema

X=matriz de incógnitas

B=matriz de términos independientes

Es decir, **MX=B**. Si la matriz de coeficientes o **matriz del sistema, M**, la orlamos con la columna de términos independientes se obtiene la llamada **matriz ampliada, M***, que va a jugar un papel fundamental a lo largo del tema:

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \qquad M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3\end{array}\right)$$

M=matriz de coeficientes, o del sistema

M*=matriz ampliada

Expresar un sistema en forma matricial tiene gran utilidad, pues permite resolverlo, en ciertos casos, utilizando la matriz inversa:

Ejemplo 1: Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x+y+z=4\\ 5x+2y+3z=6\\ x+z=0\end{aligned}\right\}$$

Lo expresamos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\\ 6\\ 0\end{pmatrix}$$

es decir, $MX=B \Rightarrow M^{-1}MX=M^{-1}B \Rightarrow \mathbb{1}\,X=M^{-1}B \Rightarrow \boxed{X=M^{-1}B}$

---

[4] Ver pág. 113 del libro de ed. Anaya.

Calculemos, por tanto, M^{-1}, la inversa de la matriz del sistema:

$$M=\begin{pmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow |M|= \qquad\qquad \Rightarrow \exists M^{-1} \Rightarrow \text{ El sistema tiene solución única (comp. dtdo.)}$$

$$M=\begin{pmatrix}\overset{+}{3}&\overset{-}{1}&\overset{+}{1}\\\overset{-}{5}&\overset{+}{2}&\overset{-}{3}\\\overset{+}{1}&\overset{-}{0}&\overset{+}{1}\end{pmatrix} \left\{\begin{array}{lll} M_{11}= & M_{12}=- & M_{13}= \\ M_{21}=- & M_{22}= & M_{23}=- \\ M_{31}= & M_{32}=- & M_{33}= \end{array}\right\} Adj(M)=$$

$$\longrightarrow {}^{t}Adj(M)= \qquad \longrightarrow M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot{}^{t}Adj(M)= \qquad \longrightarrow X=M^{-1}\cdot B=$$

Ejercicios final tema: 1

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 113: 1 y 2; pág. 120 y ss.: 13, 14 y 20 (Expresar y resolver en forma matricial)

Reseña histórica: Como vimos en el tema anterior, el italiano Gerolamo **Cardano** (1501-1576) utilizó determinantes en 1545 para la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. El alemán Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646-1716) hizo lo propio en 1693 en relación con los sistemas de ecuaciones lineales de mayor orden. En 1748, en un tratado póstumo de álgebra del escocés Colin MacLaurin (1698-1746) aparece la regla para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuando n es 2, 3 o 4 mediante el uso de determinantes. En 1750, el suizo Gabriel **Cramer** (1704-1752) da la regla para el caso general, aunque no ofrece demostración alguna.

En 1875 el francés Eugène **Rouché** (1832-1910) enunció el famoso teorema sobre la existencia de soluciones de un SS.EE.LL. Posteriormente, varios matemáticos se disputaron su demostración, aunque fue el alemán Ferdinand Georg **Frobenius** (1849-1917) quien completó su enunciado y demostración, zanjando el tema.

Método de Gauss[5] de resolución de SS.EE.LL.: Es similar al procedimiento visto en el tema anterior para resolver determinantes o hallar el rango de una matriz, mediante la aplicación de las 6 operaciones reseñadas en su día. Ahora bien, conviene matizar dichas operaciones, pues en el tema anterior aludían a filas o columnas, mientras que aquí sólo pueden referirse a ecuaciones (es decir, filas); evidentemente, y por ejemplo, no tiene sentido permutar columnas, pues se alteraría el sistema. Por tanto, el método de Gauss es un método de reducción. Las operaciones permitidas para lograr **sistemas equivalentes, es decir, que tengan la misma solución**, son:

3 transformaciones permitidas entre sistemas (i.e. para obtener un sistema equivalente):

1ª) Podemos permutar 2 ecuaciones del sistema para obtener un sistema equivalente.

En efecto, el hecho de que permutemos dos ecuaciones no va a hacer que cambien las soluciones del sistema.

2ª) Podemos multiplicar (o dividir) **cualquier ecuación del sistema por un número** (≠0) para lograr un sistema equivalente.

---

[5] Carl Friedrich Gauss (1777-1855), físico y matemático alemán, apodado “El Príncipe de las Matemáticas”. Se puede profundizar sobre este método en las págs.. 36-38 y 39 del libro de ed. Anaya.

En efecto, el hecho de que multipliquemos una ecuación por un número (≠0) tampoco va a hacer que cambie su solución; en todo caso, cambiará el aspecto del sistema.

3ª) **A una ecuación podemos sumarle** (o restarle) **una combinación lineal de las restantes** y el sistema seguirá siendo equivalente.

Ídem.

3 supresiones permitidas en un sistema (el sistema resultante será equivalente):

1ª) **Podemos suprimir ecuaciones nulas** y el sistema resultante será equivalente al anterior.

En efecto, si al aplicar las transformaciones permitidas obtenemos en un momento dado una expresión 0=0, dicha expresión no aporta nada, será espuria.

2ª) **Podemos suprimir una ecuación proporcional a otra**, resultando así un sistema equivalente.

En efecto, el hecho de que exista una ecuación proporcional a otra no aporta nada al sistema, es decir, si suprimimos una de las dos (¡No las dos!) evidentemente no variará su solución.

3ª) **Podemos suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las restantes**.

La razón es análoga a la del caso anterior:

Método de Gauss: «Mediante las 6 operaciones anteriores hacemos 0 debajo de la diagonal, hasta transformar el sistema en triangular inferior; en ese momento podemos empezar a resolverlo fácilmente, normalmente de abajo a arriba»

Ejemplo 2: Resolvamos el sistema del ejemplo anterior, esta vez por Gauss. Tenemos que empezar permutando E1 y E3 para conseguir un pivote (x o –x) en la posición inicial:

$$\left.\begin{matrix}3x+y+z=4\\5x+2y+3z=6\\x+z=0\end{matrix}\right\}\xrightarrow[E_1\leftrightarrows E_3]{}\left.\begin{matrix}\enclose{circle}{x}+z=0\\5x+2y+3z=6\\3x+y+z=4\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\substack{E_2=E_2-5E_1\\E_3=E_3-3E_1}]{}\left.\begin{matrix}x+z=0\\2y-2z=6\\y-2z=4\end{matrix}\right\}\xrightarrow[E_2\leftrightarrows E_3]{}\left.\begin{matrix}x+z=0\\\enclose{circle}{y}-2z=4\\2y-2z=6\end{matrix}\right\}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3-2E_2]{}\left.\begin{matrix}x+z=0\\\enclose{circle}{y}-2z=4\\2z=-2\end{matrix}\right\}\longrightarrow\boxed{z=-1}\xrightarrow{\substack{\text{sustituimos}\\\text{en }E_2}}y+2=4;\boxed{y=2}\xrightarrow{\substack{\text{sustituimos}\\\text{en }E_1}}x-1=0;\boxed{x=1}$$

En la práctica este procedimiento se realiza de forma más cómoda y rápida en forma matricial, prescindiendo de las incógnitas, es decir, con la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&4\\5&2&3&6\\1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[E_1\leftrightarrows E_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c}\enclose{circle}{1}&0&1&0\\5&2&3&6\\3&1&1&4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{E_2=E_2-5E_1\\E_3=E_3-3E_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&-2&6\\0&1&-2&4\end{array}\right)\xrightarrow[E_2\leftrightarrows E_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&\enclose{circle}{1}&-2&4\\0&2&-2&6\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[E_3=E_3-2E_2]{}\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&\enclose{circle}{1}&-2&4\\0&0&2&-2\end{array}\right)\\\begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\x&y&z\end{array}\end{array}\longrightarrow 2z=-2;\boxed{z=-1}\xrightarrow{\substack{\text{sustituimos}\\\text{en }E_2}}y+2=4;\boxed{y=2}\xrightarrow{\substack{\text{sustituimos}\\\text{en }E_1}}x-1=0;\boxed{x=1}$$

Observaciones: 1ª) Si tras aplicar las 6 transformaciones/supresiones permitidas llegamos a algo del siguiente estilo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow 0x+0y+0z=2;\ 0=2 \text{ !! } \Rightarrow \textbf{INCOMPATIBLE}$$

2ª) Recordar que, como ya se ha indicado, si obtenemos dos ecuaciones iguales o proporcionales podemos suprimir una de ellas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{5} \end{array}\right)$$

Por lo tanto tendremos más incógnitas que ecuaciones, de forma que al despejar cada incógnita tendremos que expresar la solución en función de una de ellas, es decir, de un parámetro ⇒ ∞ soluciones ⇒ **COMPATIBLE INDETERMINADO**

II. DISCUSIÓN de un SS.EE.LL.: TEOREMA de ROUCHÉ-FROBENIUS [6]

Teorema de Rouché-Frobenius[7]: Vamos a enunciarlo, por comodidad, para un sistema 3x3 –su formulación para un sistema más general, mxn, sería análoga–; supongamos un SS.EE.LL. 3x3 genérico:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{array}\right\}$$

Recordar del apartado anterior que si expresamos dicho sistema en forma matricial, tenemos:

M*=matriz ampliada $\longrightarrow$

$$M^* = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}_{\text{M=matriz de coeficientes, o del sistema}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \end{array}\right)$$

El teorema de Rouché-Frobenius indica la posible existencia y nº de soluciones del sistema:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \boxed{\begin{array}{l} \text{rg}\,M=\text{rg}\,M^* \\ \text{rg}\,M=\text{rg}\,M^* \end{array}} \begin{array}{l} =\text{nº incógnitas} \\ <\text{nº incógnitas} \end{array} & \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{array}{l} \textbf{COMP. DTDO.} \\ \textbf{COMP. INDTDO.} \end{array} \\ \text{rg}\,M\neq\text{rg}\,M^* & \Rightarrow & \textbf{INCOMPAT.} \end{array}}$$

---

[6] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 102-103 y 109-110 del libro de ed. Anaya.

[7] Como ya hemos indicado en la introducción, en 1875 el francés Eugène **Rouché** (1832-1910) enunció este teorema. Posteriormente, varios matemáticos se disputaron su demostración, aunque fue el alemán Ferdinand Georg **Frobenius** (1849-1917) quien completó su enunciado y demostración, zanjando el tema.

Observaciones: 1ª) Ver la demostración en la pág. 102 del libro de ed. Anaya

2ª) Nótese que la **condición de compatibilidad** de un sistema, es decir, la condición para que tenga solución, es la recuadrada en trazo fino:

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M^{*} \quad \textbf{CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD}$$

3ª) $\operatorname{rg} M \le \operatorname{rg} M^{*} \le$ nº incógnitas $\Rightarrow$ "si $\operatorname{rg} M$ alcanza su valor máximo, entonces coincide con $\operatorname{rg} M^{*}$"

4ª) En el caso de un sistema compatible indeterminado, el nº de parámetros que aparecen viene dado por:

$$\text{nº parámetros} = \text{nº incógnitas} - \operatorname{rg} M$$

5ª) Utilidad del teorema de Rouché-Frobenius: Permite saber cómo son las soluciones de un sistema sin necesidad de resolverlo. Esto, como veremos más adelante, será particularmente útil en Geometría. Por cierto, a la hora de discutir un sistema –es decir, estudiar cómo van a ser sus soluciones–, se recomienda estudiar el rango por determinantes, no por Gauss.

Ejemplo 3:

a) Aunque ya sabemos que, por tener solución única, va a resultar compatible determinado, vamos a discutir el sistema del ejemplo anterior, para ilustrar sobre el procedimiento:

$$M^{*}=\left(\begin{array}{c:c}\underbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}3&1\\5&2\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\\\begin{matrix}1&0\end{matrix}&1\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}4\\6\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}M \ge 2$$

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_3:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{vmatrix}=6+3-2-5\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}M=3=\operatorname{rg}M^{*}=\text{nº incógnitas}\Rightarrow \textbf{sist. comp. dtdo.}$$

b) Discutamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}3x+y+z=4\\5x+2y+3z=6\\2x+y+2z=2\end{array}\right\}\longrightarrow M^{*}=\left(\begin{array}{c:c}\underbrace{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}3&1\\5&2\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\\\begin{matrix}2&1\end{matrix}&2\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}4\\6\\2\end{matrix}\end{array}\right)$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}M \ge 2$$

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_3:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\2&1&2\end{vmatrix}=12+6+5-4-9-10=0\Rightarrow \operatorname{rg}M=2$$

¿rg M*?

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_4:

$$|c_1\,c_2\,c_4|=\begin{vmatrix}3&1&4\\5&2&6\\2&1&2\end{vmatrix}=12+12+20-16-10-18=0\Rightarrow \operatorname{rg}M^{*}=2$$

Por lo tanto, $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*=2<$ nº incógnitas $=3\Rightarrow$ **sist. comp. indtdo.** (uniparamétrico)

(En el próximo apdo. veremos cómo resolverlo por Cramer; baste adelantar que si $\text{rg}\,M^*=2$, significa que sobra una de las ecuaciones, por ser combinación lineal de las otras; por lo tanto, podríamos eliminar, p. ej., E_3, y obtendríamos más incógnitas que ecuaciones, es decir, habría que expresar las soluciones en función de una de las incógnitas, que se llamaría parámetro).

c) Finalmente, discutamos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=4 \\ 5x+2y+3z=6 \\ x\qquad -z=1 \end{array}\right\} \longrightarrow M^{*}=\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}3&1\\5&2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\3\end{matrix} \\ \begin{matrix}1&0\end{matrix} & -1 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix}4\\6\\1\end{matrix} \end{array}\right)$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}M\geq 2$$

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_3:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&-1\end{vmatrix}=-6+3-2+5=0\Rightarrow \text{rg}M=2$$

¿rg M*****?

Orlamos el menor de orden 2 anterior con c_4:

$$|c_1\,c_2\,c_4|=\begin{vmatrix}3&1&4\\5&2&6\\1&0&1\end{vmatrix}=6+6-8-5\neq 0\Rightarrow \text{rg}M^*=3$$

Por lo tanto, $\text{rg}\,M=2\neq\text{rg}\,M^*=3\Rightarrow$ **sist. incompatible** ($\nexists$ soluc)

III. RESOLUCIÓN de SS.EE.LL: REGLA de CRAMER [8]

Para poder aplicar el método que vamos a explicar a continuación el sistema ha de ser «tipo Cramer»:

Sistema «tipo Cramer»: «Es aquel SS.EE.LL. que verifica las siguientes dos condiciones:

1ª) nº ecuaciones = nº incógnitas (i.e. sistema cuadrado)

2ª) $\det M\neq 0$».

NOTA: Si $\det M=0\Rightarrow$ Alguna ecuación es combinación lineal de las otras (i.e. esa ecuación "sobra"); por lo tanto, basta con detectar dicha ecuación, eliminarla y, normalmente, pasar una de las incógnitas como parámetro al otro miembro, con lo que el sistema pasará a ser tipo Cramer.

La regla de Cramer permite obtener la solución de un SS.EE.LL. de forma sencilla, mediante el cálculo de una serie de determinantes; su enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}{|M|};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{|M|};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}}{|M|}$$

---

[8] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 104 a 107 del libro de ed. Anaya.

Observaciones: **1ª)** Ver la demostración en la pág. 105 del libro de ed. Anaya

2ª) Para sistemas de orden 2, o ≥ 4, las fórmulas serían análogas.

3ª) Obviamente, si el sistema lo hemos discutido por menores, es decir, por determinantes, lo resolveremos por Cramer; ahora bien, si lo hemos discutido por matrices, esto es, por Gauss, lo resolveremos también por Gauss.

4ª) A la hora de pasar al otro miembro una de las incógnitas como parámetro con el fin, como ya hemos indicado en la última nota, de convertir el sistema en tipo Cramer, tenemos que cerciorarnos de que el nuevo sistema es efectivamente tipo Cramer, es decir, $|M| \neq 0$.

Ejemplo 4: Vamos a resolver por Cramer el sistema del ejemplo anterior; para ello, lo más cómodo es verlo en forma matricial:

$$M^{*}=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{matrix}}_{M} & \begin{matrix}4\\6\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Vemos que tiene igual nº de ecuaciones e incógnitas, y falta ver si $|M| \neq 0$ para ver si es tipo Cramer:

$$|M|=\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&3\\1&0&1\end{vmatrix}=6+3-2-5=2\neq 0 \Rightarrow \text{tipo Cramer}$$

Por tanto, podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4&1&1\\6&2&3\\0&0&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{8-6}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3&4&1\\5&6&3\\1&0&1\end{vmatrix}}{2}=\frac{18+12-6-20}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}3&1&4\\5&2&6\\1&0&0\end{vmatrix}}{2}=\frac{6-8}{2}=\frac{-2}{2}=\boxed{-1}$$

Ejercicios final tema: 2 a 26 (discutir y resolver, sin parámetro)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 34: 1 y2; pág. 35: 3; pág. 38: 1 y 2; pág. 39: 1 y 2; pág. 44 y ss.: 1 a 22 (método de Gauss)
pág. 103: 1 y 2; pág. 104: 1 y 2; pág. 107: 1; pág. 119: 1 a 3 (Gauss o Cramer)
pág. 45: 23 a 32 (problemas de planteamiento)

IV. SISTEMAS HOMOGÉNEOS [9]

Es aquel que tiene todos sus términos independientes 0:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0\end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad M^{*}=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}}_{M} & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Características: **1ª)** Es inmediato comprobar que siempre va a tener la solución (0,0,0), llamada **solución trivial**. Este es el caso compat. dtdo. $\Rightarrow$ $\operatorname{rg} M=\operatorname{rg} M^{*}=3=$ nº incógnitas $\Rightarrow$ $|M|\neq 0$

---

[9] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 108 del libro de ed. Anaya.

2ª) Por lo tanto, para que el sistema sea compatible indeterminado tendremos que imponer $|M|=0$, para que $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*<3=$ nº incógnitas (NOTA: Es obvio que en este tipo de sistemas siempre va a ser $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*$)

3ª) Como ya hemos observado, siempre va a ser $\text{rg}\,M=\text{rg}\,M^*$ $\Rightarrow$ un sistema homogéneo nunca puede ser incompatible

Ejercicios final tema: 27 a 30 (sistemas homogéneos)
31 a 43 (sistemas con parámetro)
44 a 47 (homogéneos con parámetro)
48 a 55 (problemas de planteamiento de sistemas)

Ejercicios PAEG: 1A jun 97; 1A sept 97; 1B sept 99; 3B sept 2001; 2B jun 2002; 4B sept 2002; 2B sept 2003; 3B jun 2004; 3A jun 2005; 3A sept 2005; 3B jun 2006; 3B sept 2006; 2B jun 2000; 3A jun 2010; 3B jun 2008; 3B sept 2010; 3B sept 2009; 3B sept 2012; 3A jun 2012; 3B sept 2011; 3B jun 2011; 3A sept 2007 (+ Rouché-Frobenius teórico) ← sistemas con parámetro

3B jun 2007; 3B sept 2008; 3B sept 2006; 3A sept 2011 (+ rango matriz) ← homogéneos con parámetro

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 108: 1 y 2; pág. 119: 5 (sistemas homogéneos)
pág. 110: 1 y 2; pág. 119 y ss.: 4, 6, 8, 15 a 19, 26, 27, 33, 43 a 46 (sistemas con parámetro)
pág. 119: 7 (homogéneos con parámetro)

55 EJERCICIOS de SISTEMAS de ECUACIONES 2º BACH.

Sistemas en forma matricial:

1. Expresar y resolver en forma matricial los sistemas de los ejercicios 4, 5, 6… de esta hoja.

Discusión y resolución de sistemas (sin parámetro):

2. Enunciar la regla de Cramer para un sistema 3x3. Aplicarla a la resolución –previa discusión por Rouché-Fröbenius– del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

(Soluc: comp. dtdo.; x=1, y=–2, z=3)

3. Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius. Aplicarlo a la discusión del sistema que figura a continuación. Posteriormente, resolverlo por el método deseado (Gauss o Cramer):

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ 3x-y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: comp. indtdo.; x=–2+ λ, y=–5+ λ, z= λ)

- Discutir y resolver los siguientes SS.EE.LL., e indicar de qué tipo se tratan:

4.
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=4, y=5, z=2)

5.
$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=4, y=2, z=5)

6.
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=–2, z=3)

7.
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=2, z=3)

8.
$$\left.\begin{array}{l} x+y-z+t=-8 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=–2, z=3, t=–4)

9.
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=2 \\ 2x-y-z-2t=5 \\ 3x+2y+3z-t=20 \\ -x+y-z+2t=-10 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=2, z=3, t=–4)

10.
$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x+2y-3z=-4 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

11.
$$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=-5 \\ 6x-5y=-9 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=3)

12.
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12\\ y + z = 8\\ x + z = 6 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=5, y=7, z=1)

13.
$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 3\\ \quad 2y + 3z = 15\\ 3x + y = 12 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=3, y=3, z=3)

14.
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3\\ 2x - y + 3z = 4\\ x - 2y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Ayuda: la 3ª fila es comb. lin. de las otras
(comp. indtdo.; x=5−4λ, z=−2+3λ, y=λ)

15.
$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0\\ -3x+3z=4\\ -2x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; x=λ-4/3, y=λ-2/3, z=λ)

16.
$$\left.\begin{array}{l} y+9z=2\\ 2x+y+3z=-1\\ -x+3z=-2 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

* **17.**
$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=-1\\ -x+y-z=1\\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; x=λ, y=1/2+ λ, z=−1/2)

18.
$$\left.\begin{array}{l} y-t+w=1\\ 2x+y+z-t+2w=2\\ 2x-y+z+t=0\\ 4x-3y+2z+3t-w=-1 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; x=(1-λ-v)/2, y=1+μ-w;
λ,μ,v arbitrarios)

19.
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 7z = -1\\ 3x + 4y - 6z = 5\\ 5x - 2y + 4z = -7 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=-1, y=5, z=2)

20.
$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=1\\ 2x+y-z=0\\ 3x-y=1\\ x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

21.
$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = -1\\ x + y + z = 1\\ x + 3y + z = 3 \end{array}\right\}$$

(comp. indtdo.; x=-λ, y=1, z=λ)

22.
$$\left.\begin{array}{l} 2x-2y+z=1\\ x+y-z=-2\\ 3x-y=-1\\ x+2y-z=-1 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=0, y=1, z=3)

23.
$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-4z=1\\ x-y-2z=3\\ 4x-y-8z=2 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

24.
$$\left.\begin{array}{l} x+y-2z-3t=0\\ x+y-3z+2t=-2\\ 2x-y+z-t=1\\ x+2y-2z+2t=3 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=3, z=2, t=0)

25. Inventar un sistema que sea compatible determinado, otro indeterminado y otro incompatible.

26. ¿Por qué se hace la discusión de un SS.EE.LL. antes de resolverlo?

Sistemas homogéneos (sin parámetro):

27.
$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=0\\ x-2y+3z=0\\ y-z=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: x=0, y=0, z=0)

28.
$$\left.\begin{array}{l} -3x+y-2z=0\\ x-2y+z=0\\ -x-3y=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: x=−3λ/5, y=λ/5, z=λ)

29. $$\left.\begin{aligned} 7x+9y+9z&=0\\ 3x+2y+z&=0\\ x+y-z&=0\end{aligned}\right\}$$

(Soluc: x=0, y=0, z=0)

30. $$\left.\begin{aligned} 4x+12y+4z&=0\\ 2x-13y+2z&=0\\ 12x-12y+12z&=0\end{aligned}\right\}$$

(Soluc: x=−λ, y=0, z=λ)

Discusión y resolución de sistemas con un parámetro:

31. *(S)* Discutir según los valores de **m**, el sistema

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=3\\ 5x-5y+2z&=m\\ 2x+y-z&=1\end{aligned}\right\}$$

Resolverlo además para m=10. *(Soluc: m=10⇒comp.indtdo.; m≠10⇒incomp.)*

32. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{aligned} 5x-2y-pz&=3\\ -y+z&=1\\ x-y+z&=p\end{aligned}\right\}$$

y se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **p** *(Soluc: p=-2⇒incomp.; p≠2⇒comp.dtdo.)*

b) Resolverlo para p=2.

33. *(S)* Determinar para qué valores de **k** tiene solución el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+3y-3z&=4\\ 2x-y+z&=1\\ 3x+2y+kz&=5\end{aligned}\right\}$$

y resolverlo cuando tenga infinitas soluciones. *(Soluc: k≠−2⇒comp. dtdo.; k=−2⇒comp. indtdo.)*

34. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-mz&=4\\ x-y+z&=1\\ 2x-y+z&=m\end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores de **m**. *(Soluc: m≠2⇒comp. dtdo.; m=−2⇒incomp.)*

b) Resolver el sistema para m=1

35. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} ax-y+z&=2\\ x+ay-z&=1\\ x-z&=0\end{aligned}\right\}$$

se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **a** *(Soluc: a≠0 y a≠1⇒comp. dtdo.; a=0 o a=−1⇒incomp.)*

b) Resolverlo para a=1

36. *(S)* Discutir el sistema según los valores del parámetro **a** y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y-z=-2 \\ (a-1)x+(a-1)y-2z=-2 \\ ax+(a+1)y=1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a≠1⇒comp. dtdo.;a=−1⇒incomp.)

37. *(S)* Hallar los valores del parámetro **a** que hacen compatible el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+3y=2 \\ 3x+2y=-5 \\ 2x+ay=3 \end{array}\right\}$$

y resolverlo para uno de ellos. *(Soluc: a=13/5 y a=−5)*

38. *(S)* Determinar los valores de **a** para los que el sistema siguiente sea incompatible:

$$\left.\begin{array}{r} (a+3)x+4y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ -4x-4y+(a-1)z=-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a=−1)

39. *(S)* Discutir el siguiente sistema, según los valores de **m** y resolverlo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y+mz=m \\ x+2y+z=m \\ -x+y-z=m^2 \end{array}\right\}$$

(Soluc: m≠0⇒incomp.; m=0⇒comp. indtdo.)

40. *(S)* Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{array}\right\}$$

Ayuda: se recomienda previamente estudiar el carácter de dicho sistema. *(Soluc: x=2, y=z=1)*

41. *(S)* Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a≠1 y a≠3⇒comp. dtdo.; a=1⇒comp. indtdo.; a=−3⇒incomp.)

42. *(S)* Estudiar según los valores de **a** el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z=-1 \\ -x+y-z=a \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando no tenga solución única. *(Soluc: a≠1⇒comp. dtdo.; a=1⇒comp. indtdo.)*

43. *(S)* Discutir el siguiente sistema para los diferentes valores de **a** y resolverlo para a=0:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x+y+2z=-2 \\ 2x+y+(a+1)z=3 \\ x+(a+1)y+2z=-2 \end{array}\right\}$$

(Ayuda: hacer el cambio a+1=t)

(Soluc: a≠4 y a≠1 y a≠0⇒comp. dtdo.; a=1⇒incomp.; a=0 o a=−4⇒comp. indtdo.)

Sistemas homogéneos con parámetro:

44. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 7x+9y+9z=0 \\ 3x+2y+mz=0 \\ x+my-z=0 \end{array}\right\}$$

Se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **m**. **b)** Resolverlo para m=5.

(Soluc: m≠5 y m≠1/7⇒comp. dtdo.; m=5 o m=1/7⇒comp. indtdo.)

45. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (m+2)x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$$

a) Determinar el valor de **m** para que tenga solución distinta de la trivial. *(Soluc: m=10)*

b) Resolverlo para el valor de **m** encontrado.

46. *(S)* Resolver el siguiente sistema para los valores de λ que lo hacen compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & 6 & 6 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -6 & 6 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Soluc: es comp. indtdo. para λ=−1 y λ=2)

47. *(S)* Determinar los valores de λ para los cuales el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+y-z=0 \\ -\lambda x+(\lambda-1)y=0 \\ -x-2y+(\lambda+1)z=0 \end{array}\right\}$$

tiene solución distinta de la trivial y obténgase la solución para uno de los valores de λ. *(Soluc: λ=1, λ=−1±√2)*

Problemas de planteamiento de sistemas:

48. En un almacén un mayorista compra 5 unidades de un producto *A*, 4 de *B* y 3 de *C*, pagando un total de 8.600 €. Otro cliente compra 2 paquetes de *A*, 7 de *B* y 4 de *C*, gastando 7.300 €. Un tercer cliente compra 8 de *A*, 13 de *B* y 5 de *C*, pagando lo que los otros dos juntos. ¿Cuánto vale cada producto?
(Soluc: A=1.000, B=300 y C=800 €.)

49. Una gran multinacional destina 900.000 € para gratificar a sus 51 empleados. Concede 25.000 € a los empleados de nivel *A*, 20.000 a los de nivel *B* y 15.000 a los de nivel *C*. Teniendo en cuenta que para los de nivel *B* destina en total el doble que para los del *A*, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?
(Soluc: A=6, B=15 y C=30 empleados)

50. La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de 10 años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.
(Soluc: 15, 18 y 40 años)

51. La edad de un padre es igual a la suma de las de sus dos hijos. Cuando pasen tantos años como tiene el hijo mayor, el padre tendrá 70 años y la suma de las edades de los tres será de 164 años. ¿Qué edad tiene ahora cada uno? *(Soluc: 22, 24 y 46 años)*

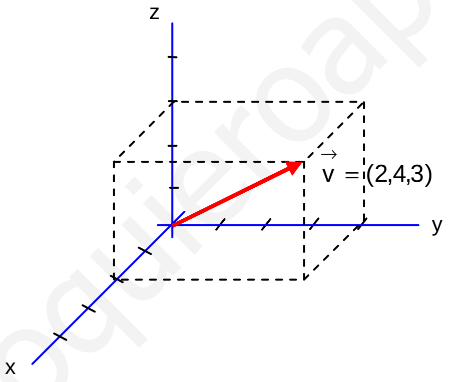
52. Tres amigos suben a una báscula de dos en dos: Andrés y Benjamín suman 173 kg, Andrés y Carlos 152 kg, mientras que entre Benjamín y Carlos pesan 165 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?
(Soluc: Andrés=80 kg; Benjamín=93 kg; Carlos=72 kg)

53. Un modisto ofrece cuatro tipos de tejido de gran calidad a distintos precios. Un comprador gastó 7.000 € en 2 m del primero, 3 m del segundo y 1 m del tercero. Otro gastó 6.500 € comprando 1 m del primero, 2 m del segundo y 2 m del cuarto. Un tercero compró 3 m del primero, 3 m del tercero y 2 m del cuarto, gastando 7.000 €. Al vendedor le sobraron 2 m, 1 m, 2 m y 1 m respectivamente, por un valor de 5.750 €. ¿Cuál era el precio de cada tejido? *(Soluc: 1.000, 1.500, 500 y 1.250 €, respectivamente)*

54. En una mesa de una cafetería tomaron dos cafés, 1 refresco y dos tés, costándoles 5,30 €. En otra mesa pagaron 8,40 € por tres cafés, 3 refrescos y 1 té. Por otra parte, dos amigos tomaron un café y un refresco en la barra, donde el precio es un 10% más barato, pagando 2,25 €. ¿Qué cuesta cada bebida?
(Soluc: café=1 €, refresco=1,50 €, té=0,90 €)

55. Un especulador tiene colocado su dinero en tres depósitos bancarios diferentes X, Y y Z. El dinero invertido en X le produce un 4% de beneficio, en Y un 7%, y en Z un 6%. Sus beneficios totales fueron de 327.000 € anuales. Debido a la bajada de tipos motivada por la crisis, el segundo año el rendimiento es del 3.5% en X, el 6% en Y y el 5% en Z, siendo sus beneficios de 278.000 €. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada depósito si en total tiene 5.000.000 €? *(Soluc: X=200.000 €; Y=3.100.000 €; Z=1.700.000 €)*

VECTORES EN EL ESPACIO



MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

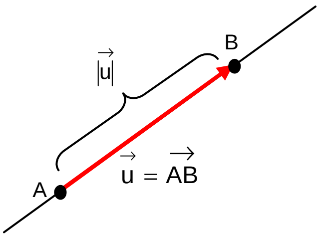
I. DEFINICIONES [1]

Magnitudes

- **Vectoriales:** Un **vector** es un segmento orientado que, para ser definido, precisa de los siguientes tres elementos:
  - **Módulo:** Indica la intensidad, y viene dado por la longitud de la flecha que representa al vector.
  - **Dirección:** Viene dada por la recta sobre la que está la flecha que representa al vector.
  - **Sentido:** Es el que apunta la flecha que representa al vector (Para una misma dirección, hay dos posibilidades).

  Ejemplos: La velocidad, la fuerza, la aceleración, etc.
- **Escalares:** Basta un número –un escalar- para ser definidas (Por ejemplo, la temperatura, masa, tiempo, densidad, la energía, etc.).

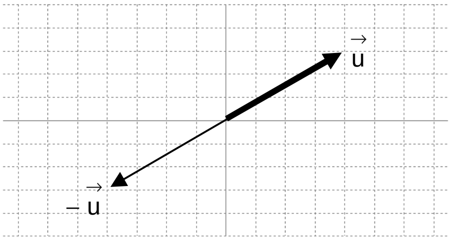
Notación:



Como vemos en el dibujo al margen, un vector se representa mediante una flecha. En concreto, se trata de un vector que va del punto A al punto B, por lo que se representa como $\overrightarrow{AB}$. En otros casos, se puede nombrar simplemente como $\vec{u}$. Nótese que el vector tiene una dirección, es decir, está construido sobre una recta. Por otra parte, su módulo, que, como hemos dicho arriba, es la longitud de la flecha, se representa como $|\vec{u}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$, es decir, con el nombre del vector entre | |. A veces, se indica con dobles barras, esto es, $\|\overrightarrow{AB}\|$, y se suele denominar norma del vector. Nosotros utilizaremos indistintamente ambas notaciones. Finalmente, el sentido del vector es el que apunta su flecha. Por lo tanto, se define el vector nulo como $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Vector nulo: Se designa como $\vec{0}$, y es aquel que tiene módulo cero. Se representa por un punto (por lo cual, no tiene mucho sentido considerar su dirección y sentido…).

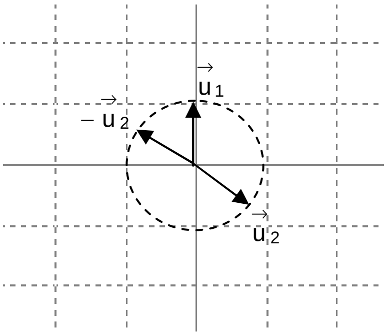
Vector opuesto: Dado un vector $\vec{u}$, se define su opuesto, que se designa como $-\vec{u}$, como aquel que tiene el mismo módulo, la misma dirección, pero distinto sentido:



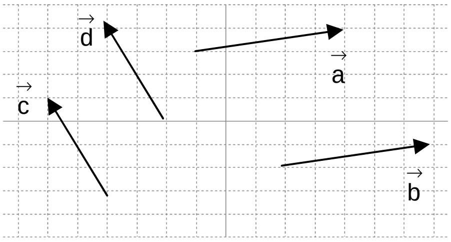
---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver pág. 134 del libro de ed. Anaya.

Vector unitario: Es todo vector que tenga módulo 1. Por ejemplo, los siguientes vectores son unitarios:



Vector iguales o equipolentes: **«Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido».** Se indica como $\vec{u} \sim \vec{v}$, aunque, en general, también se suele poner simplemente $\vec{u} = \vec{v}$.



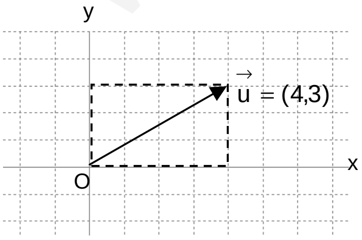
En la figura, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son equipolentes, y lo mismo podemos decir de $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

Puesto que, si trasladamos un vector de forma equipolente, es decir, sin variar su módulo, dirección y sentido, sigue siendo el mismo vector, se dice que los **vectores** son **libres** en el espacio. Por lo tanto, se define:

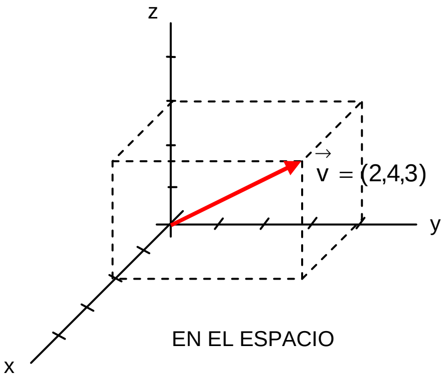
V^3 = Conjunto de todos los vectores libres del espacio.

Acabamos de hablar de vectores libres. Ahora bien, si los referimos a un punto, entonces serán vectores fijos. El punto que habitualmente se utiliza es el origen:

Coordenadas de un vector referido al origen [2]: Coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector:



EN EL PLANO

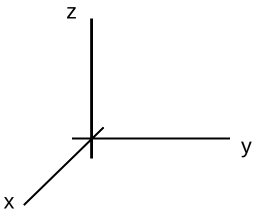


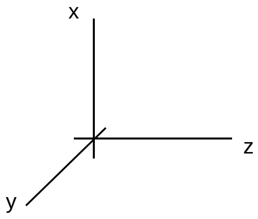
EN EL ESPACIO

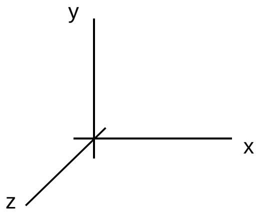
---

[2] Puede también verse en la pág. 154 del libro de ed. Anaya.

En el siguiente apartado vamos a ver más formalmente el porqué de esto. Solamente una última observación: la orientación del triedro x,y,z no es arbitraria; las 3 posibilidades válidas son las siguientes:







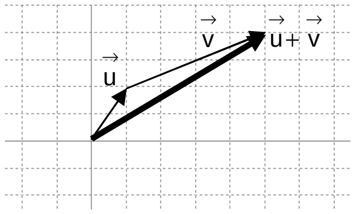
Pero la más frecuente es la primera. Veremos la explicación de esto en el apartado IV, producto vectorial.

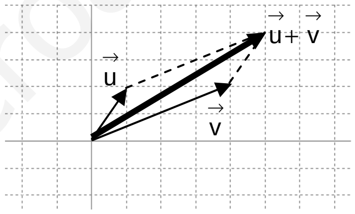
Ejercicios final tema: 1 y 2

II. OPERACIONES

II.I SUMA DE VECTORES [3]

Gráficamente: Hay dos formas posibles de sumar vectores; ambas, obviamente, conducen al mismo vector suma. Para mayor simplicidad, vamos a ver ambas en el plano, y para vectores referidos al origen:





REGLA DEL PARALELOGRAMO

Como vemos, en la 1ª forma (que se usa más en Matemáticas) se engancha el segundo vector al extremo del primero, y el vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último. En el caso de la regla del paralelogramo (muy utilizada en Física, para sumar fuerzas), los dos vectores se ponen con origen común, y se traza a continuación el paralelogramo que definen; el vector suma será entonces la diagonal de dicho paralelogramo que arranca del origen de ambos vectores. **Puede comprobarse analíticamente que ambas formas funcionan.**

En el espacio se procedería de manera análoga.

Analíticamente:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)\\ \vec{v}=(v_x,v_y,v_z)\end{array}\right\}\quad \vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x,u_y+v_y,u_z+v_z)$$

Propiedades: CONMUTATIVA: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

ASOCIATIVA: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

---

[3] Ver pág. 135 del libro de ed. Anaya.

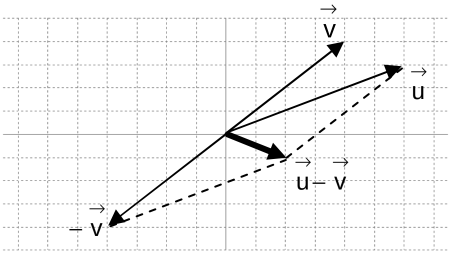
ELEMENTO NEUTRO: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

ELEMENTO OPUESTO: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

II.II RESTA DE VECTORES [4]

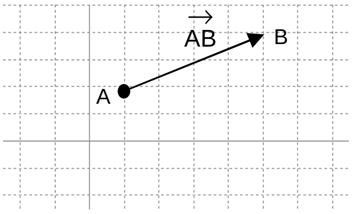
Gráficamente: Para restar dos vectores, sumamos al primero el opuesto del segundo, es decir, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. De las dos formas, vamos a utilizar, por ejemplo, la regla del paralelogramo:



Analíticamente, se restan las componentes.

De la resta de vectores pueden deducirse dos fórmulas importantes muy utilizadas:

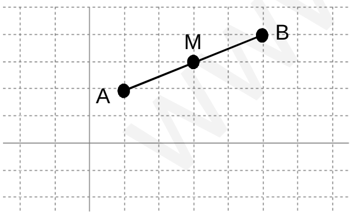
Coordenadas del vector que une dos puntos: Se obtienen restando las componentes del punto extremo menos el punto origen del vector:



$$\boxed{\vec{AB}=B-A} \qquad (1)$$

(Ver demostración en pág. 155 del libro de ed. Anaya).

Coordenadas del punto medio de un segmento: Dado un segmento de extremos A y B, las coordenadas de su punto medio serán la semisuma de dichos extremos.



$$\boxed{M=\frac{A+B}{2}} \qquad (2)$$

(Ver demostración en pág. 155 del libro de ed. Anaya).

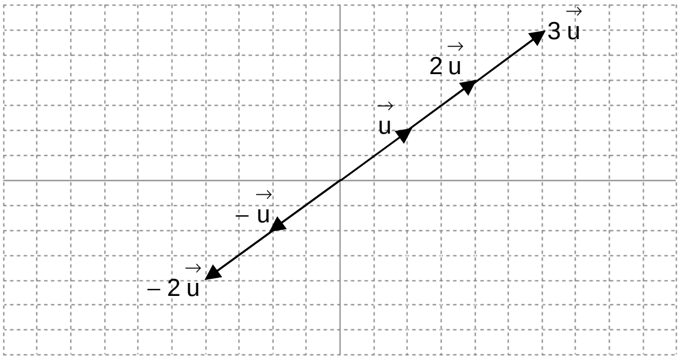
II.III PRODUCTO POR UN ESCALAR [5]

Gráficamente: Veámoslo con un ejemplo. Si queremos hacer $3\vec{u}$, lo que haremos es $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$, es decir, aplicamos la suma de vectores. Si lo que queremos construir es $-2\vec{u}$, haremos $-2\vec{u}=(-\vec{u})+(-\vec{u})$:

---

[4] Ver pág. 135 del libro de ed. Anaya.

[5] Ver pág. 134 del libro de ed. Anaya.



En resumen: Se define el vector $k\vec{u}$ como aquel que tiene MÓDULO: $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

DIRECCIÓN: la de $\vec{u}$

SENTIDO: $\begin{cases} \text{el de } \vec{u}\text{, si k>0} \\ \text{opuesto, si k<0} \end{cases}$

Todo esto puede comprobarse que concuerda analíticamente:

Analíticamente: $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \rightarrow k\vec{u} = (ku_x, ku_y, ku_z)$

Propiedades: ASOCIATIVA: $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de vectores: $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de escalares: $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

ELEMENTO NEUTRO: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

II.IV COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES[6]

Se dice que el vector $\vec{x}$ es combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}...$ si se puede expresar como

$$\vec{x} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\eta\vec{w}+... \qquad \text{donde } \lambda, \mu, \eta \in \Re$$

Observaciones:

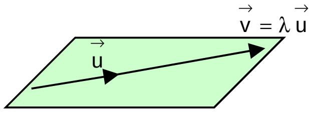
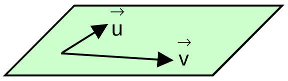
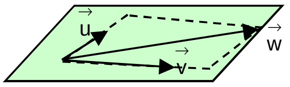
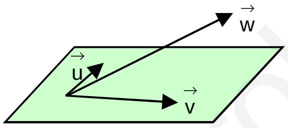
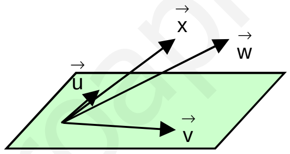
1º) Alguno de los λ, μ, η … pueden ser 0

2º) Recordar: **«Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes; en caso contrario, son linealmente independientes».**

Veamos, en la siguiente tabla resumen, todas las posibilidades de dependencia lineal en función del número de vectores y de su posición:

---

[6] Ver págs. 136 y 137 del libro de ed. Anaya.

Nº VECTORES	POSICIÓN	PLANO V^2	ESPACIO V^3	¿DEPENDENCIA LINEAL?
2	Alineados:			**l. d** ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ proporcionales)
	No alineados:			**l .i.** ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son base de V^2)
3	Coplanarios:			**l. d.** ($\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son comb. lin.)
	No coplanarios:	▨		**l . i.** ($\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son base de V^3)
≥ 4	▨	▨		**l. d.** ($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ y $\vec{x}$ son comb. lin.)

3º) Definición: «$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ forman una **base** de V^3 si cualquier $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base, es decir,

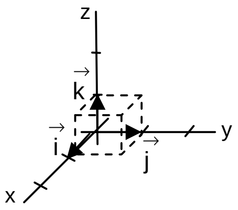
$$\exists\ \lambda,\mu,\eta\in\Re\ /\quad \vec{x}=\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}+\eta\,\vec{w}\quad»$$

«Se dice entonces que λ,μ y η son las **coordenadas** de $\vec{x}$ en la base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$»

4º) Como vimos en el 4º caso del cuadro anterior, **«En V^3 tres vectores cualesquiera no coplanarios [7] forman una base».**

En particular, consideremos los vectores

$$\vec{i}=(1,0,0)$$
$$\vec{j}=(0,1,0)$$
$$\vec{k}=(0,0,1)$$



que son perpendiculares entre sí, y unitarios. Pues bien, $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ es una base ortonormal de V^3.

Definición: «Base ortonormal de V^3 son tres vectores perpendiculares entre sí y unitarios».

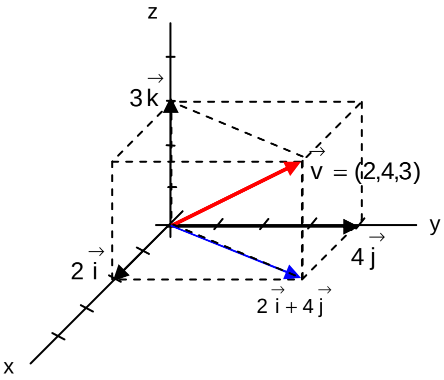
---

[7] Y no proporcionales, naturalmente…

Nótese, por lo tanto, que $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ no es la única base ortonormal de V^3, pero sí la más simple, y por eso se denomina base canónica de V^3.

Definición: «Una base ortogonal de V^3 está formada por tres vectores perpendiculares entre sí».

Veamos, con un ejemplo, cuál es la ventaja de utilizar la base canónica en V^3:



En la figura, podemos expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$:

$$\vec{v}=(2\vec{i}+4\vec{j})+3\vec{k}=[(2,0,0)+(0,4,0)]+(0,0,3)=(2,4,3)$$

Nótese que 2, 4 y 3 son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. En otra base tendría distintas coordenadas.

Ejercicios final tema: 3 a 9

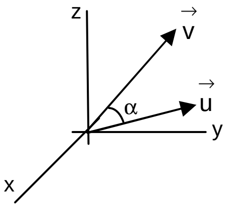
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 149 y ss.: 1 a 6, 21, 28, 29, 32 y 37 (vectores); pág. 154: 1; pág. 176: 1 (ptos. en el espacio); pág. 156: 2 y 3; pág. 176: 4, 5 y 6 (pto. medio)

III. PRODUCTO ESCALAR[8]

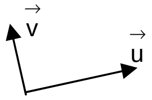
Vamos a definir el producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se designa como $\vec{u}\cdot\vec{v}$, y cuyo resultado es un escalar:

Definición: «El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman»:

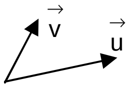
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha} \qquad (3)$$



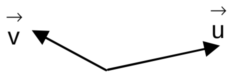
Consecuencias: **1)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (**Condición de perpendicularidad**)



2) $\vec{u}\cdot\vec{v}>0 \Leftrightarrow \alpha<90^{\circ}$



3) $\vec{u}\cdot\vec{v}<0 \Leftrightarrow 90^{\circ}<\alpha\leq 180^{\circ}$



---

[8] Ver págs. 138 y 139 del libro de ed. Anaya.

Expresión analítica [9]**:**

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)\\ \vec{v}=(v_x,v_y,v_z)\end{array}\right\}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z} \qquad (4)$$

Propiedades: CONMUTATIVA: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ASOCIATIVA MIXTA: $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v})$

DISTRIBUTIVA: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración[10], tanto analítica como gráficamente).

Una observación sobre notación: Es muy importante, a la hora de simbolizar el producto escalar de dos vectores, no olvidar el **·** entre ambos: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$. Ahora bien, si de lo que se trata es de multiplicar un escalar por un vector, para distinguir es recomendable no indicar el producto con un **·** : $\lambda\,\vec{u}$

Aplicaciones del producto escalar [11]:

1º) Módulo de un vector: Consideremos el producto escalar de un vector $\vec{u}$ consigo mismo:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\cos 0^{\circ}=\|\vec{u}\|^2$$

Despejamos $\|\vec{u}\|$:

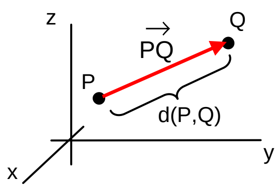
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Si las componentes del vector son $\vec{u}=(x,y,z)$, nos queda:

$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (5)$$

Consecuencias:

a) Distancia entre dos puntos[12]**:** Supongamos dos puntos en el espacio, P(x_1,y_1,z_1) y Q(x_2,y_2,z_2), cuya distancia de separación, d(P,Q), queremos conocer. Es obvio que dicha distancia (ver dibujo) coincidirá con el $\|\overrightarrow{PQ}\|$:



$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow\ \|\overrightarrow{PQ}\|=\boxed{d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \qquad (6)$$

---

[9] Ver en la pág. 139 del libro de ed. Anaya la demostración de que esta fórmula y la definición gráfica coinciden.

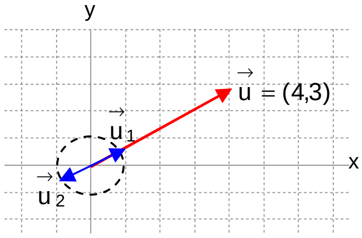
[10] Nos remitimos, para ello, a la pág. 139 del libro de ed. Anaya.

[11] Ver pág. 138 del libro de ed. Anaya.

[12] Pág. 188 del libro de ed. Anaya.

b) ¿Cómo obtener un vector con la misma dirección que uno dado, pero unitario? [13]:

Supongamos que nos dan un vector $\vec{u}$, y queremos obtener un vector con su misma dirección, pero unitario. La respuesta, viendo el dibujo (lo hemos indicado en el plano, para una mejor visualización; pero en el espacio sería análogo), es obvia: habrá que dividirlo por su módulo; es decir, se tratará del vector $\vec{u}/\|\vec{u}\|$

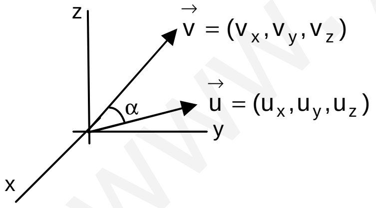


La demostración es también evidente:

- Si $\vec{u}$ lo dividimos por un número, como es $\|\vec{u}\|$, obtendremos un vector <u>con la misma dirección</u> (y sentido).
- $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ es <u>unitario</u>, ya que su módulo es: $\left\|\vec{u}/\|\vec{u}\|\right\|=\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\|\vec{u}\|=1$ (C.Q.D.)

Observación: En realidad, habría otro vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y unitario, pero de sentido contrario; se trataría del vector opuesto a $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ (El $\vec{u}_2$ del dibujo).

2º) Ángulo entre dos vectores: Se obtiene fácilmente, sin más que despejar en $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha$



$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}=\frac{u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\,\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\qquad(7)$$

Ejercicios final tema: 10 a 21

Ejercicios PAEG: 4B jun 2008

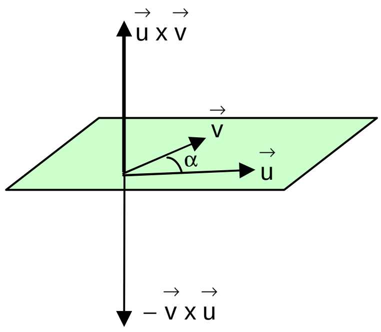
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 139: 1; pág. 149 y ss.: 7, 8, 10, 11, 12, 24 a 27, 30, 34, 35, 36, 38 y 39; pág. 204: 5 y 7

---

[13] Pág. 134 del libro de ed. Anaya.

IV. PRODUCTO VECTORIAL [14]

Vamos a definir el producto vectorial de dos vectores, $\vec{u}\times\vec{v}$, cuyo resultado es un vector:



Definición: El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a otro vector, denominado $\vec{u}\times\vec{v}$, que tiene:

MÓDULO: $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \operatorname{sen}\alpha$

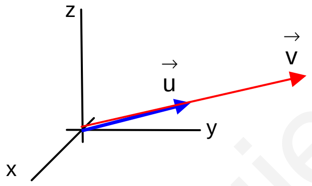
DIRECCIÓN: $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ y $\vec{v}$

SENTIDO: el del avance de un sacacorchos al llevar $\vec{u}$ a $\vec{v}$

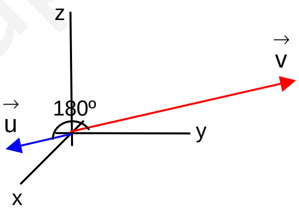
Observación: El producto escalar $\vec{u}\times\vec{v}$ valdrá cero en alguno de los siguientes casos:

1) Cuando alguno de los dos vectores sea el vector $\vec{0}$ (caso trivial), ya que, en tal caso, su módulo sería 0.

2) Si ambos vectores tienen la misma dirección, es decir, son paralelos, o lo que es lo mismo, sus componentes son proporcionales, pues en ese caso, $\operatorname{sen}\alpha = 0$. Hay dos posibilidades:



MISMO SENTIDO



SENTIDO OPUESTO

Expresión analítica [15]:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}} \qquad (8)$$

Propiedades: ANTICONMUTATIVA: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$

No verifica la asociativa: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \neq (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

ASOCIATIVA MIXTA: $\lambda(\vec{u}\times\vec{v}) = \lambda\vec{u}\times\vec{v} = \vec{u}\times\lambda\vec{v}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración[16], tanto analítica –es decir, mediante las propiedades de los determinantes– como gráficamente).

---

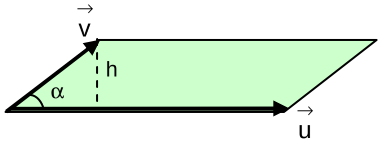
[14] Ver pág. 142 del libro de ed. Anaya.

[15] Ver en la pág. 143 del libro de ed. Anaya la complicada demostración de esta fórmula.

[16] Nos remitimos, para ello, al libro de ed. Anaya.

Interpretación geométrica: «El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que determinan».

Dem:



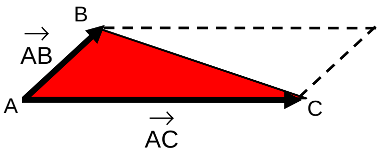
$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{h}{\|\vec{v}\|}\Rightarrow h=\|\vec{v}\|\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Multiplicamos ambos miembros por $\|\vec{u}\|$:

$$\underbrace{h\cdot\|\vec{u}\|}_{\text{Base x Altura = Área del paralelogramo}}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\operatorname{sen}\alpha=\|\vec{u}\times\vec{v}\| \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

Consecuencia: Área del triángulo [17]

«El área de un triángulo es igual al semimódulo del producto vectorial de dos vectores cualesquiera que lo definan»:



$$\boxed{S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|} \qquad (9)$$

Ejercicios final tema: 22 a 33
Ejercicios PAEG: 4B jun 2005, 4A jun 2008
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 141: 1, 2, 3; pág. 144: 1, 2, 3; pág. 149 y ss.: 13 a 16, 22, 23 y 33 (prod. vectorial); pág. 195: 1; pág. 205: 23 (área triángulo)

V. PRODUCTO MIXTO [18]

Vamos a definir un último producto vectorial, en este caso de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, llamado producto mixto, cuyo resultado es un escalar:

Definición: Se define el producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que se designa como $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, al número que resulta de la siguiente operación:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})} \qquad (10)$$

---

[17] Ver pág. 194 del libro de ed. Anaya.

[18] Ver pág. 145 del libro de ed. Anaya.

Expresión analítica: En la práctica, para su cálculo, lo más cómodo no es utilizar la definición anterior, sino el siguiente determinante:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} \qquad (11)$$

Dem:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=\vec{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=$$

$$=(u_x,u_y,u_z)\cdot\left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\right)=u_x\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}-u_y\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}+u_z\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

(C.Q.D.)

Observaciones: El producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ valdrá cero en alguno de los siguientes casos:

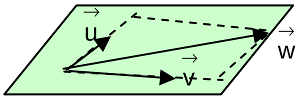
1) Cuando al menos uno de los vectores sea el vector $\vec{0}$ (caso trivial), ya que, en tal caso, habría al menos una fila de 0 en el determinante.

2) Si al menos dos vectores son iguales o proporcionales –es decir, tienen la misma dirección–, pues entonces tendríamos dos filas del determinante iguales o proporcionales.

3) Si los tres vectores son combinación lineal, es decir, linealmente dependientes –ya que. en ese caso, sabemos que el determinante lógicamente valdría cero–. Ahora bien, como vimos en la tabla resumen de la pág. 6, ello significa que los tres vectores son coplanarios. Por consiguiente:

Condición de coplanariedad (dependencia lineal):

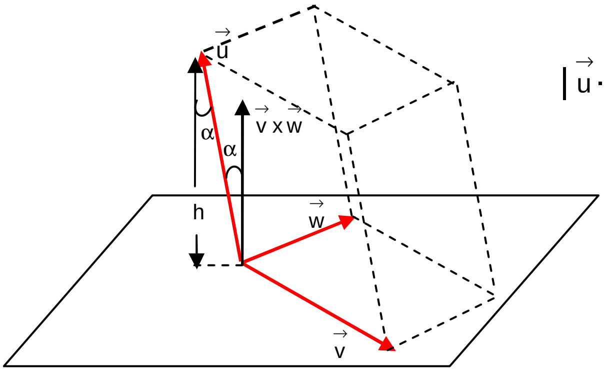
$$\boxed{\vec{u},\vec{v}\text{ y }\vec{w}\text{ coplanarios (lin. dep.)}\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=0} \qquad (12)$$



Es decir: «La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanarios es que su producto mixto sea cero» (Sería el 3$^{\text{er}}$ caso de la tabla de la pág. 6).

Interpretación geométrica: **«El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo que determinan».**

Dem:



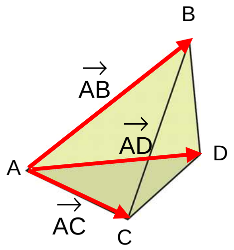
$$\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right| = \|\vec{u}\|\cdot\underbrace{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}_{\text{Área base}}\cdot\cos\alpha = \text{Área base}\cdot h = \text{Vol}_{\text{paralelepípedo}}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\|\vec{u}\|}$$

(C.Q.D.)

Aplicación: Volumen del tetraedro[19]

«El volumen de un tetraedro es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de tres vectores cualesquiera que lo definan»:



$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|} \qquad (13)$$

En el libro de ed. Anaya (pág. 195) puede verse gráficamente por qué el volumen del tetraedro es la 1/6 parte del volumen del paralelepípedo que lo contiene.

Ejercicios final tema: 34 y ss.

Ejercicios PAEG: 4B jun 2011

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 145: 1, 2; pág. 149 y ss.: 17 a 20, 31; pág. 195: 2; pág. 205 y ss.: 24 a 26 y 55 (volumen tetraedro)

---

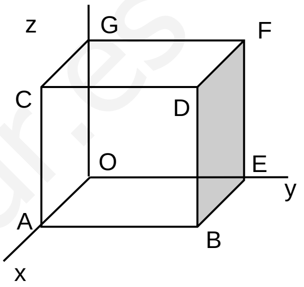
[19] Ver pág. 195 del libro de ed. Anaya.

39 EJERCICIOS de VECTORES 2º BACH.

VECTORES. OPERACIONES:

1. Comprobar si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, siendo A(2,1,3), B(5,4,1), C(2,1,5) y D(3,2,−1). En caso negativo, hallar las coordenadas del punto D' para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD'}$ sean equipolentes.
(Soluc: no son equipolentes; D'(5,4,3))

2. Considerar el cubo de arista unidad de la figura. Indicar las coordenadas de dos vectores equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ y otro equipolente a $\overrightarrow{AD}$. Hallar $|\overrightarrow{AE}|$ y $|\overrightarrow{AF}|$



3. *(**S**)* Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=10\sqrt{3}$ y $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *(Soluc: 90^0)*

4. Dados $\vec{u}=(1,4,3)$ y $\vec{v}=(2,3,2)$, dibujarlos sobre los mismos ejes, y hallar, gráfica y analíticamente: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}$, $3\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$

5. Dados $\vec{u}=(5,2,15), \vec{v}=(-1,2,1), \vec{w}=(2,-1,3)$, se pide:

a) Expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ *(Soluc: $\vec{u}=3\vec{v}+4\vec{w}$)*

b) Expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: $\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}$)*

c) ¿Son linealmente dependientes o independientes $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

d) ¿Cuál es el rango de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

e) Volver a hacer el apartado **a** por matrices (Gauss) y el **c** por determinantes.

6. a) Hallar el valor de k para que $\vec{u}=(1,2,-1), \vec{v}=(0,1,2), \vec{w}=(-1,k,3)$ sean linealmente dependientes.
(Soluc: k=-1)

b) Obtener, en ese caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ *(Soluc: $\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}$)*

7. Considerar los vectores $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(1,4,0)$, $\vec{c}=(0,5,3)$

a) Razonar que forman una base de V^3

b) Hallar las coordenadas de $\vec{x}=(7,0,3)$ en la base anterior. *(Soluc: $\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$)*

c) Intentar dibujar la situación anterior.

8. Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,0,0) y B(0,1,0). Las coordenadas del centro M son M(0,0,1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D. Dibujar la situación. *(Soluc: C(0,−1,2) y D(−1,0,2))*

9. *(**S**)* Dados los puntos A(2,3,9) y B(1,−2,6), hallar tres puntos P, Q y R que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales. *(Soluc: P(7/4,7/4,33/4), Q(3/2,1/2,15/2), R(5/4,−3/4,27/4))*

PRODUCTO ESCALAR:

10. Dados A(1,2,3) y B(2,1,4), se pide:

a) Dibujar $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

b) Hallar d(A,B) *(Soluc: $\sqrt{3}$ u)*

c) Hallar el ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ *(Soluc: $\cong$21º 4' 14")*

d) Hallar m tal que (0,3,m) sea $\perp$ a $\overrightarrow{OB}$ *(Soluc: m=−3/4)*

11. Sean $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ los vectores de la base ortonormal canónica de V^3. Hallar:

a) $\vec{i}\cdot\vec{i}$ **b)** $\vec{i}\cdot\vec{j}$ **c)** $\vec{i}\cdot\vec{k}$ **d)** $\vec{j}\cdot\vec{j}$ **e)** $\vec{j}\cdot\vec{k}$ **f)** $\vec{k}\cdot\vec{k}$ *(Soluc: 1; 0; 0; 1; 0; 1)*

12. *(**S**)* Calcular los valores de **x** e **y** para que el vector (x,y,1) sea ortogonal a los vectores (3,2,0) y (2,1,−1)

(Soluc: x=2, y=−3)

13. Considérese un triángulo equilátero ABC de lado 6 u. Hallar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$

(Soluc: 18, −18, 18)

14. Desarrollar las siguientes expresiones: **a)** $(\vec{u}-\vec{v})^2$ **b)** $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ **c)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

15. Inventar tres vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, y comprobar que se verifica la propiedad distributiva:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

16. Demostrar que el vector $\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{d}-(\vec{b}\cdot\vec{d})\,\vec{c}$ es ortogonal al vector $\vec{b}$

17. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $(\vec{u}+\vec{v})^2=25$ y $(\vec{u}-\vec{v})^2=9$. Calcular el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *(Soluc: 4)*

18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=9$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=17$. Calcular el módulo del vector $\vec{v}$

(Soluc: 8)

19. Obtener tres vectores cualesquiera $\perp$ a $\vec{u}=(3,-1,5)$ ¿Cuál es su expresión general?

(Soluc: (a,b,c) tal que 3a−b+5c=0)

20. Dados $\vec{u}=(3,-1,5)$ y $\vec{v}=(3,0,3)$, se pide:

a) Obtener un vector cualquiera $\perp$ a ambos. *(Soluc: p. ej. (-1,2,1))*

b) Obtener un vector cualquiera $\perp$ a ambos y unitario. *(Soluc: (-$\sqrt{6}$/6, $\sqrt{6}$/3, $\sqrt{6}$/6); también vale el opuesto)*

c) Obtener un vector cualquiera $\perp$ a ambos y de módulo 3 *(Soluc: (-$\sqrt{6}$/2, $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$/2); también vale el opuesto)*

21. Encontrar los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a $\vec{v}=(1,0,1)$ y forman un ángulo de 60º con $\vec{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ *(Soluc: (1/2, $\sqrt{2}$/2,-1/2) y (-1/2, $\sqrt{2}$/2,1/2))*

PRODUCTO VECTORIAL:

22. Dados los puntos del ejercicio 10, hallar $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$. Obtener también el ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ por producto vectorial, y comprobar que se obtiene el mismo resultado que por producto escalar.

23. Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1,1)$ y $\vec{v} = (1,-2,-1)$, se pide:

a) Ángulo que forman.

b) Un vector perpendicular a ambos.

c) Hallar el valor de **m** para que el vector $\vec{w} = (2,m,-4)$ sea $\perp$ a $\vec{v}$

24. Inventar tres vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, y comprobar que el producto vectorial: **a)** Verifica la propiedad anticonmutativa. **b)** No verifica la asociativa. **c)** Sí verifica la asociativa mixta, y la distributiva respecto a la suma.

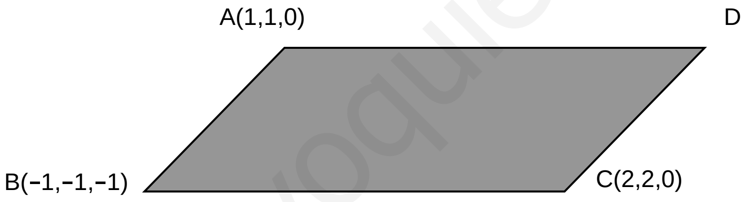
25. Dibujar el triángulo de vértices A(1,3,5), B(2,7,8) y C(5,1,–11) y calcular su área. *(Soluc: $\sqrt{1118}$ u^2)*

26. Comprobar analíticamente que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. ¿Qué consecuencia tiene este hecho? Obtener también $\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) \times \vec{k}$, $\vec{i} \times \left(\vec{j} \times \vec{k}\right)$, $\left(\vec{i} \times \vec{i}\right) \times \vec{j}$ e $\left(\vec{i} \times \vec{j}\right) \times \left(\vec{k} \times \vec{i}\right)$

27. Hacer de nuevo el ejercicio 20 por producto vectorial.

28. Hallar los dos vectores unitarios ortogonales a (2,–2,3) y (3,–3,2). *(Soluc: ($\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$,0) y (–$\sqrt{2}/2$,–$\sqrt{2}/2$,0))*

29. *(**S**)* Considérese la figura siguiente:



Se pide: **a)** Coordenadas de D para que ABCD sea un paralelogramo. *(Soluc: D(4,4,1))*

b) Área de este paralelogramo. *(Soluc: S_{ABCD}=$\sqrt{2}$ u^2)*

30. *(**S**)* Explicar cómo puede hallarse el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus tres vértices (en el espacio). Aplicarlo a A(1,0,1), B(–1,0,0), C(0,2,3). *(Soluc: 3 $\sqrt{5}/2$ u^2)*

31. Dados $\vec{u} = (-1,2,1)$ y $\vec{v} = (1,1,0)$

a) Hallar **a** y **b** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean $\perp$ a $\vec{w} = (a,2,b)$ *(Soluc: a=–2, b=–6)*

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: ≅73º 13' 17")*

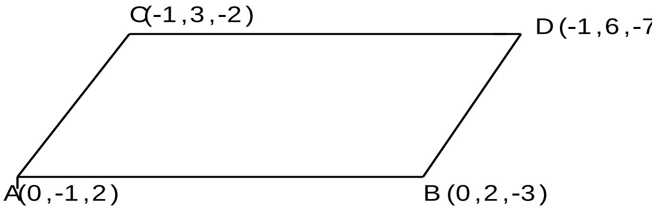
c) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{x} = (-1,1,0)$ y unitario.*(Sol: (–$\sqrt{3}/3$,–$\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}/3$); también vale el opuesto)*

32. Considerar el triángulo de vértices A(1,0,2), B(2,2,2) y C(3,–1,2)

a) Hallar su área. *(Soluc: 5/2 u^2)*

b) Hallar el ángulo correspondiente al vértice A *(Soluc: 90º)*

33. a) Demostrar (por equipolencia de vectores) que los siguientes puntos forman un paralelogramo en el espacio:



b) Hallar el área del triángulo ABC *(Soluc: ($\sqrt{98}/2$ u^2)*

PRODUCTO MIXTO:

34. Dibujar el tetraedro de vértices A(2,1,0), B(0,1,0), C(3,3,7) y D(0,0,0) y hallar su volumen. *(Soluc: 7/3 u^3)*

35. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A(2,1,4), B(1,0,2), C(4,3,2) y D(1,5,6) *(Soluc: 5 u^3)*

36. Dados los puntos A(1,–2,0), B(–2,4,4) y C(3,–1,–1), se pide:

a) Hallar un vector ⊥ a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *(Soluc: (2,–1,3))*

b) Hallar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *(Soluc: ≅102º 4' 7")*

c) Hallar el área del triángulo determinado por los tres puntos anteriores. *(Soluc: $5\sqrt{14}/2u^2$)*

d) Hallar el volumen del tetraedro de vértices los tres puntos anteriores y el origen. *(Soluc: 10/3 u^3)*

37. Dados $\vec{u}=(a,2,3)$, $\vec{v}=(3,2,a)$ y $\vec{w}=(a,-2,1)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{w}$ sea ⊥ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: a=1)*

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios. *(Soluc: a=–2, a=3)*

38. Hallar $\left[\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right]$ e interpretar gráficamente el resultado obtenido. *(Soluc: 1)*

39. **TEORÍA:** **a)** Demostrar que si $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{w}$ y $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

b) Justificar que cualquier conjunto de vectores que contenga el vector nulo es L.D.

c) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$?

d) Justificar por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+b$ es siempre nulo.

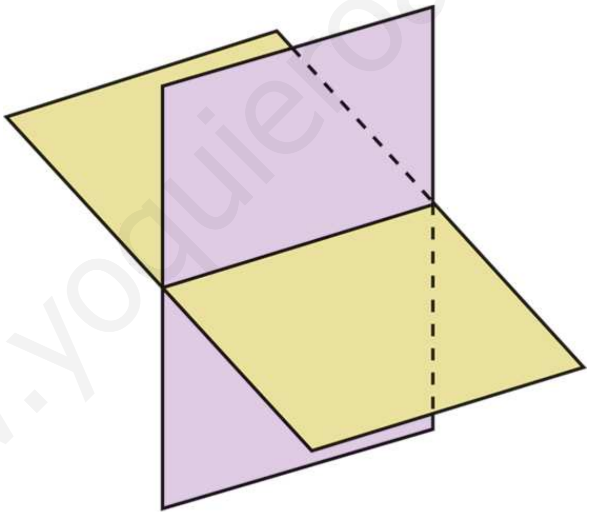
e) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$, ¿podemos concluir que $\vec{v}=\vec{w}$? ¿Y si es $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$?

f) Si $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|$, qué podemos concluir del ángulo que forman?

g) Sean $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indicar razonadamente cuáles de los siguientes productos mixtos valen cero:

$$\left[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right] \qquad \left[\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right] \qquad \left[\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}\right]$$

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO



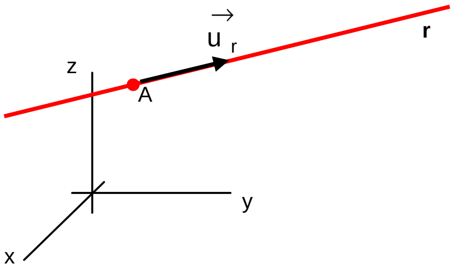
MATEMÁTICAS II   2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I. ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y CONTINUA DE LA RECTA [1]

Determinación principal de una recta:



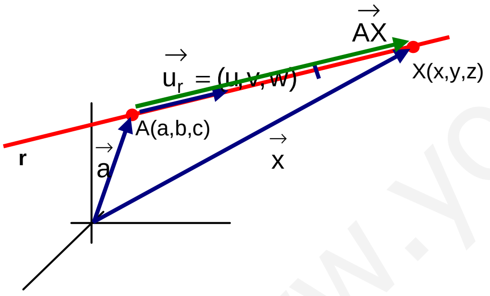
Es evidente que una recta **r**, tanto en el plano como en el espacio (ver dibujo), va a quedar determinada por un punto cualquiera de ella ($A \in r$) y un vector director, es decir, que tenga su misma dirección ($\vec{u}_r \neq \vec{0}$). Ambos elementos, punto y vector director, constituyen la **determinación principal** de la recta. En la práctica, escribiremos:

$$r = \left\{ A, \vec{u}_r \right\}$$

¿Por qué utilizamos el calificativo "principal"? Porque, obviamente, no es la única forma de determinar una recta. Existen infinitas formas: por ejemplo, es evidente que sólo existe una recta que pase por dos puntos, o una recta paralela a otra dada y que pase por un punto exterior a ésta, o perpendicular a un plano y que pase por un punto dado, etc. Ahora bien, nótese que siempre nos darán dos datos para determinar una recta.

Ejercicio final tema: 1

Ecuación de la recta:



Considerar la recta **r** de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}_r\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in r$, es decir, un punto cualquiera de r, que puede variar. Es evidente que si X está en la recta, entonces el vector $\vec{AX}$ será proporcional a $\vec{u}_r$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\vec{AX}$ es aproximadamente el triple que $\vec{u}_r$), es decir:

$$X \in r \Rightarrow \vec{AX} = \lambda \vec{u}_r \qquad (1)$$

donde $\lambda \in \Re$ se llama **parámetro**, y va a jugar un papel fundamental en todo el tema. Dando valores positivos y negativos a λ se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando la recta[2].

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{AX} \qquad (2)$$

---

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, puede consultarse la pág. 157 del libro de ed. Anaya.

[2] Esto puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace, muy interesante y recomendable:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/Representacion_de_rectas.htm

Reemplazando $\overrightarrow{AX}$ de (1) en (2) obtenemos la **ecuación vectorial** de la recta:

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}_r} \quad \text{(donde } \lambda \in \Re) \quad \textbf{EC. VECTORIAL} \qquad (3)$$

En la práctica, la ecuación vectorial no es útil en sí misma, pero sí si la descomponemos en sus tres coordenadas, obteniendo así las **ecuaciones paramétricas**:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = a + \lambda u \\ y = b + \lambda v \\ z = c + \lambda w \end{array}\right\}} \quad \textbf{EC. PARAMÉTRICAS} \qquad (4)$$

Observaciones: 1ª) Dando valores a $\lambda \in \Re$ se obtienen los infinitos puntos (x,y,z) de la recta.

2ª) Y viceversa, a un mismo punto (x,y,z) le tiene que corresponder el mismo λ para las tres ecuaciones.

3ª) Desventaja: La forma paramétrica de una recta no es única, es decir, una misma recta tiene infinitas formas de ecuaciones paramétricas[3], todas ellas válidas.

Si despejamos λ de las tres ecuaciones e igualamos, obtenemos la **ecuación continua**:

$$\boxed{\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}} \quad \textbf{EC. CONTINUA} \qquad (5)$$

Observaciones: 1ª) Todo punto (x,y,z) que verifique las tres igualdades $\in$ r, y viceversa.

2ª) Desventaja: La forma continua de una recta no es única, es decir, una misma recta tiene infinitas formas de ecuación continua, todas ellas válidas.

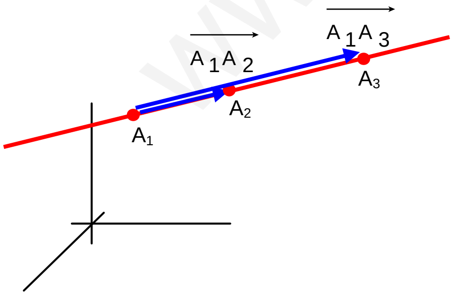
3ª) Si algún denominador es 0, la recta no se puede poner en continua sino, como veremos en el apartado III, en implícitas.

Ejercicios final tema: 2 a 6

Ejercicios PAEG: 1B sept 2002

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 176 y ss.: 10 y 11

Condición para que 3 (o más) puntos estén alineados[4]:



Como puede verse en el dibujo adjunto, es obvio que, para que tres puntos A_1, A_2 y A_3 estén alineados, es condición necesaria y suficiente que al formar dos vectores cualesquiera con ellos[5] –por ejemplo, $\overrightarrow{A_1A_2}$ y $\overrightarrow{A_1A_3}$ –, estos sean proporcionales. Si colocamos ambos vectores formando una matriz 2x3, ello querrá decir que su rango será 1:

---

[3] Ello es debido a que, obviamente, una recta tiene infinitos posibles vectores directores, y también podemos sustituir infinitos puntos (a,b,c) en las ecuaciones paramétricas.

[4] Ver pág. 155 del libro de ed. Anaya.

[5] También valdría el par $\overrightarrow{A_1A_2}$ y $\overrightarrow{A_2A_3}$

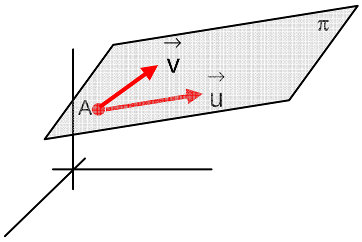
$$A_1, A_2, A_3 \text{ alineados} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_3} \propto \overrightarrow{A_1A_2} \Leftrightarrow \operatorname{rg}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\right) = 1 \qquad (6)$$

Ejercicio final tema: 7

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 176: 2 y 8 (ptos. alineados, sin parámetro); **pág. 156: 1; pág. 176: 3** (con parámetro)

II. ECUACIÓN PARAMÉTRICA Y GENERAL DEL PLANO [6]

Determinación principal del plano:



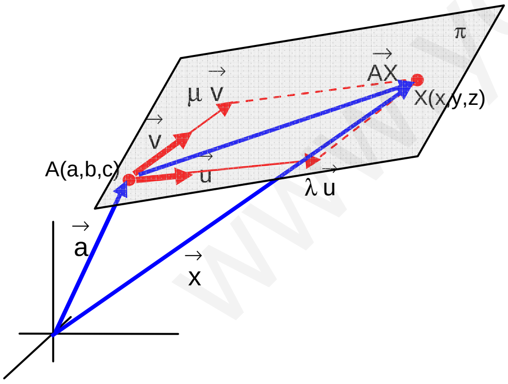
Como puede verse en el dibujo, un plano va a quedar determinado, por ejemplo, por un punto cualquiera sobre él ($A \in \pi$) y dos vectores no nulos y no proporcionales paralelos a él ($\vec{u}$ y $\vec{v}$), que llamaremos vectores direccionales del plano. Esta terna constituye la **determinación principal** del plano. En la práctica, escribiremos:

$$\pi = \left\{A, \vec{u}, \vec{v}\right\}$$

Al igual que en el caso de la recta, obviamente existen infinitas formas de determinar un plano: la más habitual es considerar el plano que pasa por tres puntos no alineados, o un plano paralelo a otro y que pase por un punto exterior a éste, o perpendicular a una recta y que pase por un punto dado, etc.

Ejercicio final tema: 8

Ecuación del plano:



Considerar el plano π de la figura adjunta. Supongamos que nos dan su determinación principal, es decir, $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$.

Supongamos un punto genérico $X \in \pi$, es decir, un punto cualquiera de π, que puede variar. Es evidente que si X está en el plano, entonces el vector $\overrightarrow{AX}$ será combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (por ejemplo, en el dibujo se ve que $\overrightarrow{AX}$ es aproximadamente $3\vec{u} + 2\vec{v}$), es decir:

$$X \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \qquad (7)$$

donde λ y $\mu \in \Re$ son parámetros. Dando valores a ambos parámetros se irían obteniendo los infinitos puntos X que irían trazando el plano[7].

---

[6] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, puede consultarse la pág. 164 del libro de ed. Anaya.

[7] Esto también puede verse de forma interactiva en el siguiente enlace: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/representacion_de_planos.htm

Por otra parte, es evidente en el dibujo la siguiente suma vectorial:

$$\vec{x}=\vec{a}+\overrightarrow{AX} \qquad (8)$$

Reemplazando $\overrightarrow{AX}$ de (7) en (8) obtenemos la **ecuación vectorial** del plano:

$$\boxed{\vec{x}=\vec{a}+\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v}} \quad (\text{donde } \lambda,\ \mu\in\Re) \quad \textbf{EC. VECTORIAL} \qquad (9)$$

En la práctica, también esta ecuación vectorial no es útil en sí misma, pero sí si la desglosamos en sus tres componentes, obteniendo así las **ecuaciones paramétricas** del plano; para ellos, suponemos $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x=a+\lambda u_x+\mu v_x \\ y=b+\lambda u_y+\mu v_y \\ z=c+\lambda u_z+\mu v_z \end{array}\right\}} \quad \textbf{EC. PARAMÉTRICAS} \qquad (10)$$

Observaciones: 1ª) Dando valores a λ y μ ∈ $\Re$ se obtienen los infinitos puntos (x,y,z) que constituyen el plano.

2ª) Y viceversa, a un mismo punto (x,y,z) le tiene que corresponder los mismos λ y μ en las tres ecuaciones.

3ª) Desventaja: Un mismo plano puede tener infinitas formas paramétricas, todas ellas igualmente válidas.

Por otra parte, nótese que (7) nos indica que $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son combinación lineal, es decir, si formamos el determinante de orden 3 formado por los tres vectores, éste valdrá cero:

$$\overrightarrow{AX}=\lambda\,\vec{u}+\mu\,\vec{v} \Rightarrow \det[\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}]=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}=0 \qquad (11)$$

Y, desarrollando el determinante, y simplificando, siempre vamos a obtener una expresión del tipo:

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \quad \textbf{EC. GRAL. o IMPLÍCITA} \qquad (12)$$

que se llama **ecuación general** o **implícita** del plano, y es la forma más comúnmente utilizada para expresar un plano.

Observaciones: 1ª) Los infinitos puntos (x,y,z) que forman el plano han de verificar la igualdad anterior, y viceversa: si un punto (x,y,z) verifica la igualdad, entonces ∈ π (y, obviamente, en caso contrario, no pertenecerá).

2ª) Ventaja: La forma general o implícita es única (salvo simplificación de sus coeficientes).

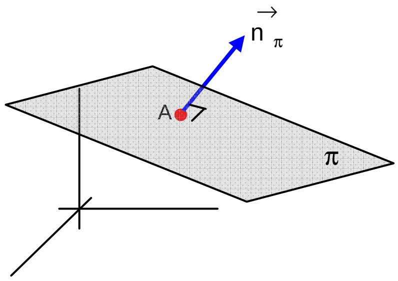
3ª) Veremos en el próximo subapartado que los coeficientes (A,B,C) representan las componentes de un vector ⊥ π, al que designaremos como $\vec{n}_\pi$, llamado **vector normal** del plano π.

Ejercicios final tema: 9 a 16

Ejercicios PAEG: 2A jun 99; 4B jun 2004 ↔ 4A sept 97; 4A jun 2012 (+área triángulo+volumen tetraedro+optimización)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 165: 1; págs. 177 y ss.: 23 y 32 (ec. gral. del plano); **pág. 169: 1 y 2** (dibujar rectas y planos); págs. 177 y ss.: 20, **25**, **26**, 29, **34**, **35**, 43 y 46; pág. 185: 5

Vector normal del plano $(\vec{n}_\pi)$ [8]:



Como puede verse en el dibujo adjunto, otra determinación muy habitual de un plano es dar un punto cualquiera sobre él (A ∈ π) y un vector $\vec{n}_\pi$ perpendicular al plano:

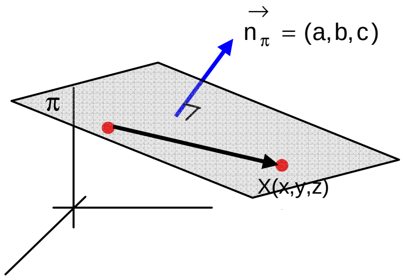
$$\pi = \left\{ A, \vec{n}_\pi \right\}$$ **Determinación normal del plano**

A continuación, vamos a probar algo que ya hemos adelantado en el subapartado anterior: **«Los coeficientes a, b y c de la ecuación general o implícita del plano, ax+by+cz+d=0, son las componentes de un vector ⊥ a dicho plano»**.

Dem:

Supongamos que nos dan la determinación normal del plano, es decir, nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (a,b,c) \\ A(x_0,y_0,z_0) \end{array}\right\}$$



como puede verse en el dibujo. Nótese que el punto $A(x_0,y_0,z_0)$ es fijo, y supongamos un punto genérico X(x,y,z) del plano, es decir, un punto que puede variar a lo largo del plano. Si consideramos el vector que une ambos puntos, es decir, $\vec{AX} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, es evidente que dicho vector será ⊥ a $\vec{n}_\pi$, con lo cual su producto escalar será nulo:

$$\vec{AX} \perp \vec{n}_\pi \;\Rightarrow\; \vec{AX} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \;\Rightarrow\; (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(a,b,c) = 0$$

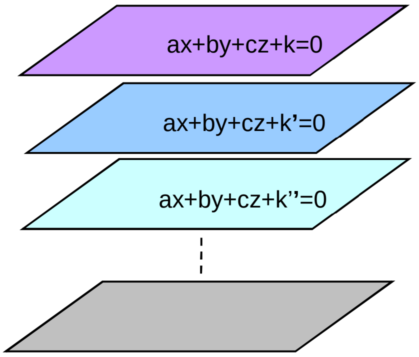
Efectuamos el producto escalar, y, para simplificar, renombramos la cantidad constante ax_0-by_0-cz_0 como d:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(a,b,c) = ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0 = 0 \;\Rightarrow\; ax+by+cz+d = 0$$

es decir, obtenemos la ecuación general o implícita del plano. (C.Q.D)

---

[8] Ver pág. 165 del libro de ed. Anaya.



Consecuencia: Familia o Haz de planos paralelos

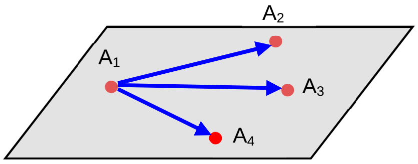
«La expresión ax+by+cz+K=0 representa una haz de infinitos planos, todos ellos paralelos, los cuales se obtienen dando valores a K»

Ejercicios final tema: 17 a 22

Ejercicios PAEG: 3B jun 2002; 4A sept 97; 3B jun 2002; 4B jun 2010

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 177 y ss.: 18, 21, 37, 41, 45 y 52; pág. 184: 1 a 4; págs. 206 y ss.: 31, 32, 33, 36, 40 y 62

Condición para que 4 puntos (o más) sean coplanarios:



Supongamos cuatro puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 no alineados[9]. Si además están sobre el mismo plano, es obvio que al formar tres vectores cualesquiera con ellos –por ejemplo, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ y $\overrightarrow{A_1A_4}$ (ver dibujo)[10]**-,** estos serán combinación lineal. Si colocamos los tres vectores formando una matriz 3x3, ello querrá decir que su rango será[11] exactamente 2:

$$\boxed{A_1, A_2, A_3 \text{ y } A_4 \text{ coplanarios}} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \text{ y } \overrightarrow{A_1A_4} \text{ son comb. lin.} \Leftrightarrow \boxed{\text{rg}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) = 2} \qquad (13)$$

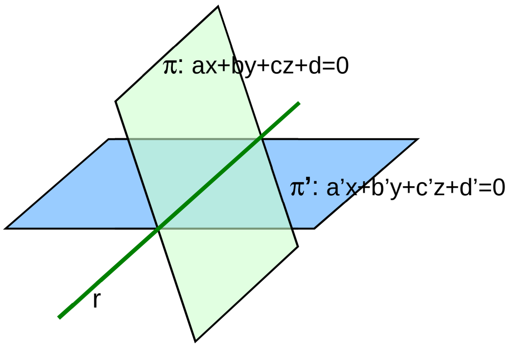
o lo que es igual, que su determinante será cero.

Ejercicios final tema: 23 y 24

Ejercicios libro ed. Anaya: págs. 177 y ss.: 27 (4 ptos. coplanarios, sin parámetro) y **36** (con parámetro)

III. ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LA RECTA (RECTA ∩ DE 2 PLANOS) [12]

Si dos planos π y **π'** son no paralelos, es decir, secantes, es evidente que van a definir una recta **r**, lo cual se conoce como **ecuación** o **forma implícita de la recta r**:



$$\boxed{r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}} \qquad \textbf{EC. IMPLÍCITA de la recta} \qquad (14)$$

De nuevo, la desventaja de esta forma es que no es única: hay infinitas parejas de planos que definen la misma recta.

---

[9] El caso en el que tres o más puntos están alineados ya se vio en el apdo. I.

[10] Naturalmente, también valdrían otras ternas, como por ejemplo $\overrightarrow{A_2A_1}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$ y $\overrightarrow{A_2A_4}$

[11] Nótese que no puede ser rango 1, porque ello supondría que están alineados.

[12] Ver págs. 158 y 185 del libro de ed. Anaya.

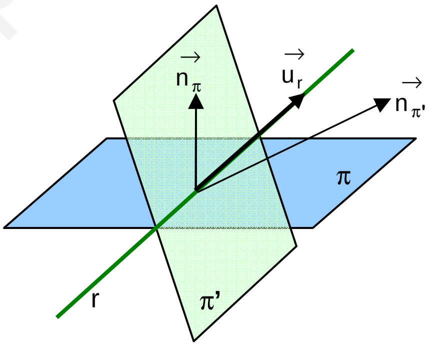
Ejemplo: Dados los planos $\left.\begin{array}{l}2x+y-5z=-4\\3x-y+2z=1\end{array}\right\}$ se pide:

a) Comprobar que son no paralelos, es decir, determinan una recta.

b) Resolver el sistema para hallar así la ecuación paramétrica de dicha recta.

Ejercicio final tema: 25

Ejercicios libro ed. Anaya: **págs. 177 y ss.: 16 y 58**



Observaciones: 1ª) Si lo único que queremos de una recta expresada en implícita es extraer un posible vector director $\vec{u}_r$ de ella, entonces, viendo el dibujo adjunto, es evidente que bastará con hacer el siguiente producto vectorial:

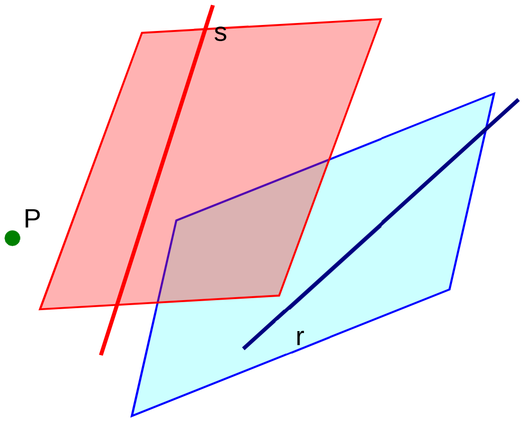
$$\boxed{\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_{\pi'}} \qquad (15)$$

2ª) Por otra parte, si lo que queremos es simplemente un punto cualquiera de la recta en forma implícita, podemos obtenerlo por tanteo, es decir, sin necesidad de resolver el sistema formado por dos planos, como en el **Ejercicio final tema:** 24

Ejercicios final tema: 26 a 29

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 159: 2 y 3; págs. 177 y ss.: **38** y 51; **pág. 185: 6**

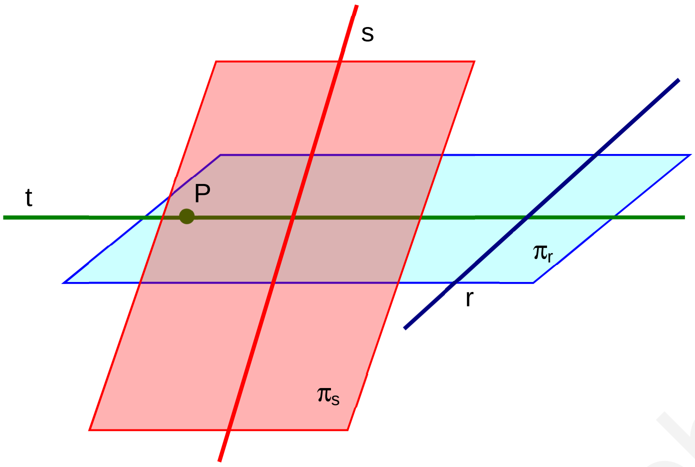
Recta que se apoya en dos rectas que se cruzan y en un punto:



Supongamos que nos dan dos rectas **r** y **s** que se cruzan en el espacio y un punto **P** exterior a ellas, y nos piden que hallemos la ecuación de la recta que se apoya en r y s y pasa por P. En el dibujo, hemos intentado mostrar que ambas rectas se cruzan trazando sendos planos auxiliares que las contienen.

1^{er} método: Utilizando la forma implícita de la recta:

Se trata de ir girando los planos auxiliares que contienen a ambas rectas de forma que sigan conteniendo a las rectas, pero además ambos pasen por P (es evidente que esto no siempre se podrá hacer, es decir, este problema no siempre tiene solución…):



Entonces, la recta pedida, **t**, será la intersección de los dos planos, es decir, vendrá dada en forma implícita por:

$$t: \begin{cases} \pi_r\text{: Plano que contiene a r y pasa por P} \\ \pi_s\text{: Plano que contiene a s y pasa por P} \end{cases}$$

Observaciones: 1ª) Como ya hemos dicho, este problema no siempre va a tener solución.

2ª) Hemos supuesto que las dos rectas se cruzan, pero lo dicho sería igualmente válido para el caso particular en que ambas rectas se corten.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas $r: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$, y pasa por P(1,0,2)

2º método: Utilizando la forma paramétrica y continua de la recta:

1º Pasamos r a paramétricas, obteniendo así un punto genérico de r, que, por tanto, dependerá de un parámetro, p. ej. λ

2º Pasamos s a paramétricas, obteniendo así un punto genérico de s, que, por tanto, dependerá de un parámetro, p. ej. μ

3º Hallamos la recta que pasa por los dos puntos anteriores, en continua. Obtendremos así una expresión que depende de λ y μ

4º Descomponemos la expresión anterior en dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, un sistema, que resolvemos, para hallar λ y μ

5º Sustituimos esos valores de λ y μ en la forma continua del 3^{er} paso, operamos y simplificamos. De esta forma, la recta pedida la daremos en forma continua.

Ejemplo: Volver a hacer el ejemplo anterior por este método. Comprobar que se obtiene la misma recta.

Ejercicios final tema: **30** a 32 (Recta que se apoya en otras dos y en un punto)
33 a 41 (Rectas y planos en general)
42 a 46 (Áreas y volúmenes)

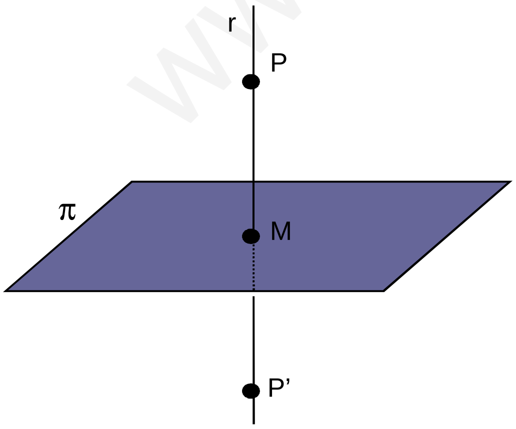
Ejercicios PAEG: 4A sept 2005; 4A jun 97; 4B jun 2009 (Rectas y planos en general)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 179: **42** y 54 (Rectas y planos en general)
pág. 206 y ss.: **27**, 46, **51**, 52, 54 y 59 (Áreas y volúmenes)

IV. PROBLEMAS SOBRE PROYECCIONES

IV.1 Punto simétrico respecto a un plano. Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

Nos dan el punto P y la ecuación del plano π, y tenemos que hallar P', punto simétrico de P respecto del plano π. Procederemos así:



1º) Hallamos la ecuación paramétrica de la recta r $\perp$ a π y que pasa por P.

2º) Hallamos el punto M, **proyección ortogonal de P sobre π**, sustituyendo para ello las ecuaciones paramétricas recién obtenidas de r en la ecuación del plano.

3º) Utilizamos la fórmula del punto medio para hallar P':

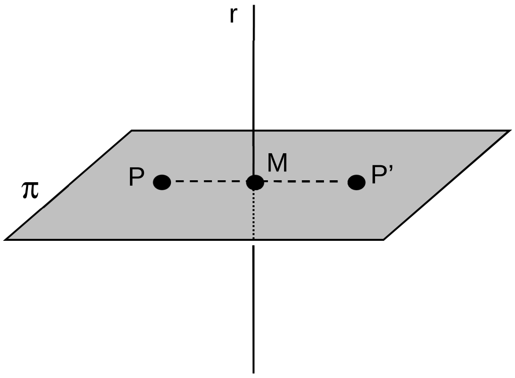
$$M=\frac{P+P'}{2}\Rightarrow P'=2M-P$$

Ver **ejercicio resuelto** 2 pág. 199 del libro de ed. Anaya

Ejercicios final tema: 47 y 48

IV.2) Punto simétrico respecto a una recta. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Nos dan la recta r y el punto P, y tenemos que hallar el punto simétrico P' respecto de dicha recta. Procederemos así:



1º) Hallamos la ecuación general del plano π que es ⊥ a r y que contiene a P.

2º) Hallamos el punto M, **proyección ortogonal de P sobre r**, resolviendo para ello el sistema formado por r y π.

3º) Utilizamos la fórmula del punto medio para hallar P':

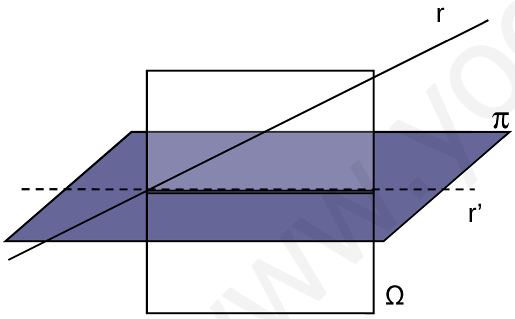
$$M=\frac{P+P'}{2}\Rightarrow P'=2M-P$$

Ver **ejercicio resuelto** 3 pág. 199 del libro de ed. Anaya

Ejercicios final tema: 49 y 50

IV.3) Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

Nos dan la recta r y el plano π, y tenemos que hallar r', proyección de r sobre π.



Para ello, calculamos en primer lugar el plano Ω que contiene a r y es ⊥ a π. La recta r' será entonces la intersección de dicho plano y π, expresada por tanto en forma implícita:

$$\mathbf{r'=\Omega\cap\pi}$$

Ver **ejercicio resuelto** 8 pág. 201 del libro de ed. Anaya

Ejercicios final tema: 51 y 52

Ejercicios PAEG: 4A sept 2012, 4B sept 98; 1B jun 2002; 2B sept 2000; 4B jun 2006 (proyección ⊥ de P sobre π)
3B jun 2000; 3B jun 2001; 4B sept 2006 (proyección ⊥ de P sobre r)
1A jun 99 (proyección ⊥ de r sobre π)

Ejercicios libro ed. Anaya: **págs. 207 y ss.: 44, 47 y 5**7

52 EJERCICIOS de RECTAS y PLANOS 2º BACH.

NOTA: En los ejercicios de Geometría se recomienda comenzar, antes de nada, por:

- Imaginarse la situación; podemos ayudarnos, para ello, de bolígrafos (para representar rectas), la mesa o una hoja de papel (planos), una goma de borrar (puntos), etc.
- O bien, **procurar representar gráficamente**, de una forma aproximada, **la situación**. Esto último es lo más recomendable (aunque en la PAEG no se exija…).

A continuación, tendremos que preguntarnos, ¿qué nos piden?:

- **Si nos piden una recta: Tendremos que obtener**, a partir de los datos, **un punto de ella y un posible vector director**.
- **Si nos piden un plano:** Tendremos que decidir, en función de los datos, cuál de las dos determinaciones más usuales nos interesa más:

  - **Un punto del plano y un vector normal** $\vec{n}_{\pi}$
  - **Un punto del plano y dos vectores direccionales.**

Por último, **se recomienda** vivamente **comprobar** que las ecuaciones obtenidas satisfacen los datos y las condiciones del enunciado.

Ecuación de la recta:

1. **Razonar** si las siguientes situaciones pueden ser, o no, una posible determinación de una recta. Puede ser útil un dibujo:

a) Recta r // a otra r' y que pasa por un punto P exterior a ésta última.

b) Recta r $\perp$ a otra r' y que pasa por un punto P exterior a ésta última.

c) Recta r que corta $\perp$ a otra r' y pasa por un punto P exterior a esta última.

d) Recta r $\perp$ a un plano π y que pasa por un punto P.

e) Recta r // a un plano π y que pasa por un punto P exterior a dicho plano.

f) Recta r $\cap$ de dos planos π y π' no paralelos.

*(Sol: **a)** SÍ; **b)** NO; **c)** SÍ; **d)** SÍ; **e)** NO; **f)** SÍ)*

2. Dado el punto P(–1,1,2) y el vector $\vec{u}=(1,3,2)$, se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos (–3,–5,–2) y (2,10,6) pertenecen a la recta.

3. Dados los puntos A(1,−2,4) y B(3,2,10) se pide: **a)** Hallar la recta determinada por ambos, en paramétricas y continua. **b)** Obtener tres puntos cualesquiera de dicha recta. **c)** Estudiar si los puntos (1,2,3) y (2,1,0) pertenecen a la recta. *(Soluc: c) NO; NO)*

4. Con los datos del ejercicio anterior, hallar otras dos posibles formas paramétricas alternativas, y volver a hacer los apartados b y c.

5. Hallar las ecuaciones paramétricas y continua de los ejes de coordenadas.

6. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(2,3,4), B(1,−1,5) y C(5,5,4). Hallar también las coordenadas del baricentro de dicho triángulo.

(Sol: M_a:(x−2)/2=(y−3)/−2=(z−4)/1; M_b:(x−1)/5=(y+1)/10=(z−5)/−2; M_c:(x−5)/7=(y−5)/8=(z−4)/−1; G(8/3,7/3,13/3))

7. *(**S**)* Determinar los valores de **m** para que los puntos A(m,2,−3), B(2,m,1) y C(5,3,−2) estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. *(Soluc: m=6)*

Ecuación del plano:

8. Razonar si las siguientes situaciones pueden constituir una posible determinación de un plano. Intentar hacer un dibujo aclaratorio:

a) Plano π que contiene a una recta r y a un punto P exterior a ésta.

b) Plano π que contiene a una recta r y a un punto P de ésta.

c) Plano $\pi \perp$ a una recta r y que pasa por un punto P.

d) Plano π // a otro π' y que contiene a un punto P exterior a éste último.

e) Plano π // a una recta r' y que contiene a un punto P exterior a ésta.

f) Plano π que contiene a dos rectas r y r' paralelas.

g) Plano π que contiene a dos rectas r y r' secantes.

h) Plano π que contiene a una recta r y es paralelo a otra r' que se cruza con la anterior (esto es, ambas rectas no se tocan).

i) Plano $\pi \perp$ a otro π' y que pasa por dos puntos P y Q.

*(Sol: **a)** SÍ; **b)** NO; **c)** SÍ; **d)** SÍ; **e)** NO; **f)** SÍ; **g)** SÍ; **h)** SÍ; **i)** SÍ)*

9. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por el punto P(1,2,3) y los vectores $\vec{u}=(2,-1,5)$ y $\vec{v}=(3,2,4)$. *(Soluc: 2x−y−z+3=0)*

10. Hallar la ecuación paramétrica y general del plano determinado por los puntos A(2,1,3), B(1,1,1) y C(5,1,8). *(Soluc: y=1)*

11. Dados los puntos A(5,−1,−1), B(1,0,1) y C(−2,−3,0) se pide:

a) Hallar la ecuación paramétrica y general del plano que determinan. *(Soluc: x−2y+3z−4=0)*

b) Estudiar si los puntos (3,1,1) y (1,2,3) pertenecen a dicho plano. *(Soluc: SÍ; NO)*

c) Hallar otros dos puntos cualesquiera de este plano.

d) Comprobar que el vector formado por los 3 coeficientes de la ecuación general es ⊥ al plano.

12. Hallar una ecuaciones paramétricas para el plano x−2y+3z−1=0 *(Soluc: $x=1+2\lambda-3\mu$, $y=\lambda$, $z=\mu$)*

13. Hallar la ecuación de los planos cartesianos OXY, OYZ y OXZ en paramétricas e implícita.

14. ***(S)*** Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta x=2t, y=3+t, z=1−t, y por el punto A(2,−1,2).
(Soluc: 3x+4y+10z−22=0)

15. ***(S)*** Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=3 \\ z=1+2\lambda \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\ \ -\lambda \end{array}\right\}$

y que contiene al punto P(2,3,4). *(Soluc: −2x−5y+z+15=0)*

16. ***(S)*** Dadas las rectas

$$r:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1} \qquad s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$$

determinar la ecuación del plano que contiene a **r** y es paralelo a **s**. *(Soluc: 4x−7y−2z+13=0)*

Vector normal $\vec{n}_\pi$

17. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n}_\pi=(2,-3,1)$ y que pasa por el punto P(1,1,−3)

(Soluc: 2x−3y+z+4=0)

18. Hallar la ecuación del plano paralelo a x+2y+3z+4=0 y que pasa por el punto (3,0,−1) *(Soluc: x+2y+3z=0)*

19. Comprobar que los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ del ejercicio 15 son ⊥ al vector normal $\vec{n}_\pi$ del plano.

20. ***(S)*** Dada la recta

$$r:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$$

y los puntos A(3,1,2) y B(1,5,6), hallar la ecuación del plano que contiene los puntos A y B y es perpendicular a la recta r. *(Soluc: 2x+3y−2z−5=0)*

21. ***(S)*** Hallar el plano que pasa por los puntos A(0,2,0) y B(1,0,1) y es perpendicular al plano x−2y−z=7.

(Soluc: 2x+y−2=0)

22. ***(S)*** Dados el plano π: 2x−3y+z=0 y la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array}\right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. *(Soluc: 5x+3y−z−12=0)*

23. Hallar el valor de **a** para que los puntos A(1,2,−1), B(2,1,a), C(0,4,0) y D(2,0,−2) sean coplanarios.

(Soluc: $\forall a\in IR$)

24. *(**S**)* ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros **a**, **b** y **c** para que los puntos A(1,0,1), B(1,1,0), C(0,1,1) y D(a,b,c) sean coplanarios? *(Soluc: a+b+c=2)*

Recta en implícitas:

25. **a)** Pasar la siguiente recta, expresada en implícitas, a paramétricas, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+z-3=0\\ x+y+3z-4=0\end{array}\right\}$$

b) Pasar $\left.\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=\;-2\lambda\\ z=3+\lambda\end{array}\right\}$ a implícitas.

c) Ídem con $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$

26. Dada $\left.\begin{array}{l}3x+2y-z=1\\ x-2y+3z=0\end{array}\right\}$ se pide:

a) Hallar un posible vector director.

b) Hallar un punto cualquiera de r

c) Con la información anterior, indicar unas ecuaciones paramétricas para dicha recta.

27. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\left.\begin{array}{l}x-y+2z+1=0\\ 3x+y-z-1=0\end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l}2x+y-3z-4=0\\ x+y+z=0\end{array}\right\}$

hallar la ecuación del plano que contiene a **r** y es paralelo a **s**. *(Soluc: 27x+17y−23z−17=0)*

28. *(**S**)* Se consideran el plano π: 2x−y+z+1=0, la recta s: x−3y=0, z=1 y el punto A(4,0,−1). Hallar el plano que pasa por A, es paralelo a la recta s y perpendicular al plano π. *(Soluc: x−3y−5z−9=0)*

29. *(**S**)* Determinar la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto A(1,0,2) y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta $\left.\begin{array}{l}x=2z-1\\ y=z-2\end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1−2λ, y=λ, z=2+3λ)*

Recta que se apoya en otras dos rectas y un punto:

30. *(**S**)* Determinar la recta que pasa por el punto A(1,−1,0) y corta a las rectas

$$r: x=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}\qquad s:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=z-1$$

(Soluc: x=1+λ, y=−1+4λ, z=7λ, o bien 3x+y−z−2=0, x−2y+z−3=0)

31. *(**S**)* Dado el punto P(1,1,1) y las rectas $r: \left.\begin{aligned} x&=1+\lambda \\ y&=2-\lambda \\ z&=1+2\lambda \end{aligned}\right\}$ $s: \left.\begin{aligned} x&=\mu \\ y&=3\mu \\ z&=2-\mu \end{aligned}\right\}$

hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y corta a **r** y a **s**. *(Soluc: x=1, y=1+λ, z=1)*

32. Ídem con las rectas $r: \begin{cases} 3x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases}$ y $\left.\begin{aligned} x&=3+t \\ y&=\phantom{3+{}}t \\ z&=1+t \end{aligned}\right\}$ y el punto P(1,0,−1) *(Soluc: x=1+3 λ, y=λ, z=−1+3 λ)*

Rectas y planos, en general:

33. Hallar unas ecuaciones implícitas para los ejes de coordenadas.

34. Hallar las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta ⊥ al plano 2x+3z−4=0 y que pasa por P(1,−1,2)

35. *(**S**)* Consideremos el plano π de ecuación 20x+12y+15z−60=0. Hallar:

a) Los puntos *A,B,C* de intersección de π con los ejes coordenados *OX, OY, OZ*. *(Sol: A(3,0,0), B((0,5,0), C(0,0,4))*

b) La distancia entre la recta *OB* y el eje *OX*. *(Sol: cero, pues ambas rectas se cortan)*

36. *(**S**)* Consideremos las rectas de ecuaciones

$$r: \left.\begin{aligned} x+y-z+3&=0 \\ -2x+z-1&=0 \end{aligned}\right\} \qquad s: x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

a) Hallar **n** para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de **n** obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas. *(Soluc: n=1; 11x+y−6z+8=0)*

37. Un plano corta a los ejes *X,Y,Z* en los puntos x=a, y=b, z=c respectivamente. Deducir que su forma general o implícita es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

la cual se conoce como *ecuación segmentaria.*

38. *(**S**)* Dados los planos de ecuaciones 3x−y+z=1 y x+y−2z=0, hallar un vector cuya dirección sea paralela a ambos. Explicar cómo se ha hecho. *(Soluc: cualquier vector proporcional al (1,7,4))*

39. *(**S**)* Se considera el plano de ecuación x+3y+z=7, y los puntos A(1,1,1) y B(2,1,−1). Se pide ver que A y B están al mismo lado del plano. *(Ayuda: calcular los planos paralelos al dado que pasan por A y B respectivamente, y comparar sus términos independientes)*

40. *(**S**)* Hallar los valores de **a** para que los planos −x+y+az=0 y ax+2y+2z=0 corten al plano x−y+z=1 en dos rectas perpendiculares. *(Soluc: a=6)*

41. *(**S**)* Calcular un punto P de la recta r: x=0, z=0 de forma que el plano que contiene a P y a la recta s: x+y=1, 2x−z=−1 sea paralelo a la recta t: y+z=1, −x+y+z=0. *(Soluc: P(0,2,0))*

Áreas y volúmenes:

42. *(**S**)* Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano 2x+y+3z−6=0 con los ejes de coordenadas. *(Soluc: $3\sqrt{14}\ u^2$)*

43. *(**S**)* Un triángulo tiene vértices (0,0,0), (1,1,1) y el tercer vértice situado en la recta x=2y, z=1. Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$. *(Soluc: Hay 2 soluc: (0,0,1) y (2,1,1))*

44. *(**S**)* Hallar un plano que pasando por A(0,2,0) y B(0,0,2) corte al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo ABC valga 4. *(Advertencia: Hay 2 soluciones)* *(Soluc: $x/\sqrt{6}+y/2+z/2=1$ y $x/-\sqrt{6}+y/2+z/2=1$)*

45. *(**S**)* Determinar un punto de la recta x/2=y=z/2 que forme con los puntos (0,0,0), (1,0,0) y (0,1,−1) un tetraedro de volumen 1. *(Soluc: Hay 2 soluc: (4,2,4) y (−4,−2,−4))*

46. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,3), siendo equilátero el triángulo formado por los puntos en que corta a los ejes cartesianos. Calcular el volumen determinado por dicho plano y los ejes coordenados. *(Soluc: x+y+z=6; 36 u^3)*

Problemas de proyecciones:

47. *(**S**)* Dado el plano de ecuación x+2y+3z=1 y el punto A(1,1,1), hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (la proyección ortogonal de A sobre él). *(Soluc: A'(9/14,4/14,−1/14))*

48. *(**S**)* Calcular el área del triángulo de vértices A', B', C', proyección ortogonal del triángulo de vértices A(1,1,1), B(1,1,2), C(1,2,1), sobre el plano x+y+z=1. *(Soluc: A'(1/3,1/3,1/3), B'(0,0,1), C'(0,1,0); área= $\sqrt{3}/6\ u^2$)*

49. *(**S**)* Hallar la proyección del punto P(2,−1,3) sobre la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{array}\right\}$ y calcular la distancia del punto P a la recta r.

(Soluc: P'(3,-2,4); distancia= $\sqrt{3}$ u.)

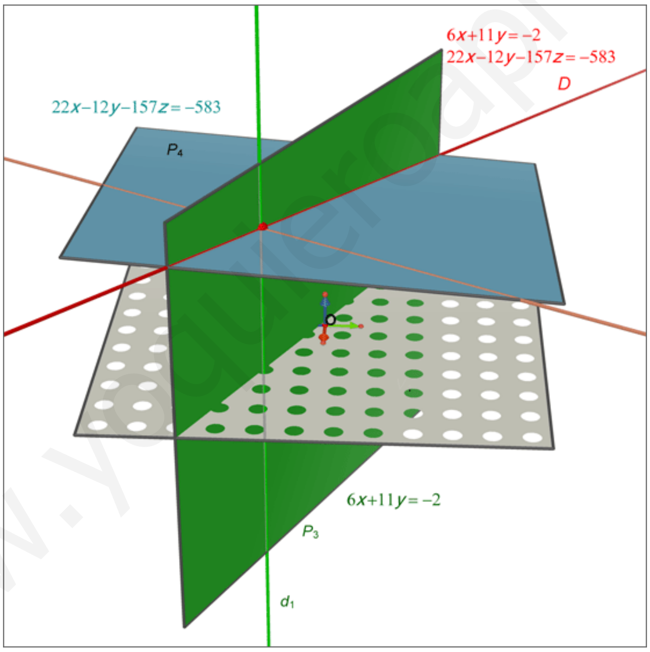
50. *(**S**)* Hallar el punto simétrico de (2,0,3) respecto de la recta $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ *(Soluc: (1,5,1))*

51. *(**S**)* Dados los puntos A(3,7,−2) y B(−1,9,1), calcular la longitud del segmento A'B', proyección ortogonal del segmento AB sobre el plano x+3y−z−4=0. *(Soluc: A'(1,1,0), B'(−32/11,36/11,32/11); longitud= $\sqrt{318}/11$ u)*

52. *(**S**)* Hallar las ecuaciones de la recta r', proyección ortogonal de r: $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=3 \end{array}\right\}$ sobre el plano x−y+2z+4=0

(Soluc: 3x−y−2z+1=0, x−y+2z+4=0)

POSICIONES RELATIVAS de RECTAS y PLANOS



MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

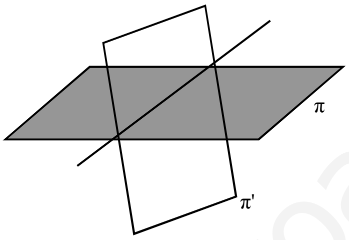
Supongamos, por ejemplo, que queremos estudiar la posición relativa de una recta que venga dada en implícitas (es decir, 2 ecuaciones) y un plano (1 ecuación). En principio, podríamos resolver el sistema 3x3 para ver los puntos comunes a ambos. Ahora bien, esto podemos hacerlo más fácilmente mediante el teorema de Rouché-Fröbenius, que nos permite saber el número de soluciones –es decir, el número de puntos en común entre la recta y el plano– sin necesidad de resolver dicho sistema. Y esto es precisamente lo que haremos en este tema.

I) POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS[1]

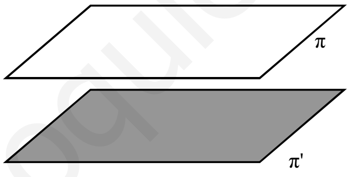
$$\left.\begin{array}{l}\pi: \quad ax+by+cz+d=0\\ \pi': \ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{array}\right\}$$

1) POR RANGOS: estudiamos $\text{rg}\left(\begin{array}{ccc:c}a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\end{array}\right)$ (1)

Hay 3 casos: i) **rg M=rg M*=2**<3 ⇒ S.C.I. uniparamétrico ⇒ se cortan en una recta ⇒ **SECANTES**:



ii) **rg M=1≠rg M*=2** ⇒ S.I. ⇒ ∄ soluc. ⇒ no tienen puntos comunes ⇒ **PARALELOS**:



iii) **rg M=rg M*=1**<3⇒S.C.I. biparamétrico ⇒ tienen en común un plano ⇒ **COINCIDENTES**:

2) POR $\overrightarrow{n_\pi}$:

i) si $\overrightarrow{n_\pi}=(a,b,c)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}=(a',b',c')$ no son proporcionales ⇒ **SECANTES**

ii) " " " " " " son proporcionales ⇒ $\begin{cases}\text{si d y d' son proporcionales} \Rightarrow \textbf{COINCIDENTES}\\ \text{" " " " no son proporcionales} \Rightarrow \textbf{PARALELOS}^{2}\end{cases}$

Ejercicios final tema: 1

Ejercicios PAEG: 4A jun 2009 (con parámetro)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 177 y ss.: 22, 44 y 47

---

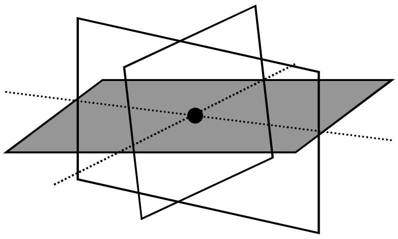
[1] Ver pág. 166 del libro de ed. Anaya.

[2] Nótese que en realidad todo esto coincide con el estudio por rangos, si observamos la matriz (1)

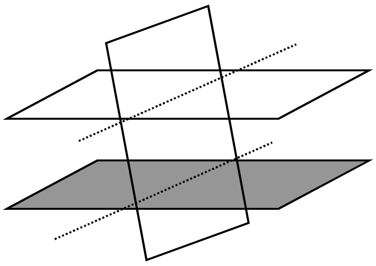
II) POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS[3]

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\quad ax+by+cz+d=0\\ \pi':\ a'x+b'y+c'z+d'=0\\ \pi'':a''x+b''y+c''z+d''=0\end{array}\right\}\qquad \text{Estudiemos rg}\begin{pmatrix}a & b & c & \vdots & d\\ a' & b' & c' & \vdots & d'\\ a'' & b'' & c'' & \vdots & d''\end{pmatrix}$$

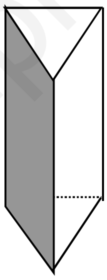
i) **rg M=rg M*=3** $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ soluc. única, es decir, **se cortan en un punto**:



ii) **rg M=2≠rg M*=3** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ $\nexists$ soluc. es decir, no tienen puntos comunes:

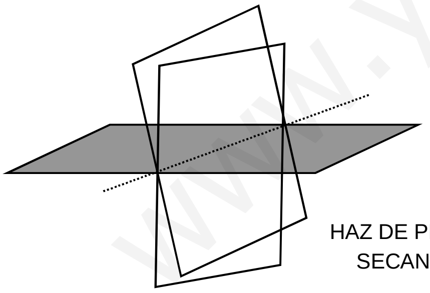


o bien:



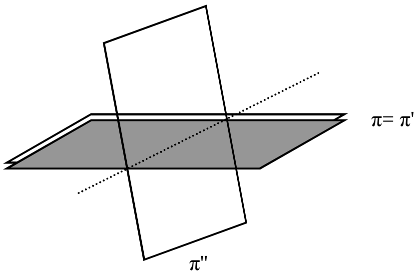
(prisma)

iii) **rg M=rg M*=2**<3 $\Rightarrow$ S.C.I. uniparamétrico $\Rightarrow$ **se cortan en una recta**:



HAZ DE PLANOS SECANTES[4]

caso particular:



---

[3] Este caso no viene explicado en el libro ed. Anaya, pero puede consultarse el ejercicio resuelto 10 de la pág. 173

[4] Supongamos dos planos π y π' secantes (es decir, se cortan en una recta); si queremos que un 3$^{\underline{er}}$ plano cualquiera π'' también contenga a esa recta, entonces debido a iii) habrá de ser combinación lineal de π y π':

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\ \ ax+by+cz+d=0\\ \pi':a'x+b'y+c'z+d'=0\end{array}\right\}\quad \pi''=\lambda\pi+\mu\pi'=0\Rightarrow\boxed{\lambda\,(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0}$$

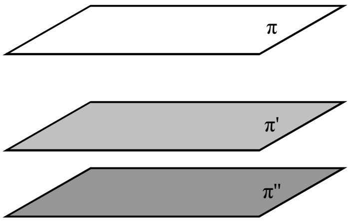
(ECUACIÓN DEL HAZ DE PLANOS DEFINIDO POR π y π')

<u>Ejemplo</u>: ejercicio 4 (ver también el ejercicio 96 de la pág. 211 del libro de ed. Anaya)

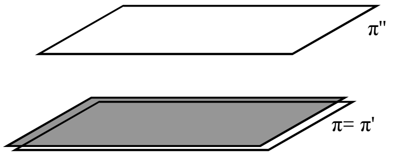
iv) **rg M=1≠rg M*=2** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow \nexists$ soluc. es decir, no tienen puntos comunes

¿En qué se diferencia del caso ii)? Hay que tener en cuenta que:

rg M=1 $\Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}$, $\overrightarrow{n_{\pi'}}$ y $\overrightarrow{n_{\pi''}}$ son proporcionales $\Rightarrow$ los tres planos son paralelos:



caso particular:



v) **rg M=rg M*=1**<3 $\Rightarrow$ S.C.I. biparamétrico $\Rightarrow$ tienen en común un plano $\Rightarrow$ **COINCIDENTES**

NOTA: por $\overrightarrow{n_\pi}$ no compensa estudiarlo pues es complicado.

Ejercicios final tema: 2, 3, 10, 11 y 12
Ejercicios PAEG: 4A jun 99, 4B sept 2000 (con parámetro)
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 167: 2; págs. 177 y ss.: 28 (sin parámetro) y **48** (con parámetro)

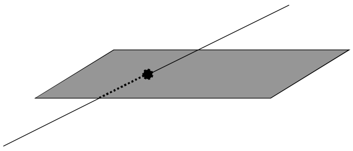
III) POSICIÓN RELATIVA RECTA-PLANO[5]

1) POR RANGOS: esta opción interesa cuando la recta viene dada en implícitas, es decir, como intersección de dos planos:

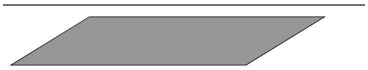
$$\left.\begin{array}{rl} r: & ax+by+cz+d=0 \\ & a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \pi: & a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right\} \quad \text{Estudiemos rg} \begin{pmatrix} a & b & c & \vdots & d \\ a' & b' & c' & \vdots & d' \\ a'' & b'' & c'' & \vdots & d'' \end{pmatrix}$$

Hay 3 posibilidades:

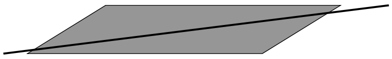
i) **rg M=rg M*=3** $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ soluc. única, es decir, **SE CORTAN**:



ii) **rg M=2≠rg M*=3** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ ningún punto en común $\Rightarrow$ **r // π**



iii) **rg M=rg M*=2**<3 $\Rightarrow$ S.C.I. uniparamétrico $\Rightarrow$ **r ⊂ π**



NOTA: no hay más casos, pues es imposible que rg M=1 (téngase en cuenta que el hecho de que *r* venga dada como intersección de dos planos garantiza que rg M al menos es 2)

---

[5] Este caso no viene explicado en el libro ed. Anaya, pero pueden consultarse los ejercicios resueltos 2 y 3 de la pág. 167 y 11 de la pág. 174

2) POR VECTORES: esta opción interesa cuando la recta viene dada en paramétricas o continua:

$$r:\left.\begin{array}{l}x=a+\lambda u\\ y=b+\lambda v\\ z=c+\lambda w\end{array}\right\} \qquad \pi: a'x+b'y+c'z+d'=0$$

i) si $\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\neq 0 \Rightarrow$ **SE CORTAN**

ii) si $\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0$ y además $\begin{cases}(a,b,c)\in\pi\Rightarrow \mathbf{r\subset\pi}\\ (a,b,c)\notin\pi\Rightarrow \mathbf{r\,//\,\pi}\end{cases}$

Ejercicios final tema: 4, 5, 7, 8 y 9

Ejercicios PAEG: 3B sept 2003, 4A jun 2010 (sin parámetro); **4B sept 2001, 3B sept 2002, 4A sept 2008, 4B sept 2010, 4B jun 2012, 4A jun 2011** (con parámetro)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 167: 1; págs. 177 y ss.: 24, 39, 40 (sin parámetro) y **50** (con parámetro)

IV) POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS[6]

Razónese previamente que sólo caben cuatro posibilidades.

1) POR RANGOS: esta opción interesa cuando ambas rectas vienen dadas en implícitas:

$$\left.\begin{array}{l}r:\ ax+by+cz+d=0\\ \quad a'x+b'y+c'z+d'=0\\ s:\ a''x+b''y+c''z+d''=0\\ \quad a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0\end{array}\right\} \quad \text{Estudiemos } rg\left(\begin{array}{ccc:c}a&b&c&d\\ a'&b'&c'&d'\\ a''&b''&c''&d''\\ a'''&b'''&c'''&d'''\end{array}\right)$$

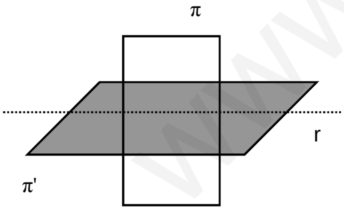
y teniendo en cuenta que rg M al menos es 2 (dado que ambas rectas vienen dadas en implícitas), caben las siguientes posibilidades:

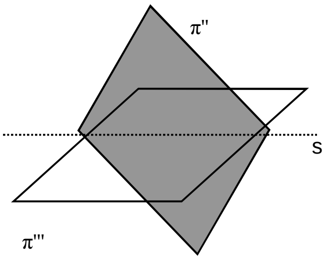
i) **rg M=3≠rg M*=4** $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ $\nexists$ soluc. es decir, no tienen puntos comunes $\Rightarrow$ **SE CRUZAN** [debido a (*****)]

ii) **rg M=rg M*=3** $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ soluc. única, es decir, un punto en común $\Rightarrow$ **SE CORTAN**

(*) En el caso i) no pueden ser ambas rectas paralelas, ya que $\boxed{r\,//\,s \Leftrightarrow \text{rg } M=2}$

DEM: Supongamos r // s:





$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_\pi}\text{ y }\overrightarrow{n_{\pi'}}\perp r\\ \\ \overrightarrow{n_{\pi''}}\text{ y }\overrightarrow{n_{\pi'''}}\perp s\end{array}\right\}\Rightarrow$$

los 4 vectores $\overrightarrow{n_\pi}$ están en un mismo plano (el $\perp$ a ambas rectas) $\Rightarrow$ sólo puede haber dos de ellos l.i. $\Rightarrow$ rg M=2 (C.Q.D.)

(Por la misma razón, en el caso iii) ambas rectas son paralelas)

---

[6] Ver págs. 162 y 163 del libro de ed. Anaya.

iii) **rg M=2≠rg M^*=3** ⇒ S.I. ⇒ ∄ soluc. ⇒ no hay puntos comunes ⇒ **PARALELAS** [debido también a (*****)]

iv) **rg M=rg M^*=2**<3 ⇒ S.C.I. uniparamétrico ⇒ tienen en común una recta ⇒ **COINCIDENTES**

2) POR VECTORES[7]**:** esta opción interesa cuando las dos rectas vienen dadas en paramétricas o continua:

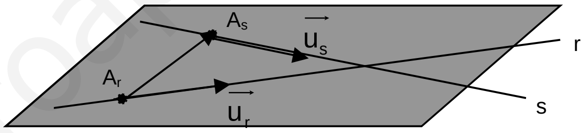
$$\left.\begin{array}{l} r:\vec{x}=A_r+\lambda\overrightarrow{u_r}\\ s:\vec{x}=A_s+\lambda\overrightarrow{u_s}\end{array}\right\}$$

i) $\left[\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=2\ \text{ y}\right]$ $\boxed{\mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=3 \Rightarrow \textbf{SE CRUZAN}}$

DEM: $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=3 \Rightarrow \mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=2 \Rightarrow$ r y s no son paralelas, es decir se cortan o se cruzan; no pueden cortarse pues entonces $\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ serían coplanarios, es decir sería $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2$

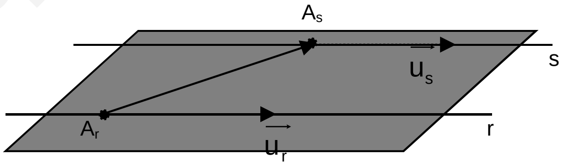
ii) $\boxed{\mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=2\ \text{ y }\ \mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2 \Rightarrow \textbf{SE CORTAN}}$

DEM: $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=2 \Rightarrow$ r y s no son paralelas, es decir se cortan o se cruzan; en este caso se cortan pues $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2 \Leftrightarrow \overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ son coplanarios:



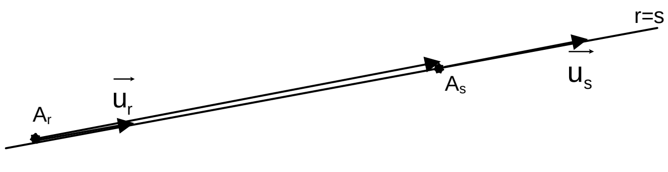
iii) $\boxed{\mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=1\ \text{ y }\ \mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2 \Rightarrow \textbf{PARALELAS}}$

DEM: $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=1 \Rightarrow$ r y s son paralela o coinciden; en este caso son paralelas pues $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=2$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ son coplanarios:



iv) $\boxed{\mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})=1\ \text{ y }\ \mathbf{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=1 \Rightarrow \textbf{COINCIDENTES}}$

DEM: $\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{A_rA_s})=1 \Rightarrow \overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ tienen la misma dirección:



Ejercicios final tema: 6

Ejercicios PAEG: 2A jun 98, 1B sept 98, 4A sept 2006, 4A jun 2007 (sin parámetro); **4B sept 2009, 2B sept 2001** (con parámetro)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 163: 1 y 2; págs. 176 y ss.: 12, 13, 14, 17, 30, 31, 33 (sin parámetro) y **53** (con parámetro)

---

[7] Ver págs. 160 y 161 del libro ed. Anaya y ejercicios resueltos 6 de la pág. 171 y 9 de la pág. 173

POSICIÓN RELATIVA de RECTAS y PLANOS 2º BACH.

1. Estudiar la posición relativa de los siguientes planos; caso de ser secantes, hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que definen:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-y+2z-1=0 \\ x+y-5z+4=0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=-4 \\ -3x-3y+15z=1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=-4 \\ -3x-3y+15z=12 \end{array}\right\}$

(Soluc: secantes; paralelos; coincidentes)

2. Estudiar la posición de los siguientes planos:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x-5y-3z=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: se cortan en el origen)

3. ***(S)*** Determinar el valor de *k* para que los siguientes planos se corten a lo largo de una recta:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \\ kx+10y+4z=11 \end{array}\right\}$$

(Soluc: k=7)

4. ***(S)*** Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta determinada por los planos

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z-1=0 \\ x-y-2=0 \end{array}\right\}$$

(Soluc: x+3y+2z=0)

5. Determinar la posición relativa de r y π en los siguientes casos*;* si se cortan, hallar el punto de intersección:

a) r: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=4 \\ x+y-2z=2 \end{array}\right\}$ π: $x-y+8z=1$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=1+3t \\ z=t \end{array}\right\}$ π: $3x+2y-11z-5=0$

c) r: $\left.\begin{array}{l} x=5+\lambda \\ y=-3 \\ z=-\lambda \end{array}\right\}$ π: $\left.\begin{array}{l} x=1-2\alpha+\beta \\ y=3+3\alpha+3\beta \\ z=8+4\alpha+\beta \end{array}\right\}$

(Soluc: paralelos; se cortan en (6,10,3); $r\subset\pi$)

6. Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Caso de ser secantes, encontrar el punto de intersección:

a) r: $\left.\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=2+4\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x=7-3\mu \\ y=10-4\mu \\ z=-5+2\mu \end{array}\right\}$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=-4+6\lambda \\ y=-5+8\lambda \\ z=8-4\lambda \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{l} x=3+\mu \\ y=5+2\mu \\ z=3-\mu \end{array}\right\}$

c) r: $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x-z+1=0 \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{r} 3x-z=0 \\ 3y-2z=0 \end{array}\right\}$

d) r: $\left.\begin{array}{r} 2x-z=5 \\ x+5y-2z=7 \end{array}\right\}$ s: $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=4 \\ 7x+4y+5z=6 \end{array}\right\}$

(Soluc: coincidentes; se cortan en (2,3,4); se cruzan; se cruzan)

7. ***(S)*** Calcular la ecuación del plano que pasa por $(3,7,-5)$ y es paralelo al plano π: $2x+3y+z+5=0$. Además, hallar la posición relativa entre el plano que se acaba de calcular y la recta r: $\left.\begin{array}{r}3x+2y+1=0\\ 8x-2y-2z+2=0\end{array}\right\}$

(Soluc: $2x+3y+z-22=0$; se cortan)

8. ***(S)*** Se considera la recta r: $\left.\begin{array}{r}x-2y-2z=0\\ x+5y-z=0\end{array}\right\}$ y el plano π: $2x+y+mz=n$. Se pide:

a) ¿Para qué valores de m y n, r y π son secantes?

b) ¿Para qué valores de m y n, r y π son paralelos?

c) ¿Para qué valores de m y n, π contiene a la recta r?.

(Soluc: $m\neq-23/7$ y $\forall n$; $m=-23/7$ y $n\neq0$; $m=-23/7$ y $n=0$)

9. ***(S)*** Dado el plano π: $x+y+mz=n$ y la recta r: $x/1=(y-2)/-1=z/2$

a) Calcular m y n para que π y r sean secantes

b) Calcular m y n para que π y r sean paralelos

c) Calcular m y n para que π contenga a r.

(Soluc: $m\neq0$ y $\forall n$; $m=0$ y $n\neq2$; $m=0$ y $n=2$)

10.***(S)*** Determinar la posición relativa de los planos:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi: & 2x+3y+z-1=0\\ \pi': & x-y+z+2=0\\ \pi'': & 2x-2y+2z+3=0\end{array}\right\}$$

(Soluc: π' // π'' y π corta a ambos)

11.***(S)*** Estudiar, para los diferentes valores de *a*, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi: & ax+y+z=1\\ \pi': & x+ay+z=1\\ \pi'': & x+y+az=1\end{array}\right\}$$

(Soluc: $a\neq1$ y $a\neq-2\Rightarrow$ se cortan en un punto; $a=1\Rightarrow$ coincidentes; $a=-2\Rightarrow$ se cortan dos a dos formando un prisma)

12.***(S)*** Determinar para qué valores de λ y μ los planos:

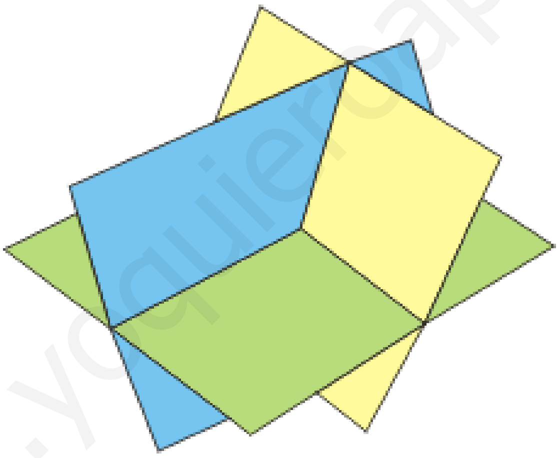
$$\left.\begin{array}{ll}\pi: & 2x-y+3z-1=0\\ \pi': & x+2y-z+\mu=0\\ \pi'': & x+\lambda y-6z+10=0\end{array}\right\}$$

a) Tienen un único punto común

b) Pasan por una misma recta.

(Soluc: $\lambda\neq7$ y $\forall\mu$; $\lambda=7$ y $\mu=3$)

ÁNGULOS y DISTANCIAS
entre
RECTAS y PLANOS



MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

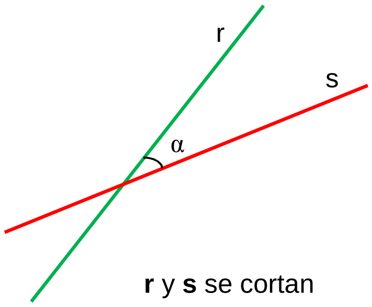
Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

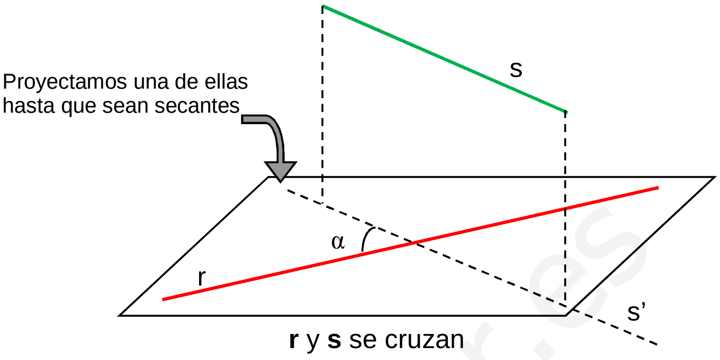
1. PROBLEMAS DE ÁNGULOS[1]

1.1 ÁNGULO DE DOS RECTAS:

Si las dos rectas son paralelas o coincidentes (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, sus vectores directores serán iguales o proporcionales) obviamente el ángulo que forman será cero. Por tanto, nos interesan dos casos:



r y **s** se cortan



r y **s** se cruzan

Nótese que en las dos situaciones el ángulo α que vamos a considerar es el menor posible que forman las dos rectas, y no su suplementario (180º–α). En ambos casos, el ángulo que forman las dos rectas se obtiene análogamente, ya que coincidirá con el ángulo que forman sus vectores directores:

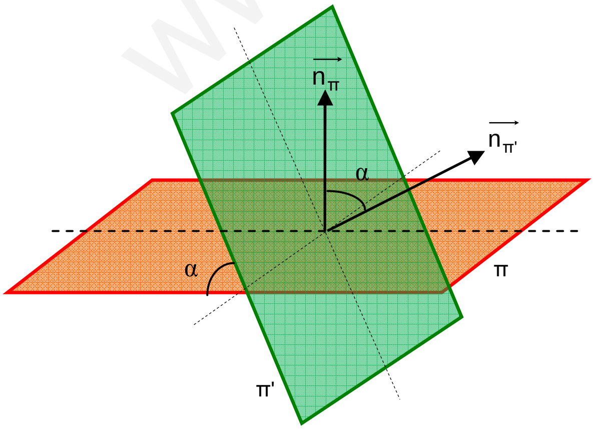
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{u_s}\right\|}}$$

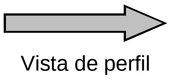
El valor absoluto del numerador es necesario para que el producto escalar al que afecta sea siempre positivo y por tanto el ángulo obtenido sea agudo, ya que pudiera ocurrir que los dos vectores formaran un ángulo obtuso, en cuyo caso su producto escalar sería negativo.

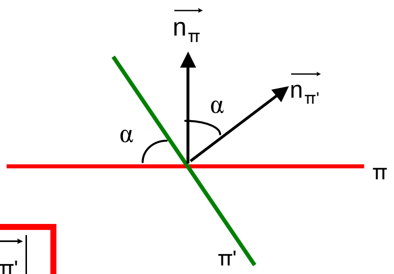
Ejercicios final tema: 1 y 2
Ejercicios PAEG: 4A sept 2011 (+ posición relativa)
Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 187: 1; págs. 204 y ss.: 1, 2 y **61**

1.2 ÁNGULO DE DOS PLANOS:

Si los dos planos son paralelos o coincidentes (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, sus vectores normales $\overrightarrow{n_\pi}$ serán iguales o proporcionales), evidentemente el ángulo que forman será cero. Por tanto, lo realmente interesante es considerar que los dos planos se cortan, en cuyo caso el ángulo que forman los dos planos coincidirá con el que forman sus vectores normales $\overrightarrow{n_\pi}$, como puede verse en la figura siguiente. También aquí entenderemos por ángulo entre ambos el menor de ellos, i.e. el agudo[2], y por lo tanto en la correspondiente fórmula hay que tener en cuenta el producto escalar en valor absoluto:







$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\|}}$$

---

[1] Ver págs. 186 y 187 del libro de ed. Anaya.

[2] A este ángulo lo llamamos "diedro".

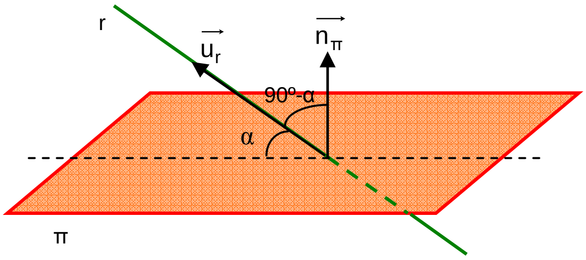
Ejercicios final tema: 3 y 4

Ejercicios PAEG: 4 B **s**ept 2003, 4 A sept 2007

Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 204: 4 y **6**

1.3 ÁNGULO RECTA-PLANO:

Si la recta, o bien es paralela, o bien está contenida en el plano, (lo cual es fácil de detectar, pues, en tal caso, el $\overrightarrow{u_r}$ de la recta y el $\overrightarrow{n_\pi}$ del plano serán perpendiculares, i.e. su producto escalar será cero), el ángulo que forman será evidentemente cero. Por tanto, lo realmente interesante es considerar que la recta incide sobre el plano. En tal caso, el ángulo buscado α será el complementario del que forman $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$, como puede apreciarse en la figura siguiente. Por consiguiente, utilizaremos una fórmula similar a las anteriores, pero en la que interviene el seno, ya que hay que recordar que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complementario[3]:



$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}}$$

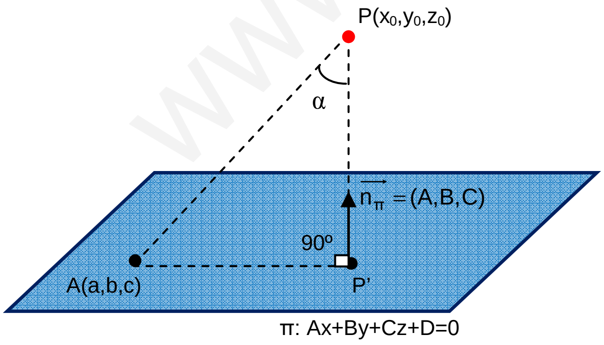
Ejercicios: 5, 6 y 7

Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 187: 2; págs. 204 y ss: 3 y **43**

2. PROBLEMAS DE DISTANCIAS

2.1 d(P,π):[4]

Supongamos que nos dan un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y queremos obtener su distancia al plano π de ecuación Ax+By+Cz+D=0. Ésta será igual a la distancia entre P y P', proyección ortogonal de P sobre π (ver figura), y vendrá dada por la siguiente fórmula:



$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

---

[3] sen α=cos(90º-α)

[4] Ver pág. 190 del libro de ed. Anaya.

Demostración[5]**:**

Supongamos un punto cualquiera A(a,b,c) del plano π; entonces, en el triángulo de la figura, se cumplirá que:

$$\cos\alpha=\frac{d(P,\pi)}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|} \qquad (1)$$

Por otra parte, α es el ángulo que forman $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$; por lo tanto, se cumplirá que:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|} \qquad (2)$$

Despejando d(P,π) de (1) y sustituyendo cos α de (2) se obtiene:

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\frac{\left|(x_0-a,y_0-b,z_0-c)\cdot(A,B,C)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-aA-bB-cC\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3)$$

Ahora bien, como el punto A(a,b,c)∈π, quiere decir que al sustituir las componentes de A en la ecuación del plano verificará la ecuación de éste, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}A(a,b,c)\in\pi\\ \pi: Ax+By+Cz+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow aA+bB+cC+D=0\Rightarrow -aA-bB-cC=D$$

y sustituyendo esto último en (3) obtenemos la fórmula deseada. (C.Q.D)

Observaciones:

1) Con esta fórmula también se puede hallar la **distancia entre dos planos paralelos**: basta con obtener un punto cualquiera de cualquiera de los dos planos y hallar su distancia, mediante la fórmula anterior, al otro plano (ver pág. 191 del libro de ed. Anaya).

2) Análogamente, la fórmula obtenida también da cuenta de la **distancia recta-plano**[6]: en este caso habría que escoger un punto arbitrario de r y averiguar su distancia al plano (¡no al revés!).

Ejercicios final tema: 8 a 16

Ejercicios PAEG UCL-M: 4B sept 2007, 4A jun 2006, 1B jun 2000, 4B jun 2003, 4A jun 2005, 4B sept 2008 [d(P,π)]

4B jun 2007, 4A sept 2004 [d(π,π')]

4A jun 2013, 4B sept 2011 (con parámetro), 2B sept 97, 4A jun 2004 [d(r,π)]

Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 190: 2 y 3; pág. 191: 4 y 5; págs. 204 y ss: 10, **11, 12, 13**, 14, 42, **45, 48, 53 y 64**

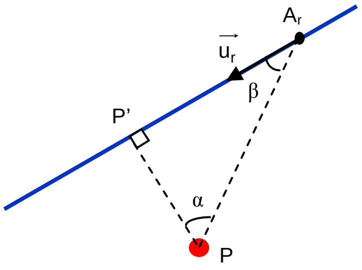
---

[5] Puede verse una demostración alternativa en el libro de ed. Anaya, pág. 190

[6] Obviamente, se sobreentiende que la recta es paralela al plano (ya que, si la recta está sobre el plano, o lo corta, la distancia evidentemente sería cero). Ver pág. 191 del libro de ed. Anaya.

2.2 d(P,r):[7]

Supongamos que nos dan un punto P y queremos obtener su distancia a una recta dada. Ésta será igual a la distancia entre P y P', proyección ortogonal de P sobre r (ver figura), y vendrá dada por la siguiente fórmula:



$$\boxed{d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PA_r}\times\overrightarrow{u_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|}}$$

Demostración[8]:

En el triángulo de la figura se cumple:

$$\cos\alpha=\frac{d(P,r)}{\left\|\overrightarrow{PA_r}\right\|} \qquad (1)$$

Por otra parte, por definición del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PA_r}\times\overrightarrow{u_r}$, tendremos que:

$$\cos\alpha=\operatorname{sen}\beta=\frac{\left\|\overrightarrow{PA_r}\times\overrightarrow{u_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PA_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|} \qquad (2)$$

Despejando d(P,r) de (1) y sustituyendo cos α de (2) se obtiene la fórmula que buscamos. (C.Q.D.)

Observaciones:

1) Nótese que no podemos simplificar el vector $\overrightarrow{PA_r}$, pues entonces su módulo, y por tanto la distancia, se verían modificados (no así $\overrightarrow{u_r}$, pues aparece en numerador y denominador)

2) Con esta fórmula también se puede hallar la **distancia entre dos rectas paralelas**: basta con obtener un punto cualquiera de cualquiera de las dos rectas y hallar su distancia, mediante la fórmula anterior, a la otra recta (ver pág. 192 del libro de ed. Anaya).

Ejercicios final tema: 17 a 22

Ejercicios PAEG: 4A sept 2010, 4B sept 2012, 4B jun 2013 (r//s), 4A sept 99, 4B sept 2005

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 189: 1; págs. 205 y ss: 15 a 18, **49 y 60**

2.3 Distancia entre dos rectas que se cruzan:[9]

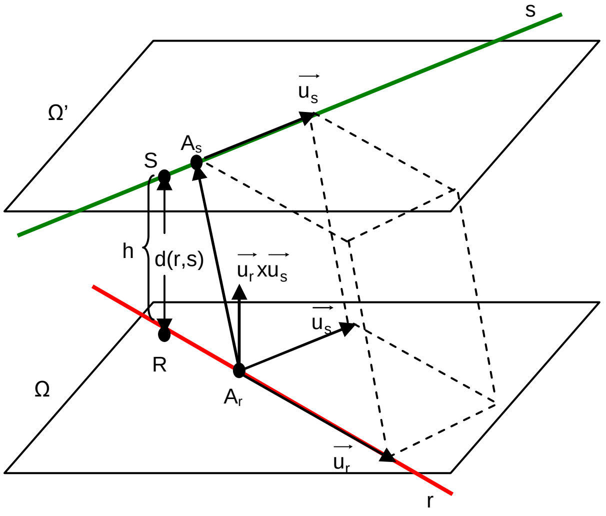
La distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es la mínima distancia entre ellas, i.e. la distancia entre los dos puntos R y S de máxima aproximación de ambas rectas (ver figura). Viene dada por la siguiente fórmula:

---

[7] Ver pág. 188 del libro de ed. Anaya.

[8] Puede verse una justificación similar de esta fórmula en el libro de ed. Anaya, pág. 188

[9] Ver págs. 192 y 193 del libro de ed. Anaya.



$$\boxed{d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{u_r}x\overrightarrow{u_s}\right\|}}$$

Demostración[10]**:**

Cuando dos rectas se cruzan, siempre es posible encontrar sendos planos, Ω y Ω', que las contengan y que sean paralelos (ver figura). La distancia buscada será entonces la misma que la distancia entre dichos planos. Por otra parte, recordemos que el volumen de un paralelepípedo como el de la figura, de aristas definidas por los vectores $\overrightarrow{A_rA_s}$, $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ venía dado por el módulo del producto mixto de éstos:

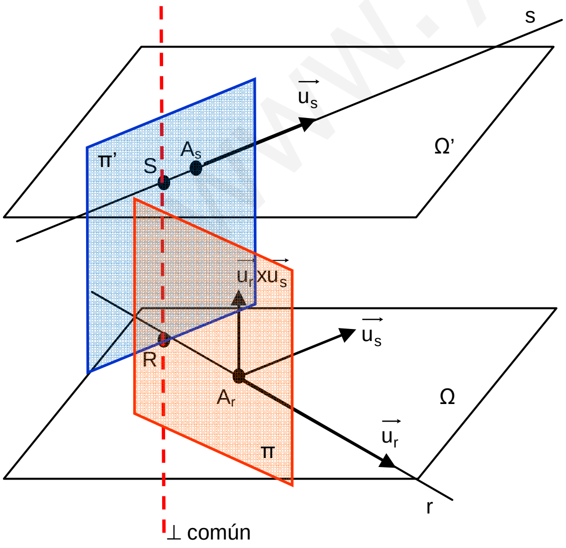
$$\mathrm{Vol}=\left|\left[\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right| \qquad (1)$$

Ahora bien, el volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base por la altura; ésta última obviamente coincide con la distancia que buscamos, mientras que el área de la base era el módulo del producto vectorial de los dos vectores que la forman, i.e. $\left\|\overrightarrow{u_r}x\,\overrightarrow{u_s}\right\|$. Por lo tanto:

$$\mathrm{Vol}=\left\|\overrightarrow{u_r}x\overrightarrow{u_s}\right\|\cdot h \qquad (2)$$

$$\hookrightarrow\; =d(r,s)$$

Por último, despejando h, es decir, d(r,s), de (2) y sustituyendo el valor del volumen de (1) se obtiene la fórmula deseada. (C.Q.D.)



Observaciones:

1) $\overrightarrow{A_rA_s}$ no se debe simplificar.

2) Podemos aplicar la fórmula anterior sin conocer a priori su posición relativa: en caso de que ambas se corten el numerador se anularía…

3) Existe un método alternativo para hallar esta distancia, que consiste en hallar la ecuación de uno de los dos planos, Ω o Ω', y hallar la distancia de un punto cualquiera de la otra recta a dicho plano (ver ejemplo resuelto de esta forma en pág. 192 del libro de ed. Anaya).

4) A veces también se pide la **perpendicular común de dos rectas que se cruzan** i.e. la recta que corta a ambas perpendicularmente, y que, lógicamente (ver figura), coincide con la recta que une los dos puntos R y S más próximos de ambas rectas. Su obtención es muy sencilla en forma implícita, como intersección de dos planos π y π', definidos así:

---

[10] Puede verse la misma demostración en la pág. 192 del libro de ed. Anaya.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \left\{A_r, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r x u_s}\right\} \\ \pi': \left\{A_s, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r x u_s}\right\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Plano} \perp \text{a } \boldsymbol{\Omega} \text{ y que contiene a } \mathbf{r} \\ \longleftarrow \text{Plano} \perp \text{a } \boldsymbol{\Omega'} \text{ y que contiene a } \mathbf{s} \end{array}$$

5) Existe, además, un tercer método para hallar tanto la distancia entre las dos rectas que se cruzan como la perpendicular común, consistente en calcular previamente los dos puntos R y S de máxima aproximación de ambas rectas (ver figura) mediante producto escalar (ver ejemplo resuelto de esta forma en pág. 193 del libro de ed. Anaya).

Ejercicios final tema: 23 a 28

Ejercicios PAEG: 2B jun 2003 (+ ptos. máx. aprox.), 2B jun 2001↔2A sept 99 (+ ⊥ común), 2B jun 97, 4B sept 2004 (+ ángulo r,s)

Ejercicios libro de ed. Anaya: pág. 193: 6 y 7; págs. 205 y ss: 19 a 22, 34, **35**, **50** y 58

3. WEB RECOMENDADOS RELACIONADOS CON EL TEMA:

- En la red hay extensas colecciones de cursos y problemas de Geometría, resueltos estos últimos de forma muy clara y fácil de entender:
  http://www.ifent.org/matematicas/rectasypla/ryp013.htm
  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2bach/naturaleza/u-6.pdf

- Pero la página más interesante es la siguiente, del programa Descartes, que nos permite, entre otras cosas, representar en el espacio planos, y variarlos en función de sus parámetros:
  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Puntos_rectas_planos_d3/index.htm

4. CUADRO RESUMEN DE FÓRMULAS DE DISTANCIAS:

	PUNTO Q(x_1,y_1,z_1)	**RECTA r:{ A_r, $\overrightarrow{u_r}$ }**	**PLANO π: Ax+By+Cz+D=0**
PUNTO P(x_0,y_0,z_0)	$d(P,Q)=\left\Vert\overrightarrow{PQ}\right\Vert=$ $=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$	$d(P,r)=\dfrac{\left\Vert\overrightarrow{PA_r}\ x\,\overrightarrow{u_r}\right\Vert}{\left\Vert\overrightarrow{u_r}\right\Vert}$ (1)	$d(P,\pi)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2)
RECTA s:{ A_s, $\overrightarrow{u_s}$ }		**r // s:** Coger un punto cualquiera de una de ellas y hallar su distancia a la otra, mediante (1) **r y s se cruzan:** $d(r,s)=\dfrac{\left\Vert\left[\overrightarrow{A_r A_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right\Vert}{\left\Vert\overrightarrow{u_r}x\overrightarrow{u_s}\right\Vert}$ $\perp\text{común}:\begin{cases}\pi: \left\{A_r, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r x u_s}\right\} \\ \pi': \left\{A_s, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_r x u_s}\right\}\end{cases}$	Coger un punto cualquiera de la recta y hallar su distancia al plano, mediante (2)
PLANO			Coger un punto cualquiera de cualquiera de los dos planos y hallar su distancia al otro plano, mediante (2)

5. CUADRO RESUMEN DE FÓRMULAS DE ÁNGULOS:

	RECTA $\overrightarrow{u_s}$	**PLANO** $\overrightarrow{n_\pi}$
RECTA $\overrightarrow{u_r}$	$\cos\alpha = \frac{\left\lvert\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right\rvert}{\left\lVert\overrightarrow{u_r}\right\rVert\cdot\left\lVert\overrightarrow{u_s}\right\rVert}$	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left\lvert\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right\rvert}{\left\lVert\overrightarrow{u_r}\right\rVert\cdot\left\lVert\overrightarrow{n_\pi}\right\rVert}$
PLANO $\overrightarrow{n_{\pi'}}$		$\cos\alpha = \frac{\left\lvert\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\rvert}{\left\lVert\overrightarrow{n_\pi}\right\rVert\cdot\left\lVert\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\rVert}$

32 EJERCICIOS de ÁNGULOS y DISTANCIAS 2º BACH.

Problemas de ángulos:

1. Hallar el ángulo que forman las rectas r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=z-3$ y s: $x=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+5}{-1}$ *(Soluc: 60^0)*

2. Determinar **m** para que las rectas r: $x-1=\frac{y+1}{2}=z$ y s: $\frac{x+2}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z+7}{m}$ sean perpendiculares. *(Soluc: m=-1)*

3. Hallar el ángulo que forman los planos x+2y-z=3 y 2x-y+3z=0 *(Soluc: 71º)*

4. Dados los planos 3x-2y+5z-2=0 y kx+7y+z=0, hallar el valor de **k** para que sean perpendiculares. *(Soluc: k=3)*

5. Hallar el ángulo formado por el plano π: x+2y-z-3=0 y la recta r: $\frac{x-1}{2}=y-2=z+1$ *(Soluc: 30º)*

6. *(**S**)* Hallar el ángulo formado por el plano π: 2x+3z=0 y la recta r: $\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=0 \\ 2x+9y+8=0 \end{array}\right\}$ *(Soluc: 8º)*

7. *(**S**)* Hallar el ángulo formado por la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$ y el plano π: 2x+3y-2z+5=0 *(Soluc: 0º)*

d(P,π):

8. Hallar la distancia del punto A(1,2,5) al plano π: 2x+2y-z-5=0 *(Soluc: 4/3)*

9. Hallar la distancia del plano π: 2x+y-z-3=0 al plano π': 4x+2y-2z-7=0 *(Soluc: √6/12)*

10. *(**S**)* Demostrar que el punto A(-1,1,0) no es coplanario con los puntos B(0,0,0), C(0,1,0) y D(1,2,1) y hallar la mínima distancia del punto A al plano determinado por B, C y D. *(Soluc: √2/2)*

11. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}$ y s: $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$

a) Hallar la ecuación general del plano π que contiene a r y es paralelo a s. *(Soluc: 9x-y+15z-8=0)*

b) Determinar la distancia de s al plano π. *(Soluc: 25/√307)*

12. *(**S**)* Calcular el valor de **c** para que la recta r: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z+3=0 \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{array}\right\}$ sea paralela al plano π: 2x-y+cz-2=0

Para el valor de **c** obtenido, calcular la distancia entre r y π. *(Soluc: c=-2; 7/3)*

13. *(**S**)* Dado el plano π: 2x-2y+z-3=0, hallar un punto P de la recta r: $\left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=-2-3t \\ z=-1+t \end{array}\right\}$ de manera que la distancia de P al plano π sea 1.

(Soluc: hay dos soluciones: P(8/3,-1,-4/3) y P'(2,1,-2))

14. *(**S**)* Calcular las coordenadas de un punto de la recta r: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ que equidiste de los planos π: 3x+4z-1=0 y π': 4x-3z-1=0 *(Soluc: hay dos soluciones: (0,-4,0) y (1/4,-29/8,1/4))*

15. *(**S**)* Hallar la ecuación del plano paralelo al de ecuación 2x-2y+z-8=0 y que diste seis unidades del mismo. *(Soluc: hay dos soluciones: 2x-2y+z+10=0 y 2x-2y+z-26=0)*

16. *(**S**)* Encontrar la ecuación del plano paralelo al de ecuación x+y+z=1, determinado por la condición de que el punto A(3,2,1) equidiste de ambos. *(Soluc: x+y+z=11)*

d(P,r):

17. Hallar la distancia punto-recta en los siguientes casos:

a) *(**S**)* P(3,4,5)

r: $x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z+5}{-1}$

(Soluc: $\sqrt{146}$)

b) *(**S**)* P(1,3,-1)

r: $\left.\begin{array}{l}x-y=0\\ x+y-z=0\end{array}\right\}$

(Soluc: $\sqrt{31/3}$)

18. *(**S**)* Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta $\left.\begin{array}{r}x+y-2z+3=0\\ 3x+2y+z-1=0\end{array}\right\}$ *(Soluc: $\sqrt{6}/3$)*

19. *(**S**)* Se consideran la recta r: $\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=4z\end{array}\right\}$ y el punto P(3,4,1). Hallar el plano π que contiene a la recta r y al punto P. Calcular la distancia de P a r. *(Soluc: y-4z=0; 3)*

20. *(**S**)* Se considera la recta r: $\left.\begin{array}{r}x-2=0\\ y+3=0\end{array}\right\}$ y el punto P(0,1,3). Se pide:

a) Hallar la distancia de P a r. *(Soluc: $2\sqrt{5}$)*

b) Determinar el plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r. *(Soluc: 2x+y-1=0)*

21. *(**S**)* Dados en el espacio los puntos A(1,1,2), B(2,1,1), C(1,2,1), D(0,1,1), calcular:

a) El área del triángulo ABC *(Soluc: $\sqrt{3}/2$ u^2)*

b) La distancia del punto A a la recta CD *(Soluc: $\sqrt{6}/2$ u)*

22. *(**S**)* Dado el triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,3,5) y C(4,0,2), hallar su área y las longitudes de sus tres alturas. *(Soluc: área=$\sqrt{230}/2$ u^2; h_A=$\sqrt{115}/17$ u, h_B=$\sqrt{230}/11$ u, h_C=$\sqrt{230}/21$ u)*

Distancia entre rectas que se cruzan. Perpendicular común:

23. Hallar la distancia entre las rectas r: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-2}$ y s: $\frac{x-3}{-2}=y-2=\frac{z-1}{2}$ *(Soluc: 3)*

24. *(**S**)* Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas r: x=y=z y s: x=y=3z-1

(Soluc: $\left.\begin{array}{r}x+y-2z=0\\ x+y-6z+2=0\end{array}\right\}$)

25. *(**S**)* Se consideran las rectas r: $\left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ y+3=0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{l} x-2z=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$ Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s *(Soluc: se cruzan)*

b) Hallar la mínima distancia entre ambas *(Soluc: 11√5/5)*

26. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{4}=z-2$ y s: $\left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=3+t \\ z=1+t \end{array}\right\}$ hallar las ecuaciones de la recta que las corta perpendicularmente

Soluc: $\left[\left.\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 3x-y-2z-4=0 \end{array}\right\}\right]$

27. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$ y s: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3}$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio. *(Soluc: se cruzan)*

b) Hallar la distancia entre ellas. *(Soluc: 51/√237)*

28. *(**S**)* Dadas las rectas r: $\frac{x-4}{2}=y-4=z$ y s: $\left.\begin{array}{l} x=-2+3t \\ y=3 \\ z=1+t \end{array}\right\}$

a) Comprobar que las dos rectas se cruzan

b) Determinar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s de manera que el vector que une A y B sea perpendicular a las rectas r y s. *(Soluc: A(42/11,43/11,-1/11) y B(32/11,3,29/11))*

Distancia entre dos puntos:

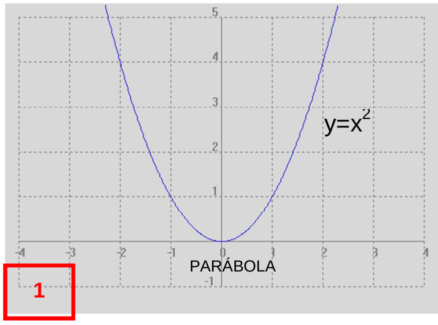
29. *(**S**)* Encontrar los puntos situados a distancia cinco del origen y pertenecientes a la recta que pasa por A(1,2,5) y B(6,5,6). *(Soluc: (32/7,29/7,40/7) y (0,7/5,24/5))*

30. *(**S**)* La distancia del punto P(1,2,3) a otro A del eje de abscisas es 7. Hallar las coordenadas del punto A *(Soluc: hay dos soluciones: A(7,0,0) y A'(-5,0,0))*

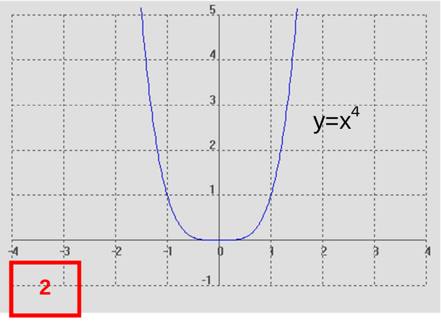
31. *(**S**)* Hallar el punto del plano x+y+z=1 que equidista de los puntos A(1,-1,2), B(3,1,2), C(1,1,0) *(Soluc: (4,-2,-1))*

32. *(**S**)* Encontrar en la recta que pasa por los puntos A(-1,0,1) y B(1,2,3) un punto tal que su distancia al punto C(2,-1,1) sea de tres unidades. *(Soluc: hay dos soluciones: (0,1,2) y (-2/3,1/3,4/3))*

GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS



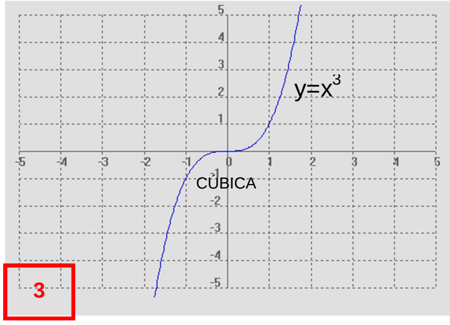
1



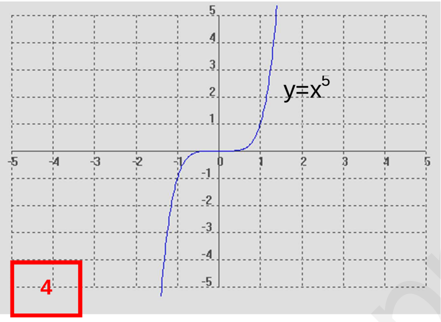
2

En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.

(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)



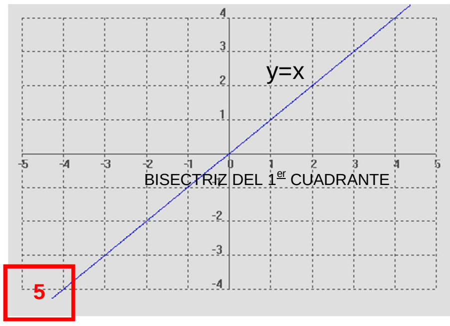
3



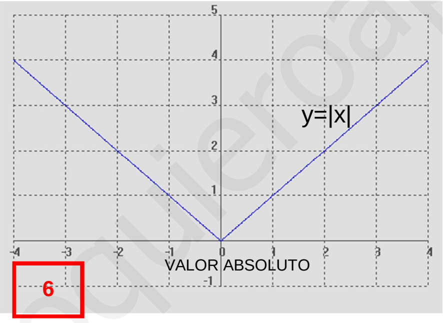
4

En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq1$), tienen esta forma.

(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)

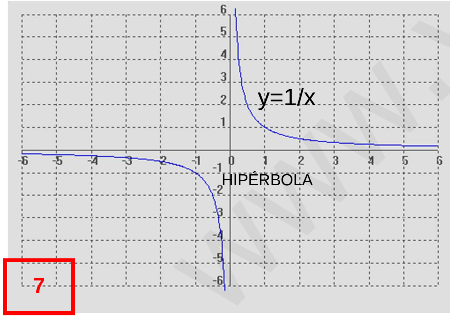


5

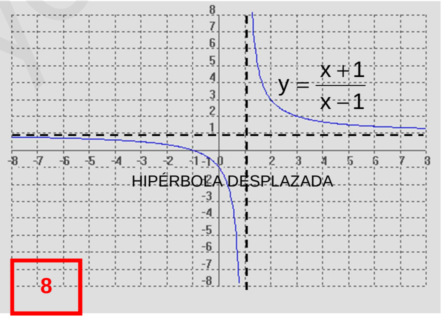


6

En general, la gráfica de y=|f(x)| se obtiene reflejando la de f(x) respecto al eje OY en el semiplano superior.



7

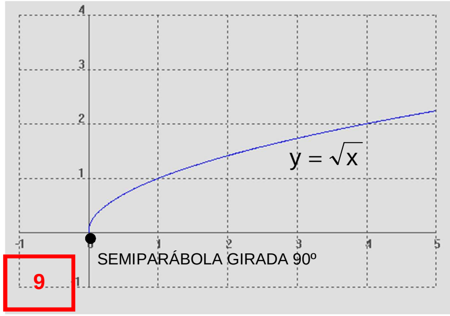


8

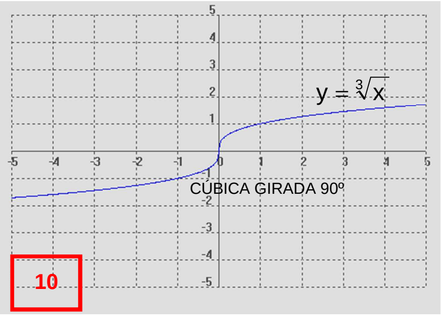
En general,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

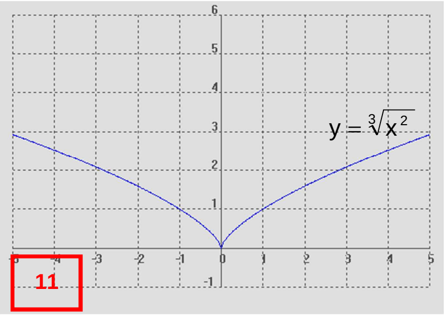
donde $c\neq0$, es una hipérbola.



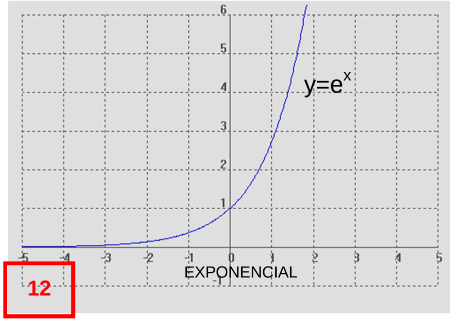
9

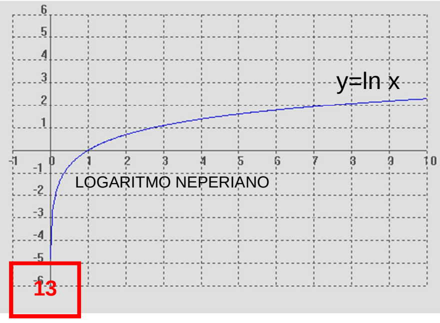


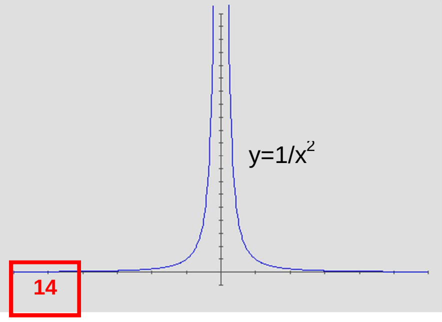
10

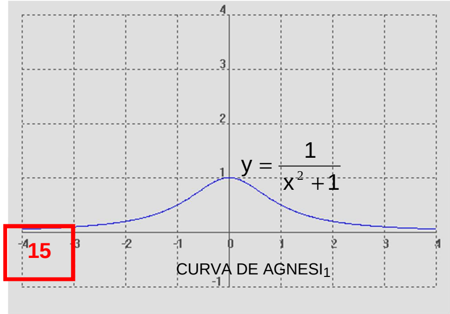


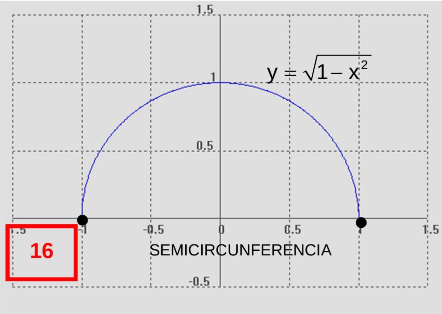
11

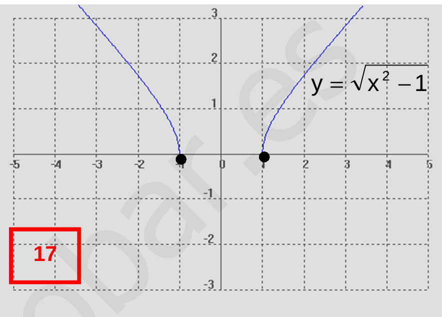

12

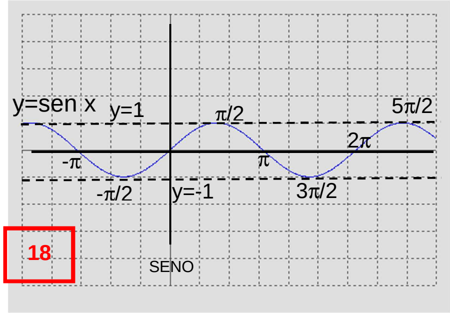

13

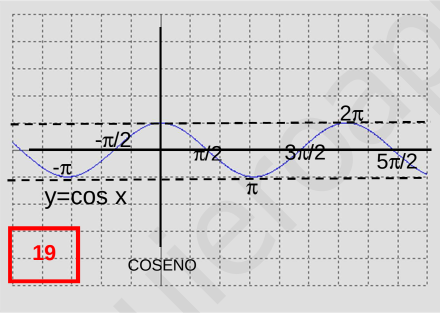

14

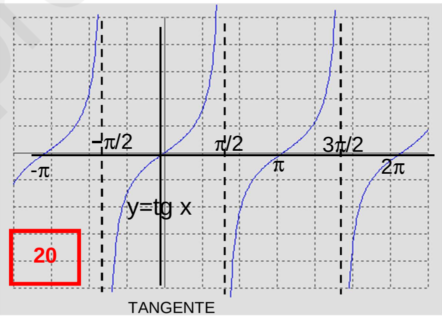

15

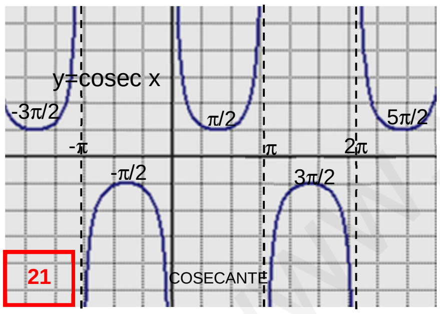

16

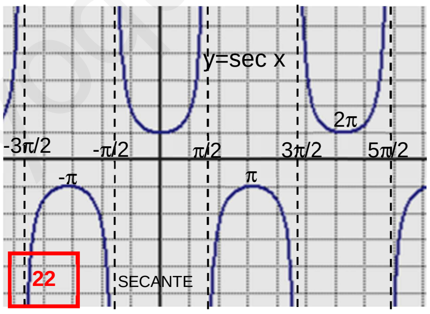

17

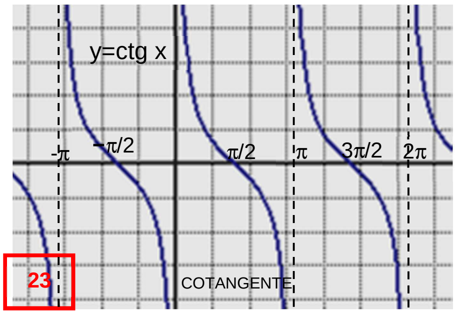

18

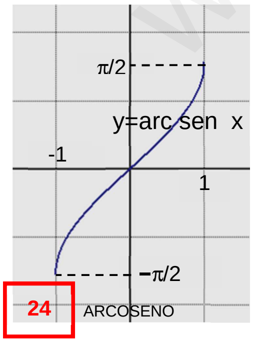

19

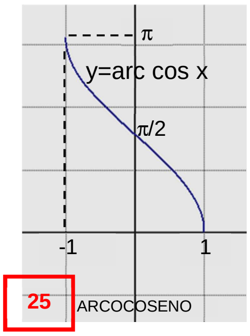

20

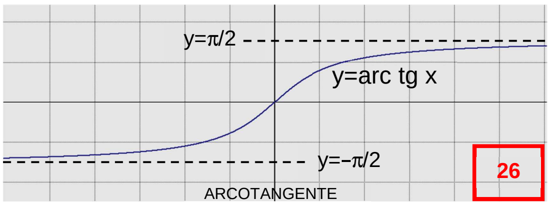

21


22


23


24


25


26

---

[1] En honor de María Agnesi, matemática italiana del siglo XVIII, que fue la primera en investigar las propiedades de las curvas de este tipo.

TABLA de DERIVADAS ELEMENTALES

	FUNCIONES SIMPLES		FUNCIONES COMPUESTAS (Regla de la cadena)	
1	y=k	y'=0		
2	y=x	y'=1		
3	$y=k\cdot x$	y'=k	$y=k\cdot u$	$y'=k\cdot u'$
4	$y=x^n$ $(n\in\Re)$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=u^n$ $(n\in\Re)$	$y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
5			$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$
6			$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
7			$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
8	$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y=-\frac{u'}{u^2}$
9	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$	$y=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
10	$y=\sqrt[n]{x}$	derivarla como $y=x^{1/n}$	$y=\sqrt[n]{u}$	derivarla como $y=u^{1/n}$
11	$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^u$	$y'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$
12	$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^u$	$y'=e^u\cdot u'$
13			$y=u^v$	aplicar derivación logarítmica
14	$y=\log_a x$	$y'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$y=\log_a u$	$y'=\frac{u'\cdot\log_a e}{u}=\frac{u'}{u\cdot\ln a}$
15	y=ln x	$y'=\frac{1}{x}$	y=ln u	$y'=\frac{u'}{u}$
16	y=sen x	y'=cos x	y=sen u	$y'=u'\cdot\cos u$
17	y=cos x	y'=−sen x	y=cos u	$y'=-u'\cdot\text{sen } u$
18	y=tg x	$y'=1+\text{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}$	y=tg u	$y'=(1+\text{tg}^2u)\cdot u'=\frac{u'}{\cos^2u}$
19	y=ctg x	$y'=-(1+\text{ctg}^2x)=\frac{-1}{\text{sen}^2x}$	y=ctg u	$y'=-(1+\text{ctg}^2u)\cdot u'=\frac{-u'}{\text{sen}^2u}$
20	y=arc sen x	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y=arc sen u	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	y=arc cos x	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y=arc cos u	$y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
22	y=arc tg x	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	y=arc tg u	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
23	y=arc ctg x	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$	y=arc ctg u	$y'=\frac{-u'}{1+u^2}$

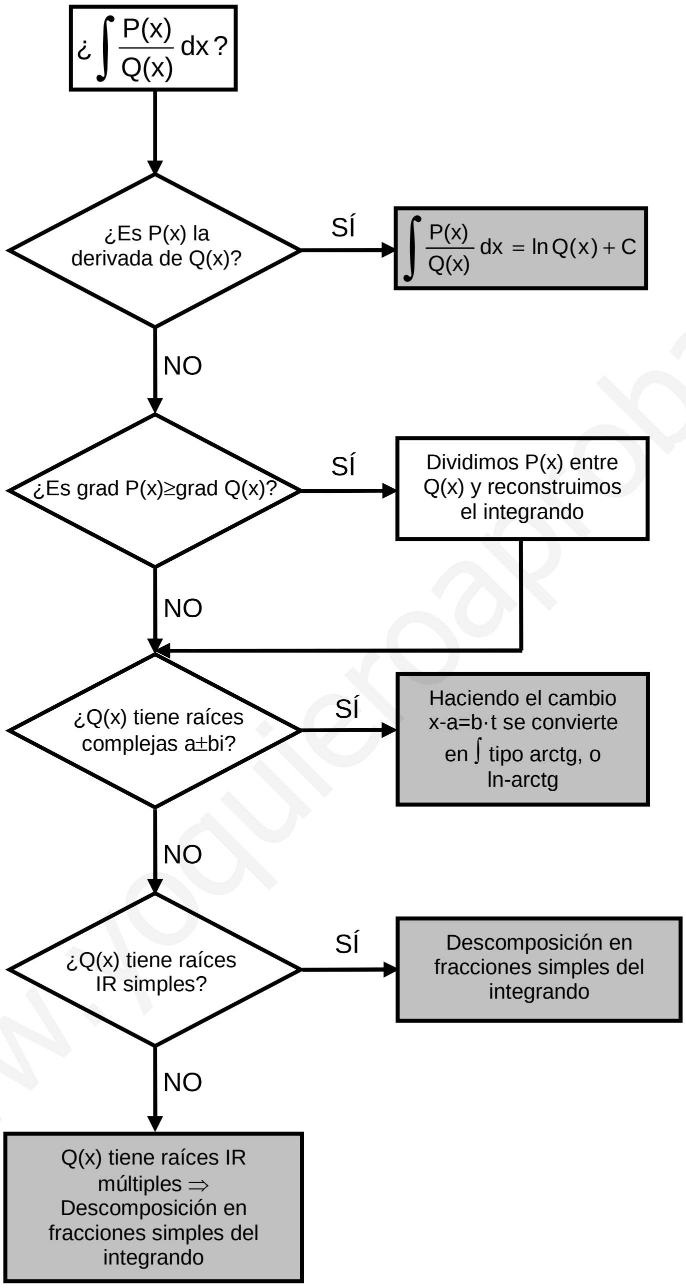
En esta tabla, ***k*** y ***n*** son números reales, ***a*** es un número real positivo, y ***u*** y ***v*** son funciones.

TABLA de INTEGRALES INMEDIATAS

	FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
1	$\int dx = x$	
2	$\int k\,dx = kx$	
3	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$	$\int u'\,u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$
4	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$	$\int \frac{u'}{u} = \ln u$
5	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int u'\,a^u = \frac{a^u}{\ln a}$
6	$\int e^x\,dx = e^x$	$\int u'\,e^u = e^u$
7	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$	$\int u'\cos u = \operatorname{sen} u$
8	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	$\int u'\operatorname{sen} u = -\cos u$
9	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} = \int u'\,\left(1+\operatorname{tg}^2 u\right) = \int u'\sec^2 u = \operatorname{tg} u$
10	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = \int u'\,\left(1+\operatorname{ctg}^2 u\right) = \int u'\operatorname{cosec}^2 u = -\operatorname{ctg} u$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u$
12	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$	$\int \frac{u'}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u$

En esta tabla, ***k*** y ***n*** son números reales, ***a*** es un número real positivo, y ***u*** es una función.

PROCESO LÓGICO de INTEGRACIÓN de COCIENTES de POLINOMIOS



PRINCIPALES SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
1	∀	Para todo
2	∃	Existe al menos uno
3	∃!	Existe un único
4	∄	No existe
5	/	Tal que
6	:	Tal que
7	<	Menor que
8	=	Igual que
9	>	Mayor que
10	≤	Menor o igual que
11	≥	Mayor o igual que
12	∞	Infinito
13	∘	Composición de funciones
14	∝	Proporcional a
15	⊥	Perpendicular a
16	≠	Distinto de
17	≈ ≅ ≃	Aproximadamente igual a
18	≡	Idéntico a
19	∪	Unión de conjuntos
20	∩	Intersección de conjuntos
21	⊂	Contenido en
22	⊃	Contiene a
23	∈	Perteneciente a
24	∉	No perteneciente a
25	∅	Conjunto vacío
26	⇒	Implica
27	⇔	Si y sólo si
28	∑	Sumatorio
29	∏	Productorio
30	ℕ	Números naturales
31	ℤ	Números enteros
32	ℚ	Números racionales
33	𝕀	Números irracionales[1]
34	ℝ	Números reales
35	ℂ	Números complejos

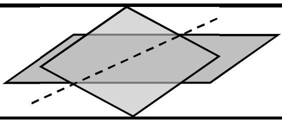
---

[1] En realidad esta notación no es muy estándar; la forma correcta de nombrar los irracionales sería $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

POSICIONES RELATIVAS de RECTAS y PLANOS

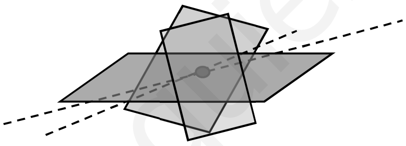
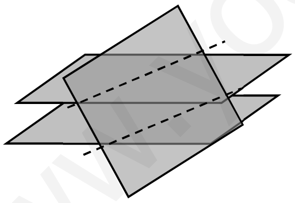
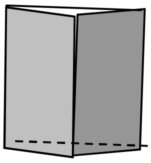
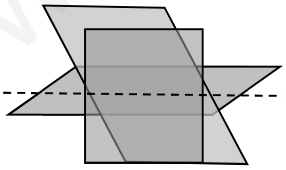
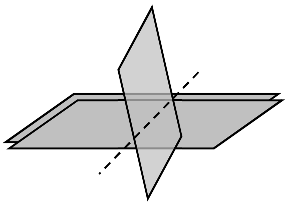
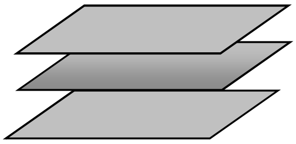
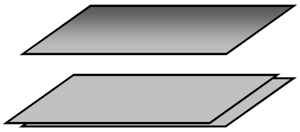
2 PLANOS:

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \pi': \; a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right\}$$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA	
2	2		**SECANTES** (se cortan en una recta)
1	2		**PARALELOS**
1	1		**COINCIDENTES**

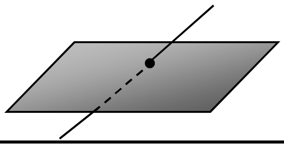
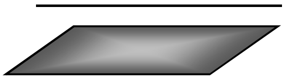
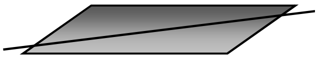
3 PLANOS:

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \pi': \; a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \pi'':a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right\}$$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA	
3	3		**SE CORTAN EN UN PUNTO**
2	3	 o prisma triangular 	**SE CORTAN DOS A DOS**
2	2	 o 	**HAZ DE PLANOS SECANTES** (se cortan en una recta)
1	2	 o 	**PARALELOS**
1	1		**COINCIDENTES**

RECTA-PLANO:

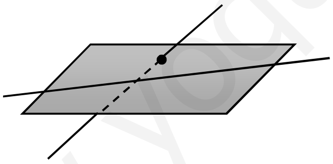
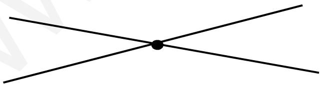
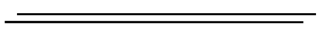
$$\left.\begin{array}{r} r: \quad ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ \pi: \; a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right\}$$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA	
3	3		**SECANTES** (se cortan en un punto)
2	3		**PARALELOS**
2	2		**RECTA CONTENIDA EN EL PLANO**

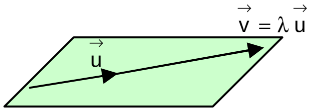
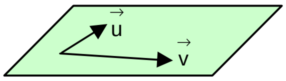
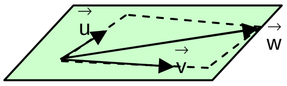
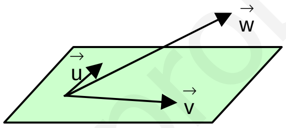
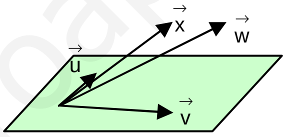
$$\left.\begin{array}{l} r: \quad ax+by+cz+d=0 \\ \quad a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ s: \quad a''x+b''y+c''z+d''=0 \\ \quad a'''x+b'''y+c'''z+d'''=0 \end{array}\right\}$$

2 RECTAS:

$$\left.\begin{array}{l} r: \vec{x} = A_r + \lambda\overrightarrow{u_r} \\ s: \vec{x} = A_s + \lambda\overrightarrow{u_s} \end{array}\right\}$$

rg M	rg M*	POSICIÓN RELATIVA		rg(u_r,u_s)	rg(u_r,u_s,A_rA_s)
3	4		**SE CRUZAN**	2	3
3	3		**SE CORTAN**	2	2
2	3		**PARALELAS**	1	2
2	2		**COINCIDENTES**	1	1

DEPENDENCIA LINEAL de VECTORES

Nº VECTORES	POSICIÓN	PLANO V^2	ESPACIO V^3	¿DEPENDENCIA LINEAL?
2	Alineados:			**I. d** ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ proporcionales)
	No alineados:			**I .i.** ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son base de V^2)
3	Coplanarios:			**I. d.** ($\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son comb. lin.)
	No coplanarios:	▨		**I . i.** ($\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son base de V^3)
≥ 4	▨	▨		**I. d.** ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{x}$ son comb. lin.)

ALFABETO GRIEGO

	Nombre	Símbolo	
		Minúscula	Mayúscula
1	Alfa	α	Α
2	Beta	β	Β
3	Gamma	γ	Γ
4	Delta	δ	Δ
5	Épsilon	ε	Ε
6	Zeta	ζ	Ζ
7	Eta	η	Η
8	Theta	θ,ϑ	Θ
9	Iota	ι	Ι
10	Kappa	κ	Κ
11	Lambda	λ	Λ
12	My	μ	Μ
13	Ny	ν	Ν
14	Xi	ξ	Ξ
15	Ómicron	ο	Ο
16	Pi	π	Π
17	Rho	ρ	Ρ
18	Sigma	σ, ς	Σ
19	Tau	τ	Τ
20	Ípsilon	υ	Υ
21	Fi	φ,φ	Φ
22	Ji	χ	Χ
23	Psi	ψ	Ψ
24	Omega	ω	Ω

CUADRO RESUMEN de FÓRMULAS de DISTANCIAS

	PUNTO Q(x$_1$,y$_1$,z$_1$)	**RECTA r:{ A$_r$, $\overrightarrow{u_r}$ }**	**PLANO π: Ax+By+Cz+D=0**
PUNTO P(x$_0$,y$_0$,z$_0$)	$d(P,Q)=\left\Vert\overrightarrow{PQ}\right\Vert=$ $=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$	$d(P,r)=\dfrac{\left\Vert\overrightarrow{PA_r}\ x\ \overrightarrow{u_r}\right\Vert}{\left\Vert\overrightarrow{u_r}\right\Vert}$ (1)	$d(P,\pi)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2)
RECTA s:{ A$_s$, $\overrightarrow{u_s}$ }		**r // s:** Coger un punto cualquiera de una de ellas y hallar su distancia a la otra, mediante (1) **r y s se cruzan:** $d(r,s)=\dfrac{\left\lvert\left[\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right\rvert}{\left\Vert\overrightarrow{u_r}x\overrightarrow{u_s}\right\Vert}$ $\perp\text{común}:\begin{cases}\pi:\ \left\{A_r,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}x\overrightarrow{u_s}\right\}\\ \pi':\ \left\{A_s,\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{u_r}x\overrightarrow{u_s}\right\}\end{cases}$	Coger un punto cualquiera de la recta y hallar su distancia al plano, mediante (2)
PLANO			Coger un punto cualquiera de cualquiera de los dos planos y hallar su distancia al otro plano, mediante (2)

CUADRO RESUMEN de FÓRMULAS de ÁNGULOS

	RECTA $\overrightarrow{u_s}$	**PLANO $\overrightarrow{n_\pi}$**
RECTA $\overrightarrow{u_r}$	$\cos\alpha=\dfrac{\left\lvert\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}\right\rvert}{\left\Vert\overrightarrow{u_r}\right\Vert\cdot\left\Vert\overrightarrow{u_s}\right\Vert}$	$\text{sen}\ \alpha=\dfrac{\left\lvert\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right\rvert}{\left\Vert\overrightarrow{u_r}\right\Vert\cdot\left\Vert\overrightarrow{n_\pi}\right\Vert}$
PLANO $\overrightarrow{n_{\pi'}}$		$\cos\alpha=\dfrac{\left\lvert\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\rvert}{\left\Vert\overrightarrow{n_\pi}\right\Vert\cdot\left\Vert\overrightarrow{n_{\pi'}}\right\Vert}$