

**EXAMEN DE MATEMÁTICAS - 1º BACHILLERATO - RECUPERACIÓN
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA - 18-V-09**

1) Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\alpha \in 1^{\text{er}}$ cuadrante, $\beta \in 4^{\text{o}}$ cuadrante, calcula:
 $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, $\cos(2\alpha)$ y $\operatorname{tag}(2\beta)$

2) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC (calcula sus lados, sus ángulos y su área), siendo:

$$\hat{A} = 45^{\circ}, \hat{B} = 60^{\circ} \text{ y } b = \sqrt{3} \text{ cm}$$

(Si haces uso de la calculadora, este ejercicio se valorará con 1 punto)

3) Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \operatorname{sen} x - 3 = 0$$

4) Halla el simétrico del punto P(1, 2) respecto de la recta $r: 2x + y - 1 = 0$.

5) Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

Puntuación: 2 puntos cada ejercicio

SOLUCIONES

1) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\alpha \in 1^{\text{er}} \text{ cuadrante}$, $\beta \in 4^{\text{o}} \text{ cuadrante}$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \rightarrow \operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{2 + 5\sqrt{3}}{12}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\operatorname{tag}(2\beta) = \frac{2\operatorname{tag} \beta}{1 - \operatorname{tag}^2 \beta} = \frac{-\sqrt{5}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{5}}{1 - \frac{5}{4}} = \frac{-4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5}$$

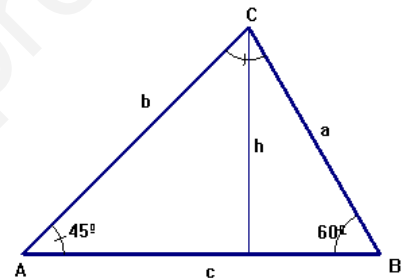
2) $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ y $b = \sqrt{3} \text{ cm}$

$$\hat{C} = 180 - (45 + 60) = 75^\circ$$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$a = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} \text{ cm}$$



$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(45 + 30) = \operatorname{sen} 45 \cos 30 + \operatorname{sen} 30 \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow c = \frac{\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Área: Hallamos primero la altura h : $\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{h}{b} \rightarrow h = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm}$

$$A = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

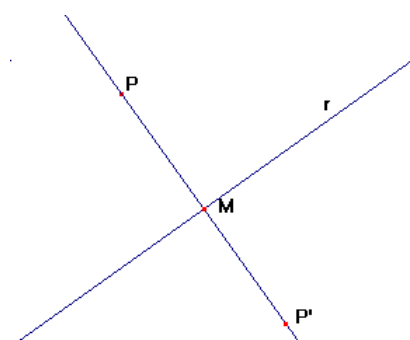
3) $2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \operatorname{sen} x - 3 = 0 \rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + 3 \operatorname{sen} x - 3 = 0 \rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-4} = \begin{cases} \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \frac{-4}{-4} = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

4) Halla el simétrico del punto $P(1, 2)$ respecto de la recta $r: 2x + y - 1 = 0$.

Hallaremos primero la ecuación de la recta perpendicular a r , pasando por P :

Vector director de $r \rightarrow (-1, 2)$, vector perpendicular $\rightarrow (2, 1)$



Recta perpendicular:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x-1 = 2y-4 \rightarrow x-2y+3=0$$

Resolvemos ahora el sistema formado por las dos rectas, para hallar su punto de corte M :

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+2y-2=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \rightarrow 5x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{5}$$

$$-\frac{2}{5} + y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

M es el punto medio del segmento PP' , luego, si $P'(a, b)$:

$$\frac{1+a}{2} = -\frac{1}{5} \rightarrow 5+5a = -2 \rightarrow a = -\frac{7}{5}$$

$$\frac{2+b}{2} = \frac{7}{5} \rightarrow 10+5b = 14 \rightarrow b = \frac{4}{5}$$

$$\text{Punto simétrico: } P'\left(-\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

5) Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(1, 1)$ y $C(-3, -2)$

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB .

$$\text{Punto medio de } AB: M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0, 2), \text{ dirección } AB: \vec{d} = (1, 1) - (-1, 3) = (2, -2)$$

Vector perpendicular (la mediatriz es perpendicular por el punto medio): $(1, 1)$

$$\text{Ecuación de la mediatriz: } \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x-y+2=0$$

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C .

$$\text{dirección } AB: \vec{d} = (1, 1) - (-1, 3) = (2, -2), \text{ punto } C(-3, -2)$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-2} \rightarrow x+3 = -y-2 \rightarrow x+y+5=0$$