

CONTROL TRIGONOMETRÍA

diciembre 2008

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(1,5 puntos)

a) $|x^2 - 3x| = 4$

b) $\frac{x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)}$

c) $9^x - 3^x = 6$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones:

(1,5 puntos)

a)
$$\left. \begin{aligned} y^2 - 2y + 1 &= x \\ \sqrt{x} + y &= 5 \end{aligned} \right\}$$

b)
$$\left. \begin{aligned} 2\log x + \log y &= 1 \\ \log x &= 2\log y + 3 \end{aligned} \right\}$$

3. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -3$ y que $\alpha > \pi$ halla las restantes razones trigonométricas de α . (expresándolas con fracciones y radicales)

(1,5 puntos)

4. Resuelve la ecuación: $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 4\sin x$

(1,25 puntos)

5. Observamos el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 64° sobre la horizontal. Si nos alejamos 150 metros, lo vemos bajo un ángulo de 33° . ¿A qué altura se encuentra la torre?

(1,5 puntos)

6. Comprueba la identidad:

(1,25 puntos)

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \sec x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

7. Un triángulo isósceles tiene 8 cm de base y el ángulo adyacente es de 50° . Halla su perímetro y su área.

(1,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) |x^2 - 3x| = 4 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases} \\ x^2 - 3x = -4 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \end{cases}$$

$$b) \frac{x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)} \rightarrow \text{m.c.m.} = 2x(x+1)(x-1)$$

$$\frac{x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)} \Rightarrow \frac{2(x+1)-2x}{2x(x+1)(x-1)} = \frac{x(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}$$

$$2x+2-2x = x^2-x \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \text{ Comprobando, solo es válida } x=2$$

$$c) 9^x - 3^x = 6 \rightarrow 3^{2x} - 3^x - 6 = 0, \text{ hacemos el cambio } t = 3^x \text{ y tenemos:}$$

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x=1 \\ t=-2 \rightarrow 3^x = -2 \text{ imposible} \end{cases} \text{ solución } x=1$$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \rightarrow \text{sustituimos } x \text{ en la segunda ecuación } \sqrt{y^2 - 2y + 1} + y = 5$$

$$\sqrt{y^2 - 2y + 1} = 5 - y \Rightarrow \left(\sqrt{y^2 - 2y + 1} \right)^2 = (5 - y)^2 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 25 - 10y + y^2$$

$$8y + 1 = 25 \Rightarrow 8y = 24 \Rightarrow y = 3 \text{ comprobamos: } \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 + 1} = 5 - 3 \rightarrow \sqrt{4} = 2 \text{ si}$$

$$\text{hallamos } x: x = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4, \text{ solución del sistema: } x = 4, y = 3$$

$$b) \begin{cases} 2 \log x + \log y = 1 \\ \log x = 2 \log y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x^2 + \log y = \log 10 \\ \log x - \log y^2 = \log 1000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log(x^2 y) = \log 10 \\ \log \frac{x}{y^2} = \log 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 y = 10 \\ \frac{x}{y^2} = 1000 \end{cases} \rightarrow x = 1000 y^2 \rightarrow (1000 y^2)^2 y = 10 \rightarrow y^5 = \frac{10}{1000000} \rightarrow y = \frac{1}{10}$$

$$\text{hallamos } x: x = 1000 y^2 = 1000 \cdot \frac{1}{100} = 10 \text{ Solución: } x = 10; y = \frac{1}{10}$$

3. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -3$ y que $\alpha > \pi$ halla las restantes razones trigonométricas de α . Tangente negativa, el ángulo podría estar en el segundo o en el cuarto cuadrante, como es mayor de 180° está en el cuarto cuadrante, es decir seno negativo y coseno positivo. Vamos a calcular las razones del ángulo:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = -3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{10}{3\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{3}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}; \quad \cot \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$4. \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4 \operatorname{sen} x \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$$

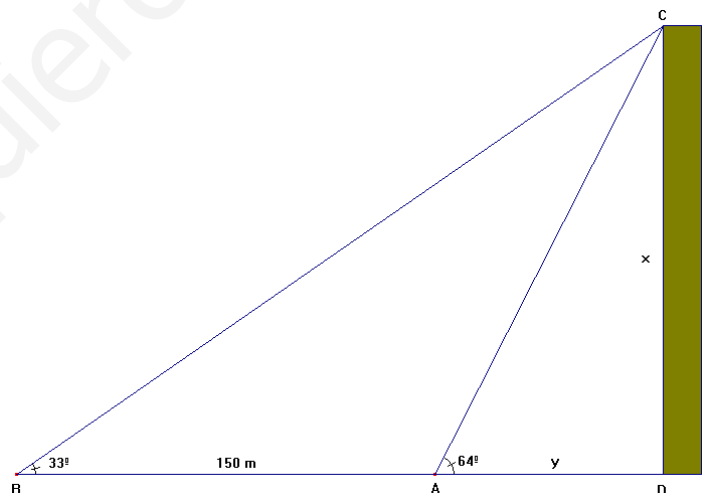
$$2 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 2 \operatorname{sen} x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = \arcsen(0) = \begin{cases} 0^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \arcsen(-2) \text{ imposible}$$

5. Tenemos dos triángulos rectángulos, plantearemos un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 64^\circ &= \frac{x}{y} \\ \operatorname{tg} 33^\circ &= \frac{x}{y+150} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2,05y &= x \\ 0,649(y+150) &= x \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2,05y &= 0,649y + 97,35 \\ 1,401y &= 97,35 \rightarrow y = 69,49 \end{aligned}$$



$$x = 2,05y = 2,05 \times 69,49 = 142,45 \text{ m mide la torre}$$

6. Comprueba la identidad: $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \sec x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x = (1 + \sec x)(1 - \cos x) \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x = 1 - \cos x + \sec x - \sec x \cdot \cos x$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = 1 - \cos x + \frac{1}{\cos x} - 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{-\cos^2 x + 1}{\cos x} \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

7. Un triángulo isósceles tiene 8 cm de base y el ángulo adyacente es de 50° . Halla su perímetro y su área.

Se forman dos triángulos rectángulos, de ángulos agudos 50° y 40° (complementario), y un cateto de 4 cm

$$\cos 50^\circ = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\cos 50^\circ} = 6,22 \text{ cm}$$

También necesitamos la altura c , para hallar el área:

$$\tan 50^\circ = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 4 \tan 50^\circ = 4,77 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro: } P = 8 + 2 \cdot 6,22 = 20,44 \text{ cm}$$

$$\text{Área: } A = \frac{8 \cdot 4,77}{2} = 19,08 \text{ cm}^2$$

