

GLOBAL TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA

19-II-09

1) Calcula el baricentro (punto donde se cortan las medianas) del triángulo cuyos vértices son $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ y $C(3, 7)$.

(2 puntos)

2) Dados el punto $P(4, 3)$ y la recta $r: 2x - y + 3 = 0$, se pide:

(a) Distancia del punto P a la recta r .

(b) Punto simétrico de P respecto de r .

(2 puntos)

3) Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{1}{4}$, $\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, $\beta \in 4^{\text{o}}$ cuadrante, calcula:

$$\operatorname{sen}(2\alpha), \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad \operatorname{tag}(2\beta) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

(1,5 puntos)

4) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC (calcula sus lados, sus ángulos y su área), siendo:

$$\hat{A} = 30^{\circ}; \quad \hat{B} = 45^{\circ} \quad \text{y} \quad c = 20 \text{ cm.}$$

(1,5 puntos)

5) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$, se pide:

(a) Averigua su posición relativa.

(b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

(2 puntos)

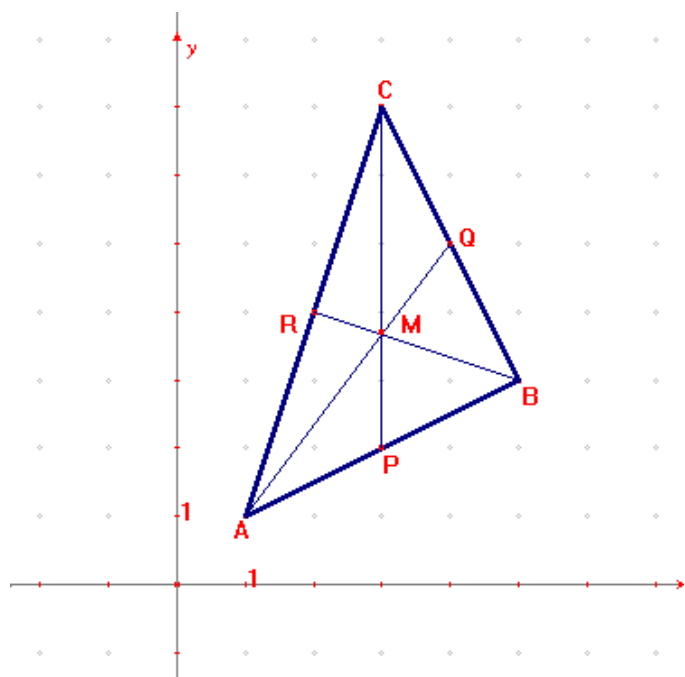
6) Resuelve la ecuación:

$$\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$$

(1 punto)

SOLUCIONES

1) triángulo cuyos vértices son $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ y $C(3, 7)$.



Empezamos hallando los puntos medios de los lados:

$$P\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (3, 2)$$

$$Q\left(\frac{5+3}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = (4, 5)$$

$$R\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (2, 4)$$

Ahora, las ecuaciones de las tres medianas:

Mediana del lado AB, pasa por $C(3, 7)$ y

$$P(3, 2) \quad \vec{d} = \overrightarrow{CP} = (0, -5)$$

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-5} \Rightarrow x-3=0$$

Mediana del lado BC, pasa por $A(1, 1)$ y $Q(4, 5)$, $\vec{d} = \overrightarrow{AQ} = (3, 4)$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow 4x-4=3y-3 \Rightarrow 4x-3y-1=0$$

Mediana del lado AC, pasa por $B(5, 3)$ y $R(2, 4)$, $\vec{d} = \overrightarrow{BR} = (-3, 1)$

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x-2=-3y+12 \Rightarrow x+3y-14=0$$

Para hallar el baricentro M, habrá que resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x=3 \\ 4x-3y=1 \\ x+3y=14 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x=3 \\ 4 \cdot 3 - 3y = 1 \\ 3 + 3y = 14 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 12 - 1 = 3y \\ 3y = 14 - 3 \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{11}{3} \rightarrow M\left(3, \frac{11}{3}\right) \text{ Baricentro}$$

2) punto $P(4, 3)$ y la recta $r: 2x - y + 3 = 0$, se pide:

(a) Distancia del punto P a la recta r.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r:

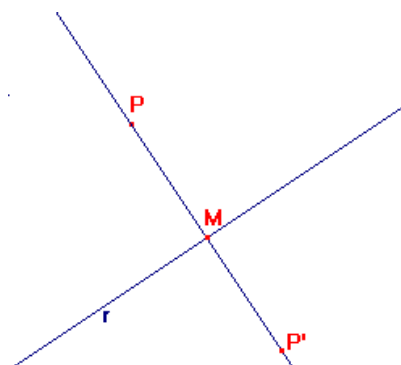
Vector dirección de r: $\vec{d}(1, 2) \rightarrow \perp \vec{e}(2, -1)$

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow -x+4=2y-6 \Rightarrow x+2y-10=0$$

y ahora, hallamos el punto M (intersección de esta recta con la dada r):

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 10 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = 10 - 2y \Rightarrow 2(10 - 2y) - y + 3 = 0 \Rightarrow 20 - 5y + 3 = 0$$

$$-5y = -23 \Rightarrow y = \frac{23}{5} \Rightarrow x = 10 - \frac{46}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow M\left(\frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right)$$



$$d(P, r) = d(P, M) = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{23}{5} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ u.l.}$$

(b) Punto simétrico de P respecto de r.

P' es el simétrico de P respecto de r, luego M es el punto medio del segmento PP':

$$P(4,3), M\left(\frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right), P'(x,y) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{4+x}{2} = \frac{4}{5} \\ \frac{3+y}{2} = \frac{23}{5} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x+20=8 \\ 5y+15=46 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{12}{5} \\ y = \frac{31}{5} \end{array} \right\}$$

$$P'\left(-\frac{12}{5}, \frac{31}{5}\right) \text{ Simétrico de P respecto de la recta r}$$

3) Vamos a hallar primero las restantes razones:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}, \alpha \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{4}, \beta \in 4^{\text{o}} \text{ cuadrante} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg} \beta = -\sqrt{15}$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

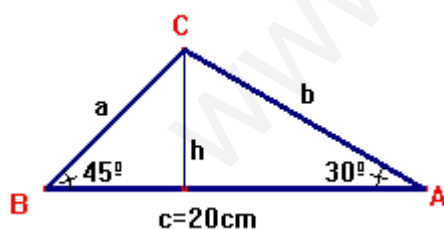
$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \beta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{5}{8}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{4} \quad \left(\frac{\beta}{2} \text{ está en el } 2^{\text{o}} \text{ cuad}\right)$$

$$\operatorname{tag}(2\beta) = \frac{2\operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{-2\sqrt{15}}{1 - (-\sqrt{15})^2} = \frac{-2\sqrt{15}}{1 - 15} = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2 + 5\sqrt{3}}{12}$$

$$4) \hat{A} = 30^\circ; \hat{B} = 45^\circ \quad y \quad c = 20 \text{ cm} \rightarrow \hat{C} = 180 - (30 + 45) = 105^\circ$$

$$\text{Teorema del seno: } \frac{20}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45^\circ}$$



$$\operatorname{sen} 105 = \operatorname{sen}(45 + 60) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$b = \frac{20}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 20\sqrt{3} - 20 \text{ cm}$$

$$\frac{20}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow a = \frac{20}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}$$

Para hallar la altura, nos fijamos en el triángulo rectángulo de la izquierda:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5(2\sqrt{3} - 2) = 10\sqrt{3} - 10 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } A = \frac{20 \cdot (10\sqrt{3} - 10)}{2} = 100\sqrt{3} - 100 \text{ cm}^2$$

5) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \end{cases}$, se pide:

(a) Averigua su posición relativa.

Las ponemos en forma general:

$$r \equiv x - y + 1 = 0; s: t = x - 1; t = 2 - y \Rightarrow x - 1 = 2 - y \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \text{ las rectas son } \mathbf{secantes}$$

(b) Si se cortan, calcula las coordenadas del punto de corte y el ángulo que forman y, si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

Hallamos el punto de corte:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{array} \right\} \text{sumando (reducción): } 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow 1 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2$$

se cortan en el punto **(1,2)**

$$\text{ángulo que forman: } \cos \alpha = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \text{ Perpendiculares}$$

$$6) \cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x \rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x \rightarrow 6\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \arcsen\left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 199^\circ 28' + 360^\circ k \\ 340^\circ 32' + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$