[1º] Cierto mes, la granja A produjo 500000 huevos y la granja B, 600000. Los pesos de los huevos se ajustaron a sendas distribuciones normales con la misma desviación típica de 6 gramos pero distintas medias, 67 gramos para la A y 64 gramos para la B. ¿Cuál de las dos granjas produjo mayor cantidad de huevos de la clase XL (más de 73 gramos)?.

Solución

Las variables aleatorias que intervienen son:

X_A: peso de huevos de la granja A. $X_A \backsim N(67, 6)$

X_B: peso de huevos de la granja B. $X_B \backsim N(64, 6)$

La probabilidad de que un huevo de la granja A sea XL es:

$$p(X_A > 73) = p\left(Z > \frac{73-67}{6}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$$

La probabilidad de que un huevo de la granja B sea XL es:

$$p(X_B > 73) = p\left(Z > \frac{73-64}{6}\right) = p(Z > 1'5) = 1 - p(Z \leq 1'5) = 1 - 0'9332 = 0'0668$$

Por tanto, multiplicando la probabilidad de producir un huevo XL en cada granja por el número de huevos producidos en cada una, se tiene:

Granja A: 500000 · 0'1587=79350

Granja B: 600000 · 0'0668=40080

Se producen más huevos XL en la granja A que en la B.

[2º] Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso, en gramos, sigue una distribución normal de media 125 g y desviación típica 4 g.

a) Si las tabletas se empaquetan en lotes de de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 gramos?.

b) Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?.

Solución

Sea X la variable que mide el peso de las tabletas de chocolate. $X \backsim N(125, 4)$

a) Empaquetar en lotes de 25 tabletas equivale a muestras de tamaño $n = 25$.

Sabemos que la distribución de las medias muestrales $\bar{X}$, por tanto de los lotes, sigue una normal $\bar{X} \backsim N\left(125, \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(125, 0'8)$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} p(124 \leq \bar{X} \leq 126) &= p\left(\frac{124-125}{0'8} \leq Z \leq \frac{126-125}{0'8}\right) = p(-1'25 \leq Z \leq 1'25) = \\ &= p(Z \leq 1'25) - p(Z \leq -1'25) = p(Z \leq 1'25) - [p(Z > 1'25)] = \\ &= p(Z \leq 1'25) - [1 - p(Z \leq 1'25] = 2 \cdot p(Z \leq 1'25) - 1 \\ &= 2 \cdot 0'8944 - 1 = 0'788 \end{aligned}$$

b) Si los lotes son de 64 tabletas entonces el tamaño muestral es $n = 64$ y $\bar{X} \rightsquigarrow N\left(125, \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(125, 0'5)$

Por tanto:

$$p(\bar{X} > 124) = p\left(Z > \frac{124 - 125}{0'5}\right) = p(Z > -2) = p(Z < 2) = 0'9772$$

[3º]

a) Los salarios de los trabajadores de un país puede suponerse que siguen una distribución normal de media 2000 € y desviación típica desconocida. Si la probabilidad de ganar más de 2100 € es de 0'33, ¿cuál es la desviación típica?.

b) Los salarios, en euros, de los trabajadores en un segundo país también puede suponerse que siguen una distribución normal con la misma media y con varianza de 40000 €.¿Es más fácil ganar más de 2100 € en este segundo país que en el país del apartado anterior?.

Solución

a) Sea X la variable que mide el salario de los trabajadores del país.

$X \rightsquigarrow N(2000, \sigma)$

Sabemos que $p(X > 2100) = 0'33$

$$p(X > 2100) = 0'33 \Leftrightarrow p\left(Z > \frac{2100 - 2000}{\sigma}\right) = 0'33 \Leftrightarrow p\left(Z > \frac{100}{\sigma}\right) = 0'33 \Leftrightarrow$$

$$1 - p\left(Z \leq \frac{100}{\sigma}\right) = 0'33 \Leftrightarrow p\left(Z \leq \frac{100}{\sigma}\right) = 0'67 \Leftrightarrow \frac{100}{\sigma} = 0'44 \Leftrightarrow \sigma \approx 227'28$$

La desviación típica σ es, aproximadamente, 227'28 €.

b) Sea Y la variable que mide el salario de los trabajadores del segundo país.

Y$\rightsquigarrow N(2000, 200)$

$$p(Y > 2100) = p\left(Z > \frac{2100 - 2000}{200}\right) = p(Z > 0'5) = 1 - p(Z \leq 0'5)$$
$$= 1 - 0'6915 = 0'3085$$

Por tanto, no es más fácil ganar más de 2100 € en este segundo país.