

EXAMEN ANÁLISIS - GEOMETRÍA

1.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \frac{x}{x-2}$.

a) Calcula $f \circ g$, $g \circ f$ y sus dominios.

b) f^{-1} , g^{-1} y sus dominios.

(2 puntos)

2.- Representa gráficamente las siguientes funciones (sin utilizar tabla de valores) y escribe sus características:

a) $f(x) = | -x^2 + 2x |$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

(2,5 puntos)

3.- Representa gráficamente la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ 2^x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Escribe sus características.

b) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c) Estudia su continuidad.

(1,5 puntos)

4.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Tiene asíntota vertical en $x = 2$ y asíntota horizontal en $y = -1$

b) Su Dominio es $\mathbb{R} - \{0,2\}$

c) Corta al eje OX sólo en el punto (1,0)

(1 punto)

5.- Dado el triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A=(1,4)$, $B=(3,-2)$ y $C=(-1,0)$. Calcula:

a) Su área.

b) Su perímetro.

c) El ángulo en C.

d) La ecuación de la mediatriz del lado AC.

(2 puntos)

6.- Determina m y n sabiendo que la recta $2x+ny=0$ pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $mx-2y+3=0$.

(1 punto)

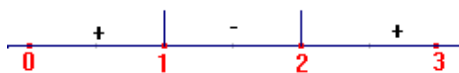
SOLUCIONES

1.- 1.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \frac{x}{x-2}$.

a) Calcula $f \circ g$, $g \circ f$ y sus dominios.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{x}{x-2} + 1} = \sqrt{\frac{2x-2}{x-2}}$$

Domino: $\frac{2x-2}{x-2} \geq 0 \rightarrow$



$$\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x+1}) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x+1}}{x-3}$$

Domino: tiene que ser $x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$, pero no puede ser $x = 3$ porque se anula el denominador. $\text{Dom}(g \circ f) = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$

b) f^{-1} , g^{-1} y sus dominios. $y = \sqrt{x+1}$ cambiamos: $x = \sqrt{y+1}$

despejamos $y \rightarrow x^2 = (\sqrt{y+1})^2 \rightarrow x^2 = y+1 \rightarrow y = x^2 - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 1$

comprobamos: $(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = \sqrt{x^2} = x$

$\text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$, función polinómica

$y = \frac{x}{x-2}$ cambiamos: $x = \frac{y}{y-2}$, despejamos $y \rightarrow x(y-2) = y \rightarrow xy - 2x = y$

$xy - y = 2x \rightarrow y(x-1) = 2x \rightarrow y = \frac{2x}{x-1} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$

comprobamos: $(g \circ g^{-1})(x) = g[g^{-1}(x)] = g\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - 2} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{2x - 2(x-1)}{x-1} =$

$= \frac{2x(x-1)}{(x-1) \cdot 2} = x$ $\text{Dom}(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$, función racional

2.- a) $f(x) = |-x^2 + 2x|$ vamos a representar primero

la parábola $y = -x^2 + 2x$

Mira hacia abajo. Vértice $x = -\frac{2}{-2} = 1$

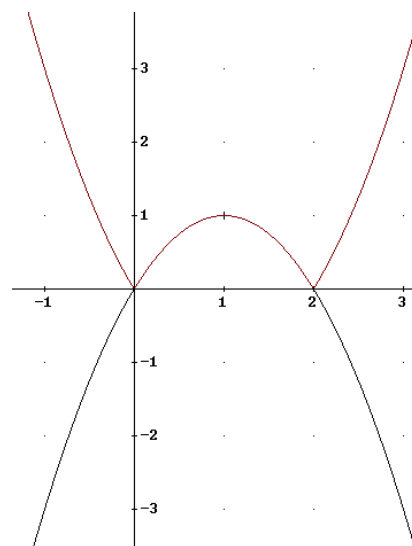
$V(1,1)$ Eje de simetría $x = 1$

Corte ejes: eje OY: $y=0$

Eje OX: $-x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Haciendo el valor absoluto tenemos la gráfica pedida (en rojo)

Características: $\text{Dom} = \mathbb{R}$; $\text{Rec} = [0, +\infty)$ Continua en $\mathbb{R}$



Máximo en (1,1), Mínimos en (0,0) y (2,0).

Crecimiento: creciente en $(0,1) \cup (2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0) \cup (1,2)$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

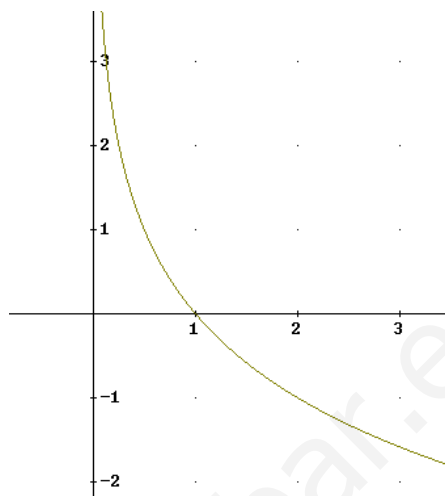
Función logarítmica de base < 1 , luego es decreciente

Su dominio (como todo logaritmo) es $(0,+\infty)$

Asíntota vertical el eje OY.

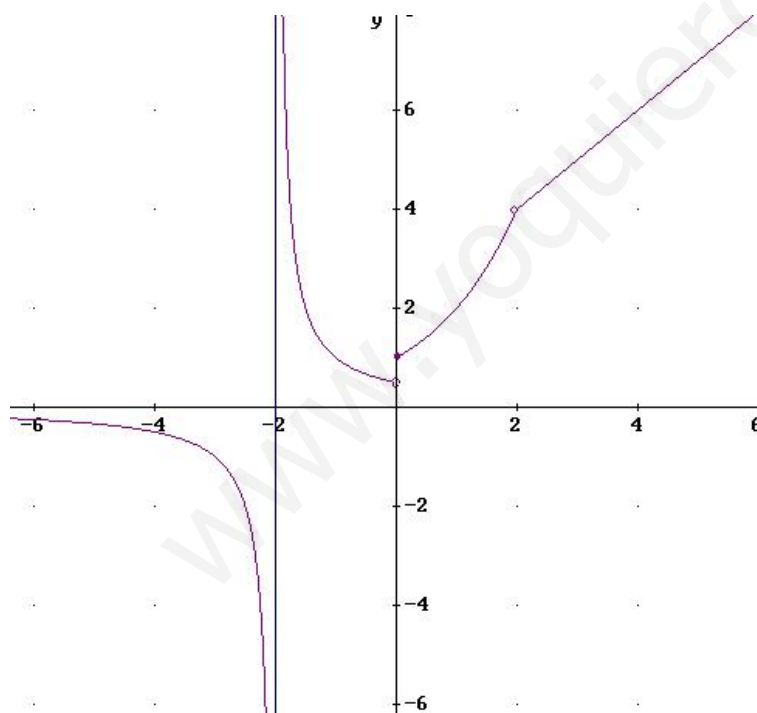
Pasa por (1,0).

La dibujamos:



3.- a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \rightarrow \text{trozo de hipérbola AV } x = -2 \\ 2^x & \text{si } 0 \leq x < 2 \rightarrow \text{trozo de exponencial de base } > 1 \\ x+2 & \text{si } x \geq 2 \rightarrow \text{semirrecta} \end{cases}$$



Características:

Dom = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Rec = $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Asíntota vertical $x = -2$

Creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

c) Continuidad: tenemos

"problemas" en la AV: $x = -2$ y en los puntos de enganche 0 y 2.

Estudiaremos la continuidad en esos tres puntos, puesto que en el

resto es continua.

En $x = -2$ $f(-2) = \text{no existe}$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$ Discontinuidad de salto infinito

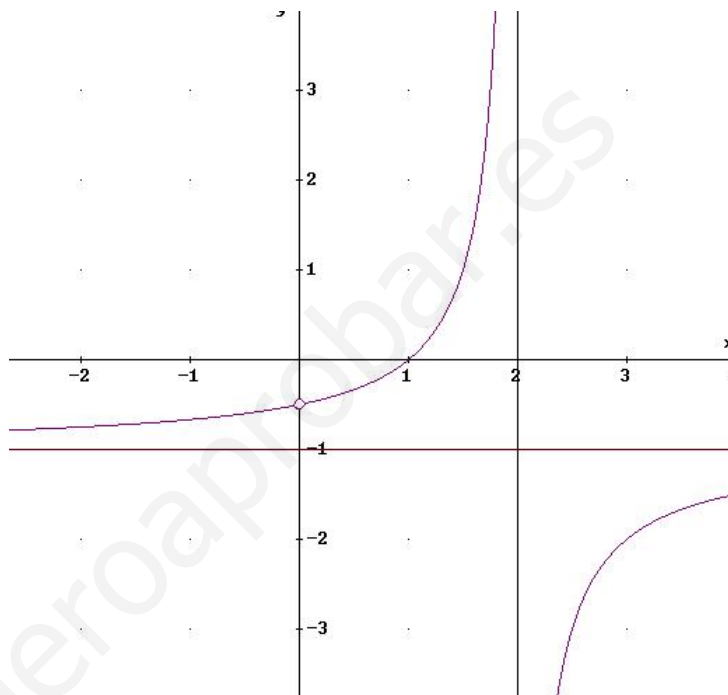
En $x = 0$ $f(0) = 1$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{array} \right\}$ Discontinuidad de salto finito

En $x = 2$ $f(2) = \text{no existe}$ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ Discontinuidad evitable

4.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

- Tiene asíntota vertical en $x = 2$ y asíntota horizontal en $y = -1$
- Su Dominio es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$
- Corta al eje OX sólo en el punto $(1, 0)$

Una gráfica sería:



5.- Dado el triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A=(1,4)$, $B=(3,-2)$ y $C=(-1,0)$.

Calcula:

- Su área.

Necesitamos una base y la altura correspondiente, tomamos como base AB y la altura correspondiente será la distancia del punto C a la recta AB.

Empezamos hallando la ecuación de la recta AB:

$$\text{Pendiente } m = \frac{-2-4}{3-1} = -3 \text{ y punto } A(1,4)$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente: } y = -3(x-1) + 4$$

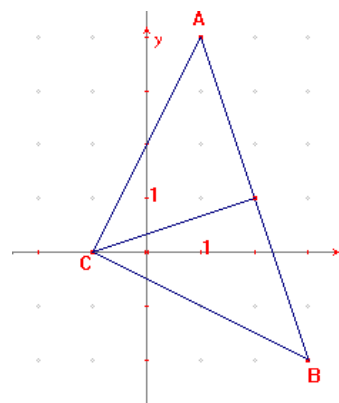
$$y = -3x + 7 \rightarrow 3x + y - 7 = 0 \text{ es la recta AB}$$

$$h = d(C, \overline{AB}) = \frac{|3 \cdot (-1) + 0 - 7|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} u$$

$$b = d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} u \rightarrow A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10\sqrt{40}}{2\sqrt{10}} = 10 u^2$$

- Su perímetro.

$$c = d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} u$$



$$b = d(A, C) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} u$$

$$a = d(B, C) = \sqrt{(-1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} u$$

$$P = \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{20} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5} u$$

c) El ángulo en C. Será el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ (α)

$$\overrightarrow{CA} = (1+1, 4-0) = (2, 4) \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = (3+1, -2-0) = (4, -2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{2 \cdot 4 + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ \text{ Triángulo rectángulo}$$

d) La ecuación de la mediatriz del lado AC. Punto medio M $\left(\frac{1-1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (0, 2)$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, -4) \perp (4, -2) \text{ mediatriz: } \frac{x-0}{4} = \frac{y-2}{-2} \rightarrow x+2y-4=0$$

6.- Determina m y n sabiendo que la recta $2x+ny=0$ pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $mx-2y+3=0$.

$$2x+ny=0 \text{ pasa por el punto } (1,2) \rightarrow 2 \cdot 1 + n \cdot 2 = 0 \Rightarrow 2n = -2 \Rightarrow n = -1$$

luego, la primera recta es $2x-y=0 \rightarrow$ vector normal (2,-1)

la segunda recta es $mx-2y+3=0 \rightarrow$ vector normal (m, -2)

ambos vectores tienen que tener la misma dirección, es decir que $m = 4$