

GLOBAL ANÁLISIS

1) Halla el valor de a para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$. (1,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

Representa gráficamente la función (para ese valor de a)

2) Calcula las siguientes derivadas:

(3 puntos)

a) $y = (x^2 + 2) \cdot 2^{1-3x}$

b) $y = \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$

c) $y = \sqrt{\cos x - \sin x}$

d) $y = \arctg\sqrt{x+1}$

3) Haz un estudio lo más completo posible de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ y represéntala gráficamente. (2 puntos)

4) Halla razonadamente un punto de la función $y = x^2 + x + 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (1,5 puntos)

5) Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ y estudia su continuidad. (2 puntos)

SOLUCIONES

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \rightarrow \text{CONTINUA en } (-\infty, -1) \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x \rightarrow \text{CONTINUA en } (-1, +\infty) \end{cases}$$

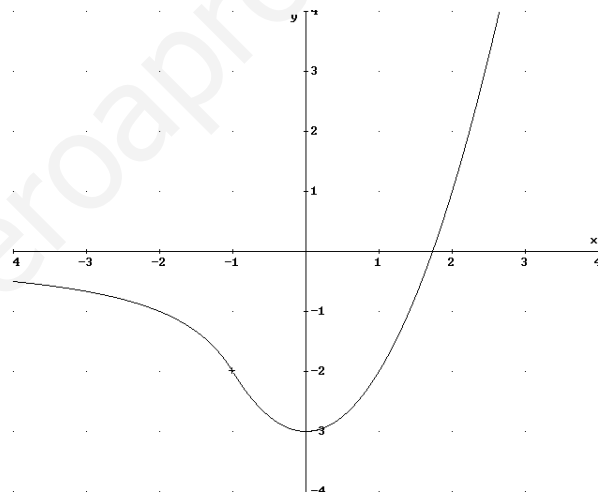
Sólo nos falta que sea continua en $x = -1$, para lo cual, tienen que coincidir:

- $f(-1) = \frac{a}{-1} = -a$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{x} = -a \quad -a = -2 \Rightarrow a = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 3) = -2$

$$\text{Gráfica de } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq -1 \rightarrow \text{trozo de hipérbola} \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x \rightarrow \text{trozo de parábola} \end{cases}$$

Parábola con vértice en $(0, -3)$ y cortando al eje OX en $\sqrt{3}$

Hipérbola con asíntotas los ejes de coordenadas



$$2) a) y = (x^2 + 2) \cdot 2^{1-3x}$$

$$y' = 2x \cdot 2^{1-3x} + (x^2 + 2) \cdot 2^{1-3x} \cdot \ln 2 \cdot (-3) \rightarrow y' = [2x - 3(x^2 + 2) \ln 2] 2^{1-3x}$$

$$b) y = \ln \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) \rightarrow y' = \frac{1}{\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}} \cdot \frac{e^{-x}(1+e^{-x}) - (1-e^{-x})(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}}$$

$$c) y = \sqrt{\cos x - \sin x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x - \sin x}} \cdot (-\sin x - \cos x) = \frac{-\sin x - \cos x}{2\sqrt{\cos x - \sin x}}$$

$$d) y = \arctg \sqrt{x+1} \rightarrow y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{x+1}}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \quad \text{Asíntotas: Verticales: } x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad x = 2 \text{ A.V. de ramas divergentes}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases} \quad x = -2 \text{ A.V. de ramas divergentes}$$

Horizontales: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$ y también $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$

Asíntota horizontal $y = 1$, veamos si la gráfica está por encima o por debajo:

Para $x = 1000 \rightarrow \frac{1000^2}{1000^2 - 4} > 1$ para $x = -1000 \rightarrow \frac{(-1000)^2}{(-1000)^2 - 4} > 1$

Luego en ambos lados está por encima

Puntos de corte con los ejes:

Para $y = 0$

$$\frac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = 0$$

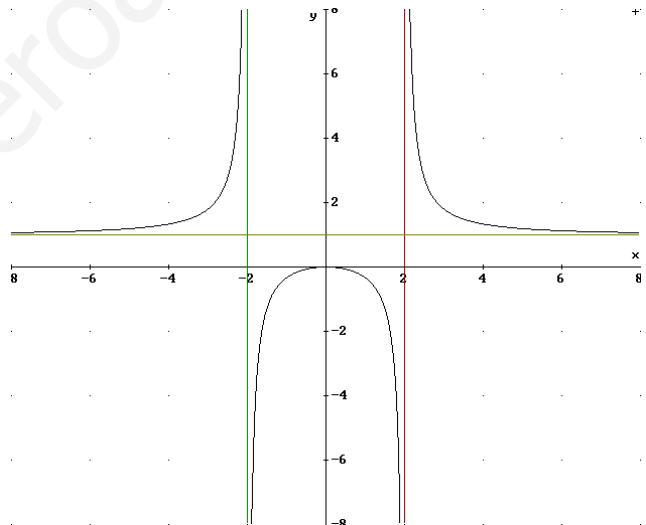
Para $x = 0 \rightarrow y = 0$

Puntos singulares:

$$y' = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -8x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\rightarrow (0,0)$, vemos que es un máximo.



4) Halla razonadamente un punto de la función $y = x^2 + x + 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente.

$y' = 2x + 1 = m = 3$ (paralela, misma pendiente)

$$2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad \text{el punto es el } (1,3)$$

Recta tangente en el punto $(1,3)$: $y = 3(x - 1) + 3 \rightarrow y = 3x$

5) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$, esta función es una función racional, continua en su dominio que es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, veamos que tipo de discontinuidad hay en esos dos puntos:

En $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

En $x = 2$ tiene, por lo tanto, una discontinuidad evitable, ya que existe el límite en el punto, aunque la función no está definida en el mismo.

En $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} = \frac{-8 - 20 - 12}{0} = \frac{-40}{0} = \pm\infty$$

luego, en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto infinito, o más claro, una asíntota vertical de ramas divergentes.

También tiene una asíntota oblicua $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 4x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 5x^2 + 6x - x^3 + 4x}{x^2 - 4} \right] = -5$$

La asíntota oblicua es: $y = x - 5$