

EXAMEN GLOBAL TRIGONOMETRÍA

1.- Sean a y b dos ángulos tales que $\cos a = \frac{2}{3}$ siendo $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ y $\operatorname{tg} b = \frac{3}{4}$

siendo $\pi < b < \frac{3\pi}{2}$. Halla, sin utilizar la calculadora:

$$\operatorname{sen}(a+b), \cos(a-b), \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \cot(2b) \quad (2 \text{ puntos})$$

2.- Resuelve la ecuación:

$$\cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x \quad (1,25 \text{ puntos})$$

3.- La longitud del lado de un octógono regular es de 8 m. Halla los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita. (1,5 puntos)

4.- Expresa $\cos 3a$ en función de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$. (1,5 puntos)

5.- Comprueba la identidad:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \quad (1,5 \text{ puntos})$$

6.- Halla el valor de la expresión siguiente sin utilizar la calculadora y escribiendo todos los valores en forma de fracción:

$$\frac{\operatorname{sen} 330^\circ + \operatorname{tg} 2\pi - \cos \frac{5\pi}{4} + \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \cos 135^\circ} \quad (1 \text{ punto})$$

7.- Opera y simplifica:

(1,25 puntos)

a) $(1+i)^2 - (2+i)(1-2i) =$

b) $\frac{3+i}{-1+2i} =$

SOLUCIONES

$$1.- \cos a = \frac{2}{3} \text{ siendo } \frac{3\pi}{2} < a < 2\pi \rightarrow \sin^2 a = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \rightarrow \sin a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{3}{4} \text{ siendo } \pi < b < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 b} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow \cos b = -\frac{4}{5}, \sin b = -\frac{3}{5}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}-6}{15}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3\sqrt{5}-8}{15}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \pm \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (a es del cuarto cuadrante, luego su}$$

mitad está en el segundo cuadrante, tangente negativa)

$$\cot(2b) = \frac{1}{\operatorname{tg} 2b} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 b}{2\operatorname{tg} b} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1-\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{24}$$

$$2.- \cos 2x = 1 + 4\sin x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 4\sin x \rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 + 4\sin x$$

$$2\sin^2 x + 4\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x(\sin x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \\ \sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -2 \end{cases}$$

lo segundo es imposible, luego la solución es:

$$x = \arcsen 0 = \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

3.- Triángulo ABC (isósceles), el lado x es el de la circunferencia circunscrita y la altura y es el radio de la circunferencia inscrita:

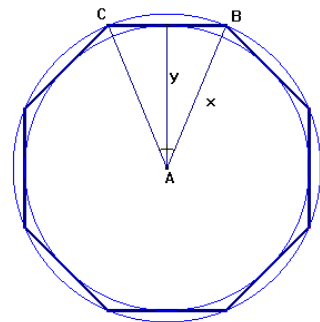
$$\text{Ángulo en A: } \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ, \text{ Lado BC} = 8 \text{ m}$$

$$\text{Ángulos B y C: } \frac{180-45}{2} = 67^\circ 30'$$

$$\text{Teorema del seno: } \frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 67^\circ 30'} \rightarrow x = \frac{8 \cdot \sin 67^\circ 30'}{\sin 45^\circ} = 10,45 \text{ m}$$

Como la mitad del triángulo ABC es un triángulo rectángulo, podemos hacer:

$$\operatorname{tg} 67^\circ 30' = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4 \cdot \operatorname{tg} 67^\circ 30' = 9,66 \text{ m}$$



$$4.- \cos 3a = \cos(a+2a) = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a = \cos a(\cos^2 a - \sin^2 a) - \sin a(2\sin a \cos a) = \cos^3 a - \cos a \sin^2 a - 2\sin^2 a \cos a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a$$

$$\begin{aligned}
 5.- \frac{\operatorname{sen} 330^\circ + \operatorname{tg} 2\pi - \cos \frac{5\pi}{4} + \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \sqrt{2} \cos 135^\circ} &= \frac{-\frac{1}{2} + 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = \\
 &= \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+2} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{3-4} = -2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-2
 \end{aligned}$$

$$6.- \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}$$

↓

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned}
 7.- a) (1+i)^2 - (2+i)(1-2i) &= 1+i^2+2i-2+4i-i+2i^2 = \\
 &= 1-1+2i-2+4i-i-2 = -4+5i
 \end{aligned}$$

$$b) \frac{3+i}{-1+2i} = \frac{(3+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-3-6i-i-2i^2}{(-1)^2-(2i)^2} = \frac{-1-7i}{1+4} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$