Capítulo 5

Estadística

5.1. Año 2000

5.1.1. Modelo

Opción A

Problema 5.1.1 *(2 puntos)* Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de bachillerato de Madrid, es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg.

a) En caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral $\overline{X}$?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 kg de la media de la población, con probabilidad 0,95; ¿cuántos alumnos se deberían tomar en la muestra?

Solución:

a) Tenemos $N(\mu, 5)$ distribución de la población, luego la variable aleatoria media muestral $\overline{X}$ sigue una distribución

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(mu, 1\right)$$

b) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1{,}96\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 96{,}04$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra debe ser de $n = 97$ alumnos.

Opción B

Problema 5.1.2 *(2 puntos)* Se sabe por experiencia que el tiempo obtenido por los participantes olímpicos de la prueba de 100 metros, en la modalidad de Decathlón, es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 12 segundos y desviación típica 1,5 segundos. Para contrastar, con un nivel de significación de 5 %, si no ha variado el tiempo medio en la última Olimpiada, se extrajo una muestra aleatoria de 10 participantes y se anotó el tiempo obtenido por cada uno, con los resultados siguientes, en segundos:

13 12 11 10 11 11 9 10 12 11

a) ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa del contraste?

b) Determínese la región crítica.

c) Realícese el contraste.

Solución:

Tenemos $N(\mu, \sigma) = N(12; 1{,}5)$, $\overline{X} = 11$, $n = 10$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

a)
$$H_0 : \mu = 11$$
$$H_1 : \mu \neq 11$$

El intervalo de aceptación de la hipótesis nula es

$$\mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 \pm 0{,}0207 = (11{,}0703; 12{,}9297)$$

b) La región crítica sería el intervalo $(-\infty; 11{,}0703) \cup (12{,}9297; \infty)$

c) No se acepta la hipótesis ya que la media muestral pertenece a la región crítica.

5.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.1.3 *(2 puntos)* En una comunidad autónoma se estudia el número medio de hijos a partir de los datos disponibles en cada municipio. Se supone que este número sigue una distribución normal con desviación típica igual a 0,08. El valor medio de estos datos para 36 municipios resulta ser igual a 1,17 hijos por mujer. Se desea contratar, con un nivel de significación de 0,01, si el número medio de hijos por mujer en la comunidad es de 1,25.

Solución:

Tenemos $\overline{X} = 1{,}25$, $\sigma = 0{,}08$, $n = 36$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}575 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}216; 1{,}284)$$

Como la media a contrastar 1,17 está fuera del intervalo, rechazamos que la media pueda valer 1,25.

Opción B

Problema 5.1.4 *(2 puntos)* Una variable aleatoria X tiene distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99, ¿cuántos elementos, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?

Solución:

a) Tenemos

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(\mu; 0{,}75)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 2,575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 59,68$$

Luego $n = 60$

5.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.1.5 *(2 puntos)* El número de reclamaciones presentadas durante la campaña de Navidad en 9 tiendas de una empresa ha sido:

25 31 28 30 32 20 22 34 30

Se acepta que estos números de reclamaciones sigue una distribución normal con desviación típica igual a 5. Se desea contrastar si el número de reclamaciones es 26, con un nivel de significación de 0,05.

a) Plantéese cuáles son la hipótesis nula y la alternativa de contraste.

b) Determínese la región crítica de contraste.

c) ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

Solución:

a) Las hipótesis serían:

$$H_0 : \mu = 28$$
$$H_1 : \mu \neq 28$$

b) Tenemos $\overline{x} = 28$, $\sigma = 5$, $n = 9$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$El intervalo de confianza para la media poblacional $\mu = 26$ sería

$$\left(\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (22{,}733, 29{,}267)$$

La región crítica sería el intervalo $(-\infty, 22{,}733) \cup (29{,}267, \infty)$

c) Como la media muestral $\overline{x} = 28$ no está dentro de la región crítica, aceptamos que la media pueda valer 26.

Opción B

Problema 5.1.6 *(2 puntos)* Se supone que los gastos corrientes de los empleados de los distintos departamentos de una empresa siguen una distribución normal con desviación típica de 300 euros.

De los datos disponibles para 16 departamentos se ha obtenido un gasto medio por empleado de 2750 euros. Determínese un intervalo de confianza al 99 % para el gasto corriente medio por empleado en la empresa.

Solución:

$$\overline{X} = 2750, \quad \sigma = 300, \quad n = 16, \quad z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (2556{,}875; 2943{,}125)$$

5.2. Año 2001

5.2.1. Modelo

Opción A

Problema 5.2.1 *(2 puntos)* Un investigador afirma que las horas de vuelo de cierto tipo de aviones comerciales se distribuye normalmente, con una media de 200000 horas y una desviación típica de 20000 horas. Para comprobar la veracidad de sus hipótesis, obtuvo una muestra aleatoria de 4 aviones de distintas compañías aéreas, fuera ya de servicio, y anotó el número de horas de vuelo de cada uno, resultando los siguientes datos (en miles de horas):

150 320 270 140

a) Plantéese cuáles son la hipótesis nula y la alternativa de contraste.

b) Realícese el contraste con un nivel de significación del 5 %.

Solución:

Tenemos $N(\mu, \sigma) = N(200000, 20000)$, $\overline{X} = 220000$, $n = 4$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

a)

$$H_0 : \mu = 220000$$
$$H_1 : \mu \neq 220000$$

El intervalo de aceptación de la hipótesis nula es

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 200000 \pm 19600 = (180400, 219600)$$

b) La región crítica sería el intervalo $(-\infty, 180400) \cup (219600, \infty)$. No se acepta la hipótesis ya que la media muestral pertenece a la región crítica.

Opción B

Problema 5.2.2 *(2 puntos)* El tiempo de vida de una clase de depuradoras de agua utilizadas en una planta industrial se distribuye normalmente, con una desviación típica de 2000 horas. En un ensayo realizado con una muestra aleatoria de 9 depuradoras, se obtuvieron los siguientes tiempos de vida en miles de horas

9,5 10 7,5 10,5 16,5 10 12 32 18

a) Hállese un intervalo de confianza al 99 % para la vida media de las depuradoras.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que debería tener la muestra, en el caso de admitir un error máximo de 500 horas, con un grado de confianza del 95 %:

Solución:

a) Tenemos $N(\mu, 2000)$, $\overline{X} = 14000$, $n = 9$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}575$. El intervalo de confianza es

$$\left(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (12283{,}33; 15716{,}667)$$

b) Tenemos $N(\mu, 2000)$, $E = 500$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 61{,}4656$$

Luego, el tamaño mínimo que debe de tener la muestra es de $n = 62$.

5.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.2.3 *(2 puntos)* Un establecimiento vende paquetes de carbón para barbacoa de peso teórico 10 kg. Se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica 1 kg. Para contrastar la citada hipótesis, frente a que el peso teórico sea distinto de 10 kg, se escogen al azar 4 paquetes que pesan en kilogramos, respectivamente:

$$8 \quad 10 \quad 9 \quad 8$$

Se desea que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando esta es cierta, sea 0,95. Se pide:

a) La región crítica de contraste.

b) ¿Se debe rechazar la hipótesis nula?

Solución:

a) La media de la muestra vale $\overline{x} = 8{,}75$, la media de la población $\mu = 10$, $\sigma = 1$, $n = 4$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Calculamos un intervalo de aceptación para la media μ y comprobamos si la media muestral está dentro de él.

$$\left(\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (9{,}02; 10{,}98)$$

Las hipótesis serían:

$$H_0 : \mu = 10$$
$$H_1 : \mu \neq 10$$

b) Como la media $\overline{x} = 8{,}75 \notin (9{,}02, 10{,}98) \Longrightarrow$ no podemos aceptar la hipótesis de que el peso medio de los paquetes sea de 10 kg.

Opción B

Problema 5.2.4 *(2 puntos)* Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kg.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de esa variedad de sandía.

b) ¿Puede aceptarse la hipótesis de que el verdadero peso medio de las sandías es de 5 kg, frente a que sea diferente, con un nivel de significación de 0,05?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 6$, $\sigma = 1$, $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}804; 6{,}196)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Las hipótesis serían:

$$H_0 : \mu = 5$$
$$H_1 : \mu \neq 5$$

El intervalo de aceptación sería:

$$5 \pm 1{,}96 \cdot \frac{1}{100} \Longrightarrow (4{,}804, 5{,}196)$$

Se rechaza la hipótesis, ya que $6 \notin (4{,}804, 5{,}196)$. No podemos asegurar que el peso medio de las sandías sea 5 kg.

5.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.2.5 *(2 puntos)* El peso de los perros adultos de cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con desviación típica 0,6 kg. Una muestra aleatoria de 30 animales ha dado un peso medio de 7,4 kg.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para el peso medio de los perros adultos de esta raza.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para tener una confianza del 95 % de que la media muestral no se diferencie en más de 0,3 kg de la media de la población?

Solución:

a) La media de la muestra vale $\overline{X} = 7{,}4$, $\sigma = 0,6$, $n = 30$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}118; 7{,}682)$$

b)
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde $E = 0,3$, $\sigma = 0,6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$\Longrightarrow n = 15{,}37$$

Luego el tamaño de la muestra tiene que ser como mínimo de $n = 16$.

Opción B

Problema 5.2.6 *(2 puntos)* En un laboratorio se obtuvieron seis determinaciones del PH de una solución, con los resultados siguientes:

$$7,91 \quad 7,94 \quad 7,90 \quad 7,93 \quad 7,89 \quad 7,91$$

Se supone que la población de todas las determinaciones de PH de la solución tiene una distribución normal de media desconocida con una desviación típica igual a 0,02.

a) Determínese un intervalo de confianza al 98 % para la media de todas las determinaciones del PH de la misma solución obtenidas con el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea a lo sumo 0,02?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 7{,}913$, $\sigma = 0{,}02$, $n = 6$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}894349787; 7{,}932316878)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}1 = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}02}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 21{,}6225$$

Luego el menor tamaño de la muestra debe ser $n = 22$.

5.3. Año 2002

5.3.1. Modelo

Opción A

Problema 5.3.1 *(2 puntos)* El peso de individuos de cierta especie se distribuye como una variable aleatoria normal con media 50 euros y desviación típica 4.

a) Calcular la probabilidad de que la media muestral obtenida con los valores de 16 individuos seleccionados aleatoriamente, esté entre 48 y 50.

b) Se seleccionan aleatoriamente 4 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de la muestra supere el valor 54?

Solución:

a) La distribución será $N\left(50, \dfrac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50,1)$:

$$P(48 \le \overline{X} \le 50) = P\left(\frac{48-50}{1} \le Z \le \frac{50-50}{1}\right) = P(-2 \le Z \le 0) =$$

$$P(Z \le 0) - P(Z \le -2) = P(Z \le 0) - (1 - P(Z \le 2)) =$$

$$P(Z \le 0) + P(Z \le 2) - 1 = 0,5 + 0,9772 - 1 = 0{,}4772$$

b) La distribución será $N\left(50, \dfrac{4}{\sqrt{4}}\right) = N\,(50,2)$.

$$P(\overline{X} \ge 54) = P\left(Z \ge \frac{54-50}{2}\right) =$$

$$P(-2 \le Z) = 1 - P(2 \le Z) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Opción B

Problema 5.3.2 *(2 puntos)* Una investigación sobre el servicio post-venta para clientes que adquirieron cierta marca de automóviles, presenta los siguientes datos sobre una muestra de 608 clientes: 371 están muy satisfechos frente a los 45 que se declaran muy insatisfechos.

a) A nivel de significación del 5 %, ¿se puede concluir que la proporción de clientes muy satisfechos es superior al 60 %?

b) Explicar el error de Tipo I de este contraste. ¿Con qué probabilidad se comete el error?

Solución:

a) Calculamos el intervalo de confianza para esta proporción donde $p = \dfrac{371}{608} = 0,61$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$IC = \left(p - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) =$$

$$= (0{,}5714304009; 0{,}6489643359)$$

Como $0{,}60 < 0{,}6489643359$ está dentro del intervalo podemos aceptar la hipótesis planteada.

b) El error tipo I es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta, es decir, es el nivel de significación $= 0,05$.
Nivel de significación:
Es la probabilidad de cometer un error **TIPO I**, y se denota por α.

$$\alpha = P(\text{Rechazar } H_0 | H_0 \text{ Cierta})$$

5.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.3.3 *(2 puntos)* Se quiere comprobar si una máquina destinada al llenado de envases de agua mineral ha sufrido desajuste. Una muestra aleatoria de diez envases de esta máquina ha proporcionado los siguientes resultados:

$$0,49, \quad 0,52, \quad 0,51, \quad 0,48, \quad 0,53, \quad 0,55, \quad 0,49, \quad 0,50, \quad 0,52, \quad 0,49$$

Suponiendo que la cantidad de agua mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase sigue una distribución normal de media 0,5 litros y una desviación típica de 0,02 litros, se desea contrastar si el contenido medio de los envases de esta máquina es de 0,5 litros, con un nivel de significación del 5 %.

a) Plantear la hipótesis nula y la alternativa de contraste.

b) Determinar la región crítica del contraste.

c) Realizar el contraste.

Solución: La media muestral vale $\overline{X} = 0,508$.

a) Se trata de un contraste bilateral

$$H_0 : \mu = \overline{X}$$
$$H_1 : \mu \neq \overline{X}$$

b) Son aquellos valores para los que $|\overline{X} - \mu| > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2} = 1,96$, $\overline{X} = 0,508$, $\mu = 0,0,5$, $\sigma = 0,02$ y $n = 10$.

$$|\overline{X} - \mu| > 1,96\,\frac{0,05}{\sqrt{10}} = 0,012$$

La región crítica será el intervalo $(\mu - 0{,}012, \mu + 0{,}012) = (0{,}488, 0{,}512)$.

c) Como $|\overline{X}-\mu| = 0{,}508-0{,}5 = 0{,}008$ está dentro del intervalo, no se puede rechazar la hipótesis nula y, por tanto, la máquina no ha tenido desajustes.

Opción B

Problema 5.3.4 *(2 puntos)* La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 35 segundos. Calcular un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de las llamadas.

Solución:

$$N(\mu, 10) \quad n = 50 \quad \overline{X} = 35 \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (32{,}2281; 37{,}7718)$$

5.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.3.5 *(2 puntos)* Los depósitos mensuales, en euros, de una entidad bancaria, siguen una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 5,1$. Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es 20 euros, se toma una muestra de tamaño 16, resultando ser la media muestral de 22,4 euros. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es 20 a un nivel de significación del 5 %?.

Solución:

Se trata de un contraste bilateral

$$H_0 : \mu = 22,4$$
$$H_1 : \mu \neq 22,4$$

Rechazaremos H_0 para aquellos valores que cumplan $|\overline{X} - 20| > z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2} = 1,96$, $\overline{X} = 22,4$, $\sigma = 5,1$ y $n = 16$.

$$|\overline{X} - \mu| > 1,96\,\frac{5,1}{\sqrt{16}} = 2,499$$

Como $|\overline{X} - 20| = 2,4 < 2,499$, está fuera de la región crítica, no se puede rechazar la hipótesis nula y, por tanto, la media de los depósitos mensuales puede decirse que, vale 20 euros.

Opción B

Problema 5.3.6 *(2 puntos)* De una población con distribución normal de media 50 y desviación típica 6, se extrae una muestra aleatoria de tamaño n y se calcula su media muestral.

a) ¿Qué valor debe de tener n para que se cumpla la desigualdad $|\overline{X}-\mu| < 2$, con un probabilidad de 0,95?

b) Resolver el apartado anterior con un probabilidad de 0,90. Comparar ambos resultados.

Solución:

a)

$$N(50,6) \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 1{,}96\frac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1{,}96\cdot 6}{2}\right)^2 = 34{,}5744$$

$$n = 35$$

b)

$$1-\alpha = 0{,}9 \Longrightarrow \alpha = 0{,}1 \Longrightarrow \alpha/2 = 0{,}05$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 = 0{,}95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 1{,}645\frac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1{,}645\cdot 6}{2}\right)^2 = 24{,}354225 \Longrightarrow n = 25$ Al disminuir el nivel de confianza necesitamos una muestra menor.

5.4. Año 2003

5.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 5.4.1 *(2 puntos)* Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?
Solución:

$$N(\mu; 0{,}05), \quad z_{\alpha/2} = 2{,}575, \quad E = 0{,}01$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2{,}575 \cdot 0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 165{,}77 \Longrightarrow n = 166$$

Opción B

Problema 5.4.2 *(2 puntos)* Se probaron 10 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6,5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.
Solución:

$$N(\mu, 2) \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96 \quad n = 10$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(6{,}5 - 1{,}96\frac{2}{\sqrt{10}}, 6{,}5 + 1{,}96\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (5{,}260387157; 7{,}739612842)$$

5.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.4.3 *(2 puntos)* El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual que 6 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.
Solución:

$$N(\mu, 15) \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96 \quad E = 3$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{3}\right)^2 = 96{,}04$$

$$n = 97$$

Opción B

Problema 5.4.4 *(2 puntos)* Se ha extraído una muestra de 150 familias de residentes en un barrio obteniéndose que la renta familiar media de la misma asciende a 20000 euros. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros.

a) A partir de estos datos, calcular un intervalo de confianza para la renta familiar media con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo es necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 90 %, un error en la estimación de la renta familiar media no superior a ± 142 euros?

Solución:

$$N(\mu, 150) \quad \overline{X} = 20000 \quad n = 150$$

a)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(20000 - 1{,}96\frac{150}{\sqrt{150}}, 20000 + 1{,}96\frac{150}{\sqrt{150}}\right) = (19975{,}995; 20024{,}00499)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 142 = 1{,}645\frac{150}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1{,}645 \cdot 150}{142}\right)^2 = 3{,}019518076$$

$$n = 4$$

5.5. Año 2004

5.5.1. Modelo

Opción A

Problema 5.5.1 *(2 puntos)* Se supone que los ingresos diarios en una empresa siguen una distribución normal con media 400 euros y desviación típica 250 euros.

a) ¿Cómo se distribuye la media muestral, para muestras de tamaño n?.

b) Se dispone de una muestra aleatoria de 25 observaciones. Calcular la probabilidad de que el promedio de ingresos esté entre 350 y 450 euros.

Solución:

a) La distribución será $N\left(400, \dfrac{250}{\sqrt{n}}\right)$

b) La distribución será $N\left(400, \dfrac{250}{\sqrt{25}}\right) = N(400, 50)$.

$$P(350 < \overline{X} < 450) = P\left(\frac{350-400}{50} < Z < \frac{350-400}{50}\right) = P(-1 < Z < 1)$$

$$= P(Z < 1) - P(-1 < Z) = 2P(z < 1) - 1 = 0,6826$$

Opción B

Problema 5.5.2 *(2 puntos)* El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio, con un nivel de confianza del 95 %. Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de 6 euros.
Solución:
Tenemos $N(\mu, 15)$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 96,04 \Longrightarrow n = 97$$

5.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.5.3 *(2 puntos)* En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos.

b) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman muestras aleatorias de 64 clientes?. Especificar sus parámetros.

Solución:
$N(10, 2)$, normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$.

a)
$$n = 25 \Longrightarrow N\left(10, \frac{2}{\sqrt{25}}\right) = N\left(10, \frac{2}{5}\right) = N(10; 0,4)$$
$$P(\overline{X} \le 9) = P\left(z \le \frac{9-10}{0,4}\right) = P(z \le -2,5) = 1 - P(z \le 2,5) =$$
$$= 1 - 0,9938 = 0,0062$$

b)
$$n = 64 \Longrightarrow N\left(10, \frac{2}{\sqrt{64}}\right) = N\left(10, \frac{2}{8}\right) = N(10; 0,25)$$

Se trata de una normal de media 10 y desviación típica 0,25.

Opción B

Problema 5.5.4 *(2 puntos)* El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son

255 85 120 290 80 80 275 290 135

a) Construir un intervalo de confianza al 98 % para la media poblacional.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99 %, el error de estimación del precio no supere los 50 euros

Solución:
$N(\mu, 100)$, normal de media μ y desviación típica $\sigma = 100$, $\overline{X} = 178,89$.

a)

$$1-\alpha = 0,98 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,99 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(178,89 - 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}; 178,89 + 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}\right) = (101,47; 256,31)$$

b)

$$1-\alpha = 0,99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 50 = 2,575\frac{100}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot 100}{50} \Longrightarrow n = 26,52$$

Luego $n = 27$.

5.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.5.5 *(2 puntos)* Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos 88, 90, 90, 86, 87, 88, 91, 92, 89.
Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:

$$\overline{X} = \frac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9} = 89, \ \ n = 9, \ \ \sigma = 1,8$$

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(89 - 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}};\ 89 + 1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C. = (87,824;\ 90,176)$$

Opción B

Problema 5.5.6 *(2 puntos)* Calcular el tamaño mínimo que debe de tener una muestra aleatoria para garantizar que, en la estimación de la media de una población normal con varianza igual a 60, al 90 % de confianza, el error de estimación cometido no sea superior a 3 unidades.

Solución:

$$1-\alpha = 0,9 \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Longrightarrow P(z \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,95 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,64$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{n}} = 3 \Longrightarrow n = 17,93$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 18$.

5.6. Año 2005

5.6.1. Modelo

Opción A

Problema 5.6.1 *(2 puntos)* El número de días de ausencia en el trabajo de los empleados de cierta empresa para un período de seis meses, se puede aproximar mediante una distribución normal de desviación típica 1,5 días. Una muestra aleatoria de diez empleados ha proporcionado los siguientes datos

$$5 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 1$$

a) Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de días que los empleados de esa empresa han faltado durante los seis últimos meses.

b) ¿Qué tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 días, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a) Tenemos $N(\mu, 1{,}5)$, $n = 10$, $\overline{X} = \dfrac{50}{10} = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}219707987; 5{,}780292012)$$

b)
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}5 = 1{,}645\frac{1{,}5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 24{,}354225 \Longrightarrow n = 25$$

Opción B

Problema 5.6.2 *(2 puntos)* La temperatura corporal en una cierta especie animal es una variable aleatoria que tiene una distribución normal de media 36,7°C y desviación típica 3,8ºC. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 ejemplares de esa especie. Hallar la probabilidad de que la temperatura corporal media de la muestra:

a) Sea menor o igual a 36,9°C.

b) Esté comprendida entre 36,5°C y 37,3°C.

Solución:
Se trata de una distribución $N\left(36{,}7; \dfrac{3{,}8}{\sqrt{100}}\right) = N(36{,}7; 0{,}38)$

a)
$$P(\overline{X} \le 36{,}9) = P\left(Z \le \frac{36{,}9 - 36{,}7}{0{,}38}\right) = P(Z \le 0{,}52) = 0{,}6985$$

b)
$$P(36{,}5 \le \overline{X} \le 37{,}3) = P\left(\frac{36{,}5 - 36{,}7}{0{,}38} Z \le \frac{37{,}3 - 36{,}7}{0{,}38}\right) =$$
$$P(-0{,}52 \le Z \le 1{,}58) = P(Z \le 1{,}58) - P(Z \le (-0{,}52) =$$
$$P(Z \le 1{,}58) + P(Z \le (0{,}52) - 1 = 0{,}695 + 0{,}9429 - 1 = 0{,}6379$$

5.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.6.3 *(2 puntos)* En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

a) Hallar un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.

b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?.

Solución:

a)
$$1 - \alpha = 0,80 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,9 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28$$
$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(5 - 1,28 \frac{2}{\sqrt{10{,}000}}; 5 - 1,28 \frac{2}{\sqrt{10{,}000}}\right) = (4,9744; 5,0256)$$

b)
$$1 - \alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$
$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96 \frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,25} \Longrightarrow n = 245,8624$$

Luego $n = 246$.

Opción B

Problema 5.6.4 *(2 puntos)* Para una población $N(\mu, \sigma = 25)$, ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar μ mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una probabilidad mayor o igual que 0,95?.

Solución:

$$1 - \alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1,96 \frac{25}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 25}{5} \Longrightarrow n = 96,04$$

Luego $n = 97$.

5.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.6.5 *(2 puntos)* La duración de las baterías de un determinado modelo de teléfono móvil tiene una distribución normal de media 34.5 horas y una desviación típica de 6.9 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 teléfonos móviles.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las baterías de la muestra este comprendida entre 32 y 33.5 horas?.

b) ¿Y de que sea mayor de 38 horas?.

Solución:

a)

$$N(34{,}5; 6{,}9), \quad n = 36, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}15$$

$$P(32 < \overline{X} < 33{,}5) = P\left(\frac{32 - 34{,}5}{1{,}15} < Z < \frac{33{,}5 - 34{,}5}{1{,}15}\right) =$$

$$P(Z < 2{,}17) - P(Z < 0{,}86) = 0{,}9850 - 0{,}8051 = 0{,}1799$$

b)

$$P(\overline{X} > 38) = 1 - P(38 < \overline{X}) = 1 - P\left(Z < \frac{38 - 34{,}5}{1{,}15}\right) = 1 - 1 = 0$$

Opción B

Problema 5.6.6 *(2 puntos)* El tiempo de reacción de una alarma electrónica ante un fallo del sistema es una variable aleatoria normal con desviación típica 1 segundo. A partir de una muestra de 100 alarmas se ha estimado la media poblacional del tiempo de reacción, mediante un intervalo de confianza, con un error máximo de estimación igual a 0.2 segundos. ¿Con qué nivel de confianza se ha realizado la estimación?.

Solución:

$$N(\mu,1),\quad n=100,\quad E=0{,}2$$
$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 0{,}2=z_{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{100}}\Longrightarrow$$
$$z_{\alpha/2}=2\Longrightarrow 1-\alpha=0{,}9772$$

El nivel de confianza es del 97.72 %.

5.7. Año 2006

5.7.1. Modelo

Opción A

Problema 5.7.1 *(2 puntos)* El tiempo de conexión a Internet de los clientes de un cibercafé tiene una distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 horas. Una muestra de 40 clientes ha dado como resultado una media de tiempo de conexión de 2,85 horas. Se pide:

a) Determinar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Calcular el tamaño mínimo que debería tener la muestra para estimar la media de tiempo diario de conexión a Internet de los clientes de ese cibercafé, con un error menor o igual que 0,25 horas y una probabilidad de 0,95.

Solución:

a) Tenemos $N(\mu;1{,}2)$, $n=40$, $\overline{X}=2{,}85$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96\Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(2{,}478116147;3{,}221883852)$$

b)
$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 0{,}25=1{,}96\frac{1{,}2}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=88{,}510464\Longrightarrow n=89$$

Opción B

Problema 5.7.2 *(2 puntos)* Un fabricante de automóviles afirma que los coches de un cierto modelo tienen un consumo por cada 100 kilómetros que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 0,68 litros. Se observa una muestra aleatoria simple de 20 coches del citado modelo y se obtiene una media de consumo de 6,8 litros. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media de consumo de ese modelo de vehículos.

Solución:

Se trata de una distribución $N(\mu;0{,}68)$, $n=20$, $\overline{X}=6{,}8$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96\Longrightarrow$

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(6{,}501976859;7{,}098023140)$$

5.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.7.3 *(2 puntos)* En cierta población humana, la media muestral $\overline{X}$ de una característica se distribuye mediante una distribución normal. La probabilidad de que $\overline{X}$ sea menor o igual a 75 es 0,58 y la de que $\overline{X}$ sea mayor que 80 es 0,04. Hallar la media y la desviación típica de $\overline{X}$. (Tamaño muestral $n = 100$).

Solución:

$$P\left(\overline{X} \le 75\right) = 0{,}58,\ \ P\left(\overline{X} > 80\right) = 0{,}04 \Longrightarrow P\left(\overline{X} \le 80\right) = 0{,}96$$

$$\left\{\begin{array}{l} P\left(Z \le \frac{75-\mu}{\sigma/\sqrt{100}}\right) = 0{,}58 \Longrightarrow \frac{75-\mu}{\sigma/\sqrt{100}} = 0{,}2 \\ \\ P\left(Z \le \frac{80-\mu}{\sigma/\sqrt{100}}\right) = 0{,}96 \Longrightarrow \frac{80-\mu}{\sigma/\sqrt{100}} = 1{,}75 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 74{,}355 \\ \sigma = 32{,}258 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 5.7.4 *(2 puntos)* El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución $N(\mu, \sigma)$ con $\sigma = 3$ minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos y se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95 % para μ.
Solución:

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (3{,}1406; 6{,}8594)$$

5.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.7.5 (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de la batería de cierto teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

$$33 \ \ 34 \ \ 26 \ \ 37 \ \ 30 \ \ 39 \ \ 26 \ \ 31 \ \ 36 \ \ 19$$

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de este modelo de baterías.

Solución:

$$N(\mu, 5) \ \ \overline{X} = 31{,}1 \ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (28{,}00096789; 34{,}19903210)$$

Opción B

Problema 5.7.6 (Puntuación máxima: 2 puntos)

El peso en kg de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60 kg y desviación típica 8 kg. Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral

b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 kg?

Solución:

a) $N(60, 1)$

b) $P(59 \leq \overline{X} \leq 61) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 0,6826$ Luego $100 \cdot 0,6826 = 68,26 \Longrightarrow$ en 68 muestras cabe esperar que la media esté entre 59 y 61 kg.

5.8. Año 2007

5.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

5.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.8.1 *(2 puntos)* La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla de Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

Solución:

a) Tenemos

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(35, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N\left(35, 0{,}5\right)$$

Media 35 varianza $0{,}5^2 = 0{,}25$

b)

$$P\left(36 \leq \overline{X} \leq 37\right) = P\left(\frac{36-35}{0{,}5} \leq Z \leq \frac{37-35}{0{,}5}\right) = P(2 \leq Z \leq 4) =$$
$$P(Z \leq 4) - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Opción B

Problema 5.8.2 *(2 puntos)* La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

$$57,\ 49,\ 70,\ 40,\ 45,\ 44,\ 49,\ 32,\ 55,\ 45$$

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de las rosas.

Solución:

Se trata de una distribución $N(\mu, 10)$, $n = 10$, $\overline{X} = 48{,}6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (42{,}40193578; 54{,}79806421)$$

5.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.8.3 *(2 puntos)* Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcular:

a) El intervalo de confianza para la recaudación diaria media con un nivel de confianza del 99 %.

b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria menor de 127 euros.

Solución:

a) Tenemos

$$N(\mu, 328), \quad n = 100, \quad \overline{X} = 1248, \quad z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1163,54; 1332,46)$$

b)

$$E = 127, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 127 = 1,96\frac{328}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 370,97$$

El tamaño mínimo de la muestra debe de ser n=371

Opción B

Problema 5.8.4 *(2 puntos)* El tiempo invertido en cenar por cada cliente de una cadena de restaurantes es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 32 minutos. Se quiere estimar la media de dicho tiempo con un error no superior a 10 minutos, y con un nivel de confianza del 95 %.

Determinar el tamaño mínimo muestral necesario para poder llevar a cabo dicha estimación.

Solución:

$$E = 10, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 1,96\frac{32}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 39,337984$$

El tamaño mínimo de la muestra debe de ser $n = 40$.

5.9. Año 2008

5.9.1. Modelo

Opción A

Problema 5.9.1 *(2 puntos)* La edad de la población que vive en residencias de mayores en Madrid sigue una distribución normal de desviación típica 7,3 años. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. ¿Se puede asegurar que la edad media de la población difiere en menos de 2 años de la media de la media de la muestra con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

a) Tenemos

$$N(\mu, 7{,}3), \quad n = 50, \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{7{,}3}{\sqrt{50}} = 2{,}023$$

Como $IC = \left(\overline{X} - 2{,}023, \overline{X} + 2{,}023\right)$ no podemos asegurar, que la edad media de la población difiere en menos de 2 años.

Opción B

Problema 5.9.2 *(2 puntos)* Para conocer la producción media de sus olivos, un olivarero escoge al azar 10 de ellos, pesa su producción de aceitunas, y obtiene los siguientes valores, expresados en kg:

$$175, \ 180, \ 210, \ 215, \ 186, \ 213, \ 190, \ 213, \ 184, \ 195$$

Sabemos que la producción sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15,3.

Se pide estimar la producción media del olivar con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu; 15{,}3) \;\; n = 10, \;\; \overline{X} = 196{,}1, \;\; z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (186{,}617; 205{,}583)$$

5.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.9.3 *(2 puntos)* El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91; 68; 39; 82; 55; 70; 72; 62; 54; 67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) Se trata de una distribución $N(\mu, 15)$, $n = 10$, $\overline{X} = 66$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (58{,}19707987; 73{,}80292012)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1{,}96\frac{15}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}5744$$

Luego $n = 35$

Opción B

Problema 5.9.4 *(2 puntos)* El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en cierta región, se supone que es una variable aleatoria con una distribución normal con una desviación típica de 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a una hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor de 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98 %? Razónese.

b) ¿Qué tamaño mínimo muestral debe tomarse para que el error de estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95 %

Solución:

a)

$$z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}325\frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}29$$

El error de estimación es menor de 0.29 toneladas, luego podemos afirmar que, es menor de 0.5 toneladas.

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$0{,}5 = 1{,}96\frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 15{,}3664$$

$$n = 16$$

5.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.9.5 *(2 puntos)* Se supone que la calificación en Matemáticas obtenida por los alumnos de una cierta clase es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10 y se obtiene una suma de sus calificaciones igual a 59,5 puntos.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la calificación media de la clase.

b) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0,5 puntos, con el nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) Se trata de una distribución $N(\mu, 1{,}5)$, $n = 10$, $\overline{X} = 5{,}95$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5{,}020290367; 6{,}879709632)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0{,}5 = 1{,}96\frac{1,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}5744$$

Luego $n = 35$

Opción B

Problema 5.9.6 *(2 puntos)* La duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:

$$46,\quad 38,\quad 59,\quad 29,\quad 34,\quad 32,\quad 38,\quad 21,\quad 44,\quad 34$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra observada para que el error de la estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 90 %

Solución:

a) Se trata de una distribución $N(\mu, 10)$, $n = 10$, $\overline{X} = 37{,}5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96 \Longrightarrow$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (31{,}30193578; 43{,}69806421)$$

b)

$$z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1{,}645\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 10{,}8241$$

Luego $n = 11$

5.10. Año 2009

5.10.1. Modelo

Opción A

Problema 5.10.1 *(2 puntos)* Se supone que el peso de los niños recién nacidos en una cierta región es una variable aleatoria con distribución normal de media 3,25 kg y desviación típica 0,8 kg. Se elige aleatoriamente una muestra de 64 niños recién nacidos en esa región. Sea $\overline{X}$ la media muestral de los pesos observados.

a) ¿Cuáles son la media y la desviación típica de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3,3 kg y 3,5 kg?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25, 0{,}8)$, $n = 64$

a) $\overline{X} = 3{,}25$, $\sigma = \dfrac{0{,}8}{\sqrt{64}} = 0{,}1 \Longrightarrow N(3{,}25; 0{,}1)$

b)

$$P(3{,}3 \le \overline{X} \le 3{,}5) = P\left(\frac{3{,}3 - 3{,}25}{0{,}1} \le Z \le \frac{3{,}5 - 3{,}25}{0{,}1}\right) =$$

$$P(0{,}5 \le Z \le 2{,}5) = P(Z \le 2{,}5) - P(Z \le 0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023$$

Opción B

Problema 5.10.2 *(2 puntos)* Se han elegido al azar 10 televisores de un taller de electrónica y se ha anotado el número de horas que se han necesitado para su reparación. Los resultados han sido:

$$7,\ 5,\ 8,\ 2,\ 4,\ 7,\ 4,\ 1,\ 6,\ 6$$

Se supone que el número de horas de reparación de este tipo de televisores es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para el tiempo medio de reparación.

b) ¿Que tamaño debe tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea 0,5 horas con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a)

$$N(\mu; 1{,}5) \ \ n = 10, \ \ \overline{X} = 5, \ \ z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}21707987; 5{,}780292012)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 24{,}354225$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 25$.

5.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.10.3 *(2 puntos)* Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una determinada familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95 %?

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Solución:

a)

$$N(\mu, 55), \ \ \ n = 81, \ \ \ z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$P\left(\left|\overline{X} - \lambda\right| \le 10\right) \ge 0{,}95 \Longrightarrow P\left(\left|\overline{X} - \lambda\right| \le 10\right) = P\left(|Z| \le \frac{10}{55/\sqrt{81}}\right) =$$

$$P\left(|Z| \le 1{,}64\right) = 0{,}9495 \le 0{,}95$$

No podemos asegurar esa hipótesis.

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 116,2084 \Longrightarrow n = 117$$

Opción B

Problema 5.10.4 *(2 puntos)* Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtiene las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

$$9,1;\ 4,9;\ 7,3;\ 2,8;\ 5,5;\ 6,0;\ 3,7;\ 8,6;\ 4,5;\ 7,6$$

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95 %.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98 %.

Solución:

a) $N(\mu,2)$, $n=10$, $\overline{X}=6$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96$:

$$IC=\left((\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(4{,}76039;7{,}23961)$$

b) $E=1$ y $z_{\alpha/2}=2{,}325$:

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=21{,}6225$$

Como n tiene que ser un número natural $n=22$.

5.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.10.5 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95 %.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25,0{,}8)$, $n=64$

a) $\sigma=1,32$ y $z_{\alpha/2}=1,96$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow\sqrt{n}=5,175$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n=27$.

b) $N(4,36;1,32) \Longrightarrow \overline{X} \sim N(4,36;0,33)$

$$P(4 \le \overline{X} \le 5) = P\left(\frac{4-4,36}{0,33} \le Z \le \frac{5-4,36}{0,33}\right) =$$

$$P(-1,09 \le Z \le 1,94) = P(Z \le 1,94) - P(Z \le -1,09) = 0{,}8359$$

Opción B

Problema 5.10.6 *(2 puntos)* Se supone que la estancia (en días) de un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media de un paciente en dicho hospital.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

Solución:

a)

$$N(\mu,9) \;\; n=20, \;\; \overline{X}=8, \;\; z_{\alpha/2}=1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}0556; 11{,}9444)$$

b) $E=2$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 77{,}79$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n=78$.

5.11. Año 2010

5.11.1. Modelo

Opción A

Problema 5.11.1 *(2 puntos)* Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuántos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

Solución:

La distribución de la media en un lote:

$$N(900,80), \quad n=100 \Longrightarrow N(900, 80/\sqrt{100}) = N(200,8)$$

$$P(\overline{X} > 910) = P\left(Z > \frac{910-900}{8}\right) =$$

$$1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0,8943502263 = 0,1056497736$$

La probabilidad calculada es la de que la media de un lote sobrepase las 910 horas y, como tenemos 1000 lotes, el número de lotes en los que esperamos que se sobrepasen las 910 horas será de $1000 \cdot 0,1056497736 \simeq 105$ lotes

Opción B

Problema 5.11.2 *(2 puntos)* La temperatura corporal de cierta especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5°C y desviación típica 4,9°C. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea $\overline{X}$ la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9°C y 41,1°C?

Solución:

a) $N(40{,}5; 4{,}9)$, $n = 100$ entonces $\overline{X}$ se distribuye según una normal $N(40{,}5, 4{,}9/\sqrt{100}) = N(40{,}5; 0{,}49)$ de media 40,5°C y desviación típica 0,49ºC, luego la varianza será de $0,49^2 = 0,2401$°C.

b)
$$P\left(39,9 < \overline{X} < 41,1\right) = P\left(\frac{39,9 - 40,5}{0,49} < \overline{X} < \frac{41,1 - 40,5}{0,49}\right) =$$
$$P\left(-1,22 < Z < 1,22\right) = P(Z < 1,22) - P(Z < -1,22) =$$
$$2P(Z < 1,22) - 1 = 0,7775351250$$

5.11.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.11.3 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

a) Hállese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a)
$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(19,84 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}; 19,84 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}\right) = (19,35; 20,33)$$

b)
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,2}\right)^2 = 24,01$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 25$ televisores.

Opción B

Problema 5.11.4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a 6 minutos.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 minuto?

Solución:

a)

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}; 6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}\right) = (5,902; 6,098)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,5}\right)^2 = 3,84$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 4$ llamadas.

5.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.11.5 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

b) Determínese el intervalo de confianza del 95 % para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución:

$$N(\mu, 320), \quad n = 36$$

a)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{300}{320} = 0,9375$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$$

$$P(Z < 0,9375) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,8289 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,3422$$

$$P(|\mu - \overline{X}| > 50) = \alpha = 0,3422 \text{ nivel de significación}$$

b)

$$\overline{X} = 4820, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4715,47; 4924,53)$$

Opción B

Problema 5.11.6 *(2 puntos)* Para estimar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42;175,56) para dicha media poblacional.

a) Calcúlese la media de la muestra seleccionada.

b) Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

Solución:

$$N(\mu, 5), \quad n = 100, \quad (173,42; 175,56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{5}{10} = 173,42 \\ \\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{5}{10} = 175,56 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 174,49 \\ \\ z_{\alpha/2} = 2,14 \end{array} \right.$$

a) $\overline{X} = 174,49$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}14 \Longrightarrow P(Z < 2{,}14) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,9838 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0324 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 1 - 0,0324 = 0,9676.$

$$\text{Nivel de Confianza} = \boxed{96,76\,\%}$$

5.12. Año 2011

5.12.1. Modelo

Opción A

Problema 5.12.1 *(2 puntos)* Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de la población (medido en miligramos por decílitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual a 0,98?

Solución:

La distribución de la media es: $N(\mu, 35)$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 16{,}55$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 17$

Opción B

Problema 5.12.2 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para estimar la media de la variable aleatoria.

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 25$, $\overline{X} = 12$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (11,342; 12,658)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 1536,64$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 1537$

5.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.12.3 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 5 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $N(\mu, 15)$, $n = 400$, $\overline{X} = 180$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (178,53; 181,47)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 7,51$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 8$

Opción B

Problema 5.12.4 *(2 puntos)* Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

$$1,50;\quad 1,60;\quad 1,10;\quad 0,90;\quad 1,00;\quad 1,60;\quad 1,40;\quad 0,90;\quad 1,30;\quad 1,20$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestral y la μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.

Solución:

a) $N(\mu; 0{,}09)$, $n = 10$, $\overline{X} = 1{,}25$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}194; 1{,}306)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 5{,}37$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 6$

5.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.12.5 *(2 puntos)*. Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.

b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Solución:

$$N(98; 15) \quad n = 9 \Longrightarrow \overline{X} \equiv N(98; 5)$$

a) $P(\overline{X} \geq 100) = P\left(\frac{\overline{X}-98}{5} \geq \frac{100-98}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{5}\right) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$

b) Sea $A = \{\overline{X} \leq 104\}$ y sea $B = \{\overline{X} \geq 100\}$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(100 \leq \overline{X} \leq 104)}{P(\overline{X} \geq 100)} = \frac{P(0,40 \leq Z \leq 1,2)}{P(Z \geq 0,40)} =$$

$$\frac{P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq 0,40)}{1 - P(Z \leq 0,40)} = \frac{0,8849 - 0,6554}{1 - 0,6554} = \frac{0,2295}{0,3446} = 0,6659$$

Opción B

Problema 5.12.6 *(2 puntos).* Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de test y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

a) Para una muestra aleatoria simple de 9 test, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95 %.

b) ¿Cuál es el número mínimo de test que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a) $N(\theta, 10)$, $n = 9$, $\overline{X} = 110$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (103,467; 116,534)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 15,3664$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 16$

5.12.4. Reserva

Opción A

Problema 5.12.7 *(2 puntos).* Se supone que la altura (en cm) que alcanza la espuma de un cierto detergente para lavadoras durante un lavado estándar se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1,5 *cm*. Una muestra aleatoria simple de 10 lavados de ese tipo ha dado las siguientes alturas de espuma:

$$7;\quad 4;\quad 4;\quad 5;\quad 7;\quad 6;\quad 2;\quad 8;\quad 6;\quad 1$$

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el valor absoluto del error máximo en la estimación sea de 0,5 *cm* con el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$N(\mu; 1,5),\quad n = 10\quad \overline{X} = 5$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4,22; 5,78)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,645 \cdot 1,5}{0,5}\right)^2 = 24,354 \Longrightarrow n = 25$$

Opción B

Problema 5.12.8 *(2 puntos).* Se supone que la estatura de los individuos de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media 170 cm y desviación típica 4 cm.

a) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple de 16 individuos. Calcúlese $P(X < 167)$.

b) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple y resulta que $P(X > 172) = 0,0062$. Determínese el tamaño de la muestra extraída.

Solución:

a) $N(\mu; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 1)$:

$$P(\overline{X} < 170) = P\left(Z < \frac{167 - 170}{1}\right) =$$

$$P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

b) $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 4/\sqrt{n})$:

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(Z > \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) =$$

$$1 - 0,0062 = 0,9938 \Longrightarrow \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}} = 2,5 \Longrightarrow \sqrt{n} = 5 \Longrightarrow n = 25$$

5.13. Año 2012

5.13.1. Modelo

Opción A

Problema 5.13.1 *(2 puntos)* Se supone que la concentración de CO_2 en el aire de una determinada región, medida en partes por millón (ppm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 20 ppm.

a) Calcúlese el número mínimo de observaciones necesarias para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 2 ppm con un nivel de confianza mayor o igual que el 95 %.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la concentración media de CO_2 en el aire de la región si la muestra elegida contiene 121 observaciones y la concentración media muestral es igual a 350 ppm. CO_2

Solución:

a) Tenemos $E = 2$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 384,16$$

Luego $n = 385$.

b) Tenemos $\overline{x} = 350$, $\sigma = 20$, $n = 121$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (346{,}436, 353{,}564)$$

Opción B

Problema 5.13.2 *(2 puntos)* Se supone que la tensión de un tipo de línea eléctrica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 100V$ y desviación típica $\sigma = 10V$. ¿Cuál es la distribución de la tensión media de cuatro líneas eléctricas de ese tipo, tomadas al azar y con independencia?

Solución:

$$\overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(100, \frac{10}{\sqrt{4}}\right) = N(100, 5)$$

5.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.13.3 *(2 puntos)* Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

$$26 \quad 27,5 \quad 31 \quad 28 \quad 25,5 \quad 30,5 \quad 32 \quad 31,5.$$

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) Tenemos $n = 8$, $\overline{X} = 29$, $\sigma = 2,8$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (27{,}372; 30{,}628)$$

b) Tenemos $E = 0{,}9$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 45{,}577$$

Luego $n = 46$.

Opción B

Problema 5.13.4 *(2 puntos)* Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6 ; 271,2) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) $N(\mu, 45)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = (251{,}6; 271{,}2) = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 251{,}6 \\ \overline{X} + E = 271{,}2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 261{,}4 \\ E = 9{,}8 \end{array} \right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 81$$

b) $n = 64$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}253$$

5.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.13.5 *(2 puntos)* El consumo anual de carne en un cierto país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica 16 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 residentes y se obtiene un consumo medio de 42 kg de carne al año. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el consumo anual medio de carne en dicho país.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener la muestra para garantizar, con el mismo nivel de confianza, que el error de la estimación del consumo anual medio sea menor que 1 kg?

Solución:

a) Tenemos $n = 64$, $\overline{X} = 42$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (38{,}71; 45{,}29)$$

b) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 692{,}34$$

Luego $n = 693$.

Opción B

Problema 5.13.6 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media en una muestra aleatoria simple de tamaño 100 elementos.

a) Determínese el valor de σ sabiendo que $I = (125,2; 144,8)$ es un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcúlese la probabilidad $P(1 < \mu - \overline{X} < 4)$.

Solución:

a) $N(\mu, \sigma)$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, $E = \dfrac{144{,}8 - 125{,}2}{2} = 9{,}8$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 9{,}8 = 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Longrightarrow \sigma = 50$$

b) $P(1 < \mu - \overline{X} < 4) = P(0,5 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0{,}5) = 0,286$

5.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.13.7 *(2 puntos)* La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a) Tenemos $n = 100$, $\overline{X} = 48000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (47506{,}5; 48493{,}5)$$

b) Tenemos $E = 1000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}577$$

Luego $n = 35$.

Opción B

Problema 5.13.8 *(2 puntos)* El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 121.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.

b) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:

a)

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 5) = P(|Z| \geq \frac{5}{3/11}) = 2(1 - P(Z \leq 1{,}83)) = 0{,}0672$$

b) $N(\mu, 3)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}5345454545 \quad IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6{,}465; 7{,}535)$$

5.14. Año 2013

5.14.1. Modelo

Opción A

Problema 5.14.1 *(2 puntos)* El peso en gramos del contenido de las cajas de cereales de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 5 gramos. Se toma una muestra de tamaño 144.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor de 1 gramo.

b) Si la media muestral obtenida es igual a 499,5 gramos, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de ese tipo de cajas de cereales.

Solución:

a) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 5$ y $n = 144$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}4$$

$$P(Z < 2{,}4) = 0{,}9918$$

b) Tenemos $\overline{x} = 499{,}5$, $\sigma = 5$, $n = 144$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (498{,}8146, 500{,}1854)$$

Opción B

Problema 5.14.2 *(2 puntos)* La altura de los árboles de una determinada comarca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y varianza 25 cm. Se toma una muestra aleatoria simple y, para un nivel de confianza del 95 %, se construye un intervalo de confianza para la media poblacional cuya amplitud es de 2,45 cm.

a) Determínese el tamaño de la muestra seleccionada.

b) Determínese el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la altura media para la muestra seleccionada fue de 170 cm.

Solución:

$$N(\mu, 5); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq \left(\frac{1{,}96 \cdot 5}{1{,}225}\right)^2 = 64 \Longrightarrow n = 64$$

b) Tenemos $\overline{x} = 170$, $E = 1{,}225$ y $n = 144$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (168{,}775; 171{,}225)$$

5.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.14.3 *(2 puntos)* El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y una desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 24.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior de 3,37 Mb?.

b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

Solución:

$$N(3{,}5; 1{,}4),\;\; n = 24 \longrightarrow N\left(3{,}5; \frac{1{,}4}{\sqrt{24}}\right) = N(3{,}5; 0{,}28)$$

a)

$$P(\overline{X} < 3{,}37) = P\left(Z < \frac{3{,}37 - 3{,}5}{0{,}28}\right) = P(Z < -0{,}46) = 1 - P(Z < 0{,}46) = 0{,}3228$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,56$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2{,}86; 3{,}98)$$

Opción B

Problema 5.14.4 *(2 puntos)* La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 h?

b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.

Solución:

$$N(\mu, 1940);\;\; z_{\alpha/2} = 1{,}96;\;\; E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1445{,}82 \Longrightarrow n = 1446$$

b) $n = 225$, $\overline{X} = 12415$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 212{,}75 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (12202{,}25; 12627{,}75)$$

5.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.14.5 *(2 puntos)* La altura en centímetros de los individuos de una población se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 20 cm.

a) En una muestra aleatoria simple de 500 individuos se ha obtenido una altura media de 174 cm. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ; al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 5 cm?

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $n = 500$, $\overline{X} = 174$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{100}} = 1,753$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (172,247; 175,753)$$

b) $E = 2,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$2,5 = 1,645\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 20}{2,5}\right)^2 = 173,1856 \Longrightarrow n = 174$$

Opción B

Problema 5.14.6 *(2 puntos)* Una envasadora empaqueta naranjas en bolsas. Para realizar un control de calidad, se tomó una muestra del peso real de 8 bolsas y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$2,4 \quad 1,8 \quad 2 \quad 2,4 \quad 2,2 \quad 2 \quad 1,6 \quad 2,2$$

El peso de las bolsas que salen de esa planta de envasado se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 0,5 kg.

a) Obténgase un intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional μ

b) Hállese el error máximo que se cometería en la estimación de μ usando el intervalo de confianza anterior.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 2,075$, $\sigma = 0,5$, $n = 8$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1,729; 2,421)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{8}} = 0,346$$

b) $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,346$

5.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.14.7 *(2 puntos)* El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90 % .

Solución:

$$N(\mu; 0,4)$$

a) $n = 49$, $\overline{X} = 1,75 \longrightarrow N\left(1,75; \frac{0,4}{7}\right) = N(1,75; 0{,}057)$

$$NC = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,0392 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1,7108; 1,7892)$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,02 = 1{,}645\frac{0,4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n > 1082,41$$

$$n = 1083$$

Opción B

Problema 5.14.8 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.

b) Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ, si la media muestral es igual a 1532.

Solución:

$$N(\mu, 210); \quad n = 64$$

a)

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 22) = P\left(\frac{|\overline{X} - \mu|}{210/8} \geq \frac{22}{210/8}\right) =$$

$$2P(Z \geq 0,84) = 2(1 - P(Z \leq 0,84)) = 2(1 - 0,7995) = 0,401$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 67,59 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1464,41; 1599,59)$$

5.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.14.9 *(2 puntos)* La longitud alcanzada por un lanzador de disco se puede aproximar por una variable aleatoria normal con media μ desconocida y desviación típica igual a 2 metros. El lanzador hace 10 lanzamientos en una prueba atlética. Considérense esos 10 lanzamientos como una muestra aleatoria simple.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la distancia media obtenida por el lanzador en los 10 intentos y μ sea menor que 0, 75 metros.

b) Si la media de las distancias alcanzadas en los lanzamientos durante la prueba ha sido de 65 metros, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la distancia media μ de los lanzamientos de este atleta.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} \approx N\left(\mu; \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu; 0,63)$

$$P(|\overline{X} - \mu| \le 0,75) = P\left(-\frac{0,75}{2/\sqrt{10}} \le Z \le \frac{0,75}{2/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(-1,19 \le Z \le 1,19) = P(Z \le 1,19) - P(Z \le -1,19) =$$

$$2P(Z \le 1,19) - 1 = 2 \cdot 0,89 - 1 = 0,78$$

b) $\overline{X} = 65$, $E = z_{\alpha/2} = 1,96$ y $n = 10$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{2}{\sqrt{10}} = 1,24$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (63,76; 66,24)$$

Opción B

Problema 5.14.10 *(2 puntos)* El peso de las lubinas de un año producidas en una piscifactoría se puede aproximar por una distribución normal con media 600 gramos y desviación típica 100 gramos. Las lubinas de un año están en un recinto aislado.

a) Considérese una muestra aleatoria simple de 20 lubinas de un año en la piscifactoría, calcúlese la probabilidad de que su peso medio sea superior a 650 gramos.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 lubinas de un año. Hállese el nivel de confianza con el que se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la media: (580,4; 619,6).

Solución:

$$N(600; 100)$$

a) Tenemos $n = 20$ y $\overline{X} \approx N\left(600; \frac{100}{\sqrt{20}}\right) = N(600; 22,36)$

$$P(\overline{X} \geq 650) = P\left(Z \geq \frac{650 - 600}{100/\sqrt{20}}\right) = P(Z \geq 2,24) = 1 - P(Z \leq 2,24) =$$

$$1 - 0,9875 = 0,0125$$

b) Tenemos $n = 100$ y $E = \dfrac{619,6 - 580,4}{2} = 19,6$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 19,6 = z_{\alpha/2}\frac{100}{\sqrt{100}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %

5.15. Año 2014

5.15.1. Modelo

Opción A

Problema 5.15.1 *(2 puntos)* El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 22$, $\sigma = 4$, $n = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (20,528; 23,471)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{4}{\sqrt{20}} = 1,4713$$

b) $E = 0,5$, $\sigma = 4$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$0,5 = 1,645\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 173,18$$

Luego $n = 174$.

Opción B

Problema 5.15.2 *(2 puntos)* El nº de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transportes se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ.

a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

$$40 \quad 28 \quad 41 \quad 102 \quad 95 \quad 33 \quad 108 \quad 20 \quad 64$$

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 % , construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

Solución:

$$N(\mu,5);\quad z_{\alpha/2}=1{,}96;\ \ E=\frac{2{,}45}{2}=1{,}225$$

a) $n=9$, $\overline{x}=59$, $\sigma=30$ y $z_{\alpha/2}=1{,}96$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96\frac{30}{\sqrt{9}}=19{,}6$$

$$IC=(\overline{x}-E,\overline{x}+E)=(39{,}4,78{,}6)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2}=1{,}645$:

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}645\frac{50}{\sqrt{4}}=41{,}125$$

5.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.15.3 *(2 puntos)* La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X}=36$, $\sigma=3$, $n=48$ y $z_{\alpha/2}=1,96$:

$$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(35,151;36,849)$$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96\frac{3}{\sqrt{48}}=0,849$$

b) $E = 1$, $\sigma = 3$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$1 = 1,645\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 24,35$$

Luego $n = 25$.

Opción B

Problema 5.15.4 *(2 puntos)* El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16,33; 19,27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) $(16,33; 19,27) \Longrightarrow \overline{x} = 17,80$, $E = 1,47$ como $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,47 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 16$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $n = 64$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{3}{\sqrt{64}} = 0,735$$

5.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.15.5 *(2 puntos)* La cantidad de azúcar, en gramos, del contenido de las botellas de un litro de una conocida bebida refrescante se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 2 gramos.

a) Se ha realizado un análisis de control de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 100 de esas botellas y se ha obtenido una cantidad media de azúcar igual a 70 gramos. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para μ, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 2 gramos?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 70$, $\sigma = 2$, $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (69,61; 70,39)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{2}{\sqrt{100}} = 0,392$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $E = 1$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(1,645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10,82 \Longrightarrow n = 11$$

Opción B

Problema 5.15.6 *(2 puntos)* El peso, en gramos, del contenido de las cajas de una conocida marca de cereales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 20 de esas cajas de cereales para realizar un estudio y la media de los pesos de sus contenidos ha sido $\overline{x} = 500$. Calcúlese un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 500$, calcúlese la probabilidad de que la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 cajas sea inferior a 495 gramos.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 500$, $\sigma = 10$, $n = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (495,62; 504,38)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,38$$

b) $\mu = 500$, $n = 20$ y $\overline{X} \approx N\left(500; \frac{10}{\sqrt{20}}\right) = N(500; 2,236)$:

$$P(\overline{X} \leq 495) = P(Z \leq \frac{495 - 500}{2,236}) =$$

$$P(Z \leq -2,24) = 1 - P(Z \leq 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$

5.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.15.7 *(2 puntos)* La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 169$, $\sigma = 16$, $n = 625$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (167,512; 170,488)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{16}{\sqrt{625}} = 1,488$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$4 = 1,645\frac{16}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 43,2964 \Longrightarrow n = 44$$

Opción B

Problema 5.15.8 *(2 puntos)* El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7,840.
Exprésense los tamaños muéstrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muéstrales respectivos.
Nota: Utilícese $z_{0,05} = 1,645$.
Solución:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3,290 = 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \Longrightarrow n_1 = 0,25\sigma^2$$

$$7,840 = 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \Longrightarrow n_2 = 0,0625\sigma^2$$

$$n_1 = n_2 + 7500 \Longrightarrow 0,25\sigma^2 = 0,0625\sigma^2 + 7500 \Longrightarrow \sigma = 200$$

Luego $n_1 = 0,25 \cdot 40000 = 10000$ y $n_2 = 0,0625 \cdot 40000 = 2500$.

5.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.15.9 *(2 puntos)* La capacidad vital forzada es una medida para calcular el volumen de los pulmones de las personas adultas que se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica 1 litro.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 144 personas adultas que dieron una media de capacidad vital forzada de 4 litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral obtenido a partir de una muestra de tamaño 81, con un nivel de confianza del 99 % ?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 4$, $\sigma = 1$, $n = 144$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (3,84; 4,16)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1}{\sqrt{144}} = 0,16$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1}{\sqrt{81}} = 0,286$$

Opción B

Problema 5.15.10 *(2 puntos)* El peso en kilogramos de la cabeza humana en adultos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 0, 75 kilogramos.

a) Una muestra aleatoria simple de 16 individuos a los que se les ha realizado una densitometría, prueba diagnóstica que permite medir el peso de la cabeza, proporcionó una media muestral de 5,137 kilogramos. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuántas densitometrías como mínimo deben realizarse para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 100 gramos, con el mismo nivel de confianza del 98 %?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 5,137$, $\sigma = 0,75$, $n = 16$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (4,701; 5,573)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,75}{\sqrt{16}} = 0,436$$

b) $E = 0,1$ kg

$$0,1 = 2,325\frac{0,75}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 0,75}{0,1}\right)^2 = 304,066 \Longrightarrow n = 305$$

5.16. Año 2015

5.16.1. Modelo

Opción A

Problema 5.16.1 *(2 puntos)* El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6,6 kW, si $\mu = 6,3kW$.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6,1; 6,9)$ para la media del consumo familiar diario.

Solución:

a) $\overline{X} \approx N\left(6,3; \frac{1,2}{\sqrt{50}}\right) = N(6,3; 0,17)$:

$P(6 < \overline{X} < 6,6) = P\left(\frac{6 - 6,3}{0,17} < Z < \frac{6,6 - 6,3}{0,17}\right) = P(-1,77 < Z < 1,77) = 0,9232.$

b) $2z_{\alpha/2}\frac{1,2}{\sqrt{50}} = 6,9 - 6,1 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,36$ Luego el nivel de confianza es del 98 %.

Opción B

Problema 5.16.2 *(2 puntos)* Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 34{,}5)$$

a) $n = 10$, $\overline{x} = 310{,}5$, $\sigma = 34,5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}383$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (289{,}2, 331{,}88)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{n}} = 10 \Longrightarrow n \geq 45{,}725 \Longrightarrow n = 46$$

5.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.16.3 *(2 puntos)* El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250$ ms.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$ e $IC = (701; 799) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{X} - E = 701 \\ \overline{X} + E = 799 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{X} = 750 \\ E = 49 \end{array}\right.$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 49 = 1,96\frac{250}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 100$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,285$;

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285\frac{250}{\sqrt{25}} = 64,25$$

Opción B

Problema 5.16.4 *(2 puntos)* La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100h$?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 8000$, $\sigma = 1000$, $n = 81$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7713,89; 8286,11)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1000}{\sqrt{81}} = 286,11$$

b) $\overline{X} \approx N\left(8100, \frac{1000}{\sqrt{100}}\right) = N(8100; 100)$

$$P(7904 \le \overline{X} \le 8296) = P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \le Z \le \frac{8296 - 8100}{100}\right) =$$

$$P(-1,96 \le Z \le 1,96)) = P(Z \le 1,96) - P(Z \le -1,96) =$$

$$P(Z \le 1,96) - (1 - P(Z \le 1,96)) = 2P(Z \le 1,96) - 1 = 0,95$$

5.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.16.5 *(2 puntos)* El consumo de agua, medido en litros, en una ducha puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 duchas, obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 100$ litros. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar μ mediante la media muestral, el error cometido sea menor que 2 litros, con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 100$, $\sigma = 2$, $n = 25$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (96,08; 103,92)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{25}} = 3,92$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 2$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 2,575\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(2,575 \cdot \frac{10}{2}\right)^2 = 165,77 \Longrightarrow n = 166$$

Opción B

Problema 5.16.6 *(2 puntos)* El nivel de colesterol total en sangre en adultos de 50 años, medido en miligramos por decilitro (mg/dl), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 20mg/dl$.

a) A partir de una muestra aleatoria simple se obtiene el intervalo de confianza $(191,2; 210,8)$, expresado en mg/dl, para estimar μ con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra considerada.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcúlese la amplitud del intervalo de confianza al 98 % para μ.

Solución:

a) $\overline{X} = \dfrac{191,2 + 210,8}{2} = 201$, $E = \dfrac{210,8 - 191,2}{2} = 9,8$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 9{,}8 = 1,96\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 20}{9,8}\right)^2 = 16$$

b) $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:
$E = 2,325\dfrac{20}{100} = 4,65 \Longrightarrow$ la amplitud será de 9,3.

5.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.16.7 *(2 puntos)* La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16.000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la media μ.

b) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2, 35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$,n=100 y $\overline{X} = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{10} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (160 - 1,96; 160 + 1,96) = (158,04; 161,96)$$

b) $n = 64$ y $E = 2,35$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,35 = z_{\alpha/2}\frac{10}{8} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$P(Z \leq 1,88) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9699 \Longrightarrow \alpha = 0,0602$$

El nivel de confianza será $1 - \alpha = 1 - 0,0602 = 0,9398$ del 93,98 %.

Opción B

Problema 5.16.8 *(2 puntos)* En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.

b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, $\overline{X}$, sea superior a 230 euros?

Solución:

a) Tenemos $E = 15$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq \left(\frac{1,96\cdot 75}{15}\right)^2 = 96,04 \Longrightarrow n = 97$$

b) Tenemos $\mu = 250$ y $n = 81 \Longrightarrow N\left(\overline{X}; \dfrac{75}{9}\right)$:

$$P(\overline{X} \geq 230) = P\left(Z \geq \frac{230-250}{75/9}\right) =$$

$$P(Z \geq -2,4)) = 1 - P(Z \leq -2,4) = P(Z \leq 2,4) = 0,9918$$

5.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.16.9 *(2 puntos)* La producción por hectárea, medida en kg/ha (kilogramos por hectárea) del olivar de alta densidad en cultivo intensivo de Córdoba se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 kg/ha.

a) A partir de una muestra aleatoria simple de 400 parcelas de una hectárea se ha obtenido $(9917,75; 10082,25)$ como intervalo de confianza para la media μ, expresado en kg/ha. Determínese la media de la muestra y el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

b) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 98 % tenga de amplitud a lo sumo 50 kg/ha.

Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} \overline{X} - E = 9917,75 \\ \overline{X} + E = 10082,25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{X} = 10000 \\ E = 82,25 \end{array}\right.$

$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 82,25 = z_{\alpha/2}\frac{1000}{\sqrt{400}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

$$p(Z \leq 1,645) = 0,9495 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1$$

Luego el nivel de confianza es del 90 %.

b) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $2E = 50 \Longrightarrow E = 25$:
$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 25 = 2,325\frac{1000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,325\cdot 1000}{25}\right)^2 = 8649$
Luego $n = 8649$.

Opción B

Problema 5.16.10 *(2 puntos)* El peso, en gramos, del contenido de las bolsas de patatas fritas de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 10 gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 50 de esas bolsas de patatas y la media de pesos de sus contenidos ha sido de $\overline{X} = 100$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 100$ gramos, calcúlese la probabilidad de que el total de los pesos de los contenidos de una muestra aleatoria simple de 25 bolsas sea menor o igual que 2625 gramos.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,645$,n=100 y $\overline{X} = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{10}{\sqrt{50}} = 2,326$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (100 - 2,326; 100 + 2,326) = (97,674; 102,326)$$

b) $\mu = 100$,$n = 25$ y $\overline{X} = 2625/25 = 105$:
$P(\overline{X} \leq 105) = P\left(Z \leq \frac{105-100}{10/\sqrt{25}}\right) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$

5.17. Año 2016

5.17.1. Modelo

Opción A

Problema 5.17.1 *(2 puntos)* El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 90 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,64$, $\overline{X} \approx N\left(90; \frac{20}{\sqrt{250}}\right) = N(90; 1,265)$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{20}{\sqrt{250}} = 2,07$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (87,93; 92,07)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,64$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,64\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1075,85 \Longrightarrow n = 1076$$

Opción B

Problema 5.17.2 *(2 puntos)* El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (2265,375; 2424,625) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 650$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{X} - E = 2265,375 \\ \overline{X} + E = 2424,625 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \overline{X} = 2345 \\ E = 79,625 = 1,96\frac{650}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 256 \end{array}\right.$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 2,57$:

$$E = 2,57\frac{650}{\sqrt{225}} = 111,367$$

5.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.17.3 *(2 puntos)* La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas,$\overline{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{50}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n > 384,16$$

$$n = 385$$

b) $n = 25$, $\mu = 950$: $\overline{X} \approx N\left(950; \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950; 10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -1) =$$

$$1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Opción B

Problema 5.17.4 *(2 puntos)* El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{X} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 5$, $n = 25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\overline{X} = 70$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{25}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (68,04; 71,96)$$

b) $\mu = 70$, $n = 12 \Longrightarrow 855/12 = 71,25$ la probabilidad pedida sería

$$P\left(\overline{X} \geq 71,25\right) = P\left(Z \geq \frac{71,25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P\left(Z \geq 0,87\right) = 1 - P\left(Z \leq 0,87\right) =$$

$$1 - 0,8078 = 0,1922$$

5.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.17.5 *(2 puntos)* El peso en kilogramos (kg) de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0,60$ kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{X} = 3,250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $n = 100$ y $\overline{X} = 3,25$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 1,325$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (3,1105; 3,3895)$$

b) $E = 0,2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$0,2 = 1,96\frac{0,6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$

Opción B

Problema 5.17.6 *(2 puntos)* La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza (159; 165). Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

b) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 16$, $n = 81$ y $IC = (159; 165)$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{X} - E = 159 \\ \overline{X} + E = 165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{X} = 162 \\ E = 3 \end{array}\right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = z_{\alpha/2}\frac{16}{\sqrt{81}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,6875$$

$$P(Z \leq 1,69) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9545 \Longrightarrow$$

$$\alpha = 0,091 \Longrightarrow NC = 1 - 0,091 = 0,909 = 90,9\,\%$$

b) $\mu = 160$, $n = 64$, $\overline{X} \approx N\left(160, \frac{16}{\sqrt{64}}\right) = N(160, 2)$

$$P(\overline{X} \geq 156) = P\left(Z \geq \frac{156 - 160}{2}\right) =$$

$$P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - (1 - P(Z \leq 2)) = P(Z \leq 2) = 0,9772$$

5.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.17.7 *(2 puntos)* El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{X} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Solución:

a) $n = 64$, $\overline{X} = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (28,775; 31,225)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{64}} = 1,225$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{5}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq 6,63$$

$$n = 7$$

Opción B

Problema 5.17.8 *(2 puntos)* El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{X} = 8'1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (7'766; 10'233) para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 9)$$

a) $\sigma = 9$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\overline{X} = 8,1$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{9}{\sqrt{100}} = 1,4805$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6,6195; 9,5805)$$

b) $n = 144$ e $IC = (7,766; 10,233) \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 7,766 \\ \overline{X} + E = 10,233 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 8,9995 \\ E = 1,2335 \end{array} \right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,2335 \cdot \sqrt{144}}{9} = 1,645$$

Por el apartado anterior corresponde a un nivel de confianza del 90 %

5.18. Año 2017

5.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 5.18.1 *(2 puntos)* El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $x = 7,8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $\sigma = 0,9$, $n = 324$, $z_{\alpha/2} = 2,65$ y $\overline{X} = 7,8$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{0{,}9}{\sqrt{324}} = 0,1325$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7,6675; 7,9325)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 0,1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,9}{\sqrt{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 311,1696$$
$$n = 312$$

Opción B

Problema 5.18.2 *(2 puntos)* El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

a) Si la media de la muestra es $\overline{x} = 25,9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $\sigma = 3$, $n = 484$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\overline{X} = 25,9$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{3}{\sqrt{484}} = 0,2243$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (25,676; 26,9124)$$

b) $\mu = 23$, $n = 484 \Longrightarrow \overline{X} = 11000/484 = 22,73$ la probabilidad pedida sería

$$P\left(\overline{X} \leq 22,73\right) = P\left(Z \geq \frac{22,73 - 23}{3/\sqrt{484}}\right) = P\left(Z \leq -2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) =$$

$$1 - 0,9772 = 0,0228$$

5.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.18.3 *(2 puntos)* La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197,5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

Solución:

$$N(\mu; 9)$$

a) $E = 1$ (la mitad de la amplitud del intervalo de confianza) y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{9}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq (1,96 \cdot 9)^2 = 311,1696 \Longrightarrow n = 312.$$

b) $n = 16$ y $\mu = 202 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(202; 2,25)$

$$P(\overline{X} \leq 197,5) = P\left(Z \leq \frac{197,5 - 202}{2,25}\right) =$$

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Opción B

Problema 5.18.4 *(2 puntos)* El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,575$, $n = 10$ y $\overline{X} = 505$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{25}{\sqrt{10}} = 20,357$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (484,643; 525,357)$$

b) $\mu = 500$ y $\overline{X} = \dfrac{5030}{10} = 503$:

$$P(\overline{X} \geq 503) = P\left(Z \geq \frac{503 - 500}{25/\sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 0,38) = 1 - P(Z \leq 0,38) =$$

$$1 - 0,6480 = 0,3520$$

5.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.18.5 *(2 puntos)* El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo,$\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24,24; 47,76)$ para μ.

Solución:
$N(\mu, 24)$ y $n = 16$

a) $P(\overline{X} \geq 48) = P\left(Z \geq \dfrac{48 - 36}{24/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $E = \dfrac{47,76 - 24,24}{2} = 11,76$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 11,76 = z_{\alpha/2}\frac{24}{\sqrt{16}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %:

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 95\,\%$$

Opción B

Problema 5.18.6 *(2 puntos)* La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,6$ cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

Solución:

$$N(\mu; 0,6)$$

a) $\sigma = 0,6$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 2,325$ y $\overline{X} = 7$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 0,1395$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6,8605; 7,1395)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,325$ y $E = 0,1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 194,6025$$

$$n = 195$$

5.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.18.7 *(2 puntos)* El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. Estos precios son los siguientes:

140; 125; 140; 175; 135; 165; 175; 110; 150; 130.

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$N(\mu, 15)$

a) y $n = 10$, $\overline{X} = 144,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{10}} = 9,297$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (135,203; 153,797)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 8$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{n}} = 8 \Longrightarrow n \geq 13,51$$
$$n = 14$$

Opción B

Problema 5.18.8 *(2 puntos)* El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros (l/100km), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1,2$ l/100km. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4,528; 5,2)$ para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 4,8$ l/100km. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, esté comprendida entre $4,5$ y $5,1$ l/100km.

Solución:

$$N(\mu; 1,2)$$

a) $\sigma = 1,2$, $n = 49$, $IC = (4,528; 5,2) \Longrightarrow E = \dfrac{5,2 - 4,528}{2} = 0,336$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,336\sqrt{49}}{1,2} = 1,96$$

$$P\left(Z \leq 1,96\right) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 95\,\%$$

b) $\mu = 4,8$:

$$P(4,5 \leq \overline{X} \leq 5,1) = P\left(\frac{4,5 - 4,8}{1,2/\sqrt{49}} \leq Z \leq \frac{5,1 - 4,8}{1,2/\sqrt{49}}\right) =$$
$$P(-1,75 \leq Z \leq 1,75) = 2P(z \leq 1,75) - 1 = 2 \cdot 0,9599 - 1 = 0,9198$$

5.19. Año 2018

5.19.1. Modelo

Opción A

Problema 5.19.1 *(2 puntos)* Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p, que actualmente se decantaría por él.

a) Asumiendo que $p = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del 90 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 %(±2 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de votantes de ese partido en la población.

Solución:

a) $p = 0,5,\ z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}} = 0,02 \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,645\cdot 0,5}{0,02}\right)^2 = 1691,27 \Longrightarrow n = 1692$$

b)

$$p_r = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \Longrightarrow q_r = 1 - p_r = \frac{4}{5}\ \text{ y }\ z_{\alpha/2} = 1,96 :$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r\cdot q_r}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1200}} = 0,023$$

$$IC = (p_r - E, p_r + E) = (0,1774; 0,2226)$$

Entre el 17,74 % y el 22,26 %

Opción B

Problema 5.19.2 *(2 puntos)* El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 98 %.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $\sigma = 3$, $n = 9$, $\overline{X} = 40$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{3}{\sqrt{9}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (40 - 1,96, 40 + 1,96) = (38,04; 41,96)$$

b) $E = 1$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \Longrightarrow n \geq (3\cdot 2,325)^2 = 48,65 \Longrightarrow n = 49$$

5.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.19.3 *(2 puntos)* La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0,5$ gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0,25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12,25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

Solución:

a) $E = 0,25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,25}\right)^2 = 15,37 \Longrightarrow n = 16$$

b) $n = 25$, $\mu = 12 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(12; 0,1)$

$P(\overline{X} \geq 12,25) = P\left(Z \geq \frac{12,25 - 12}{0,1}\right) = P(Z \geq 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0{,}9938 = 0,0062$

Opción B

Problema 5.19.4 *(2 puntos)* El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99,5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $\sigma = 20$, $n = 40$, $\overline{X} = 99,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{40}} = 6,198$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (99,5 - 6,198, 99,5 + 6,198) = (93,302; 105,698)$$

b) $n = 10$, $\mu = 100 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(100; 6,32)$

$P(100 \leq \overline{X} \leq 110) = P\left(\frac{100 - 100}{6,32} \leq Z \leq \frac{110 - 100}{6,32}\right) = P(0 \leq Z \leq 1,58) = P(Z \leq 1,58) - P(Z \leq 0) = 0,9429 - 0{,}5 = 0,4429$

5.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.19.5 *(2 puntos)* El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,25$ h.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{X} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 2$ h. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1,85 y 2,15 horas.

Solución:

a) $\sigma = 0,25$, $n = 15$, $\overline{X} = 2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,25}{\sqrt{15}} = 0,127$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2 - 0,127, 2 + 0,127) = (1,873; 2,127)$$

b) $n = 20$, $\mu = 2 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(2; 0,056)$

$P(1,85 \le \overline{X} \le 2,15) = P\left(\frac{1,85 - 2}{0,056} \le Z \le \frac{2,15 - 2}{0,056}\right) = P(-2,68 \le Z \le 2,68) = P(Z \le 2,68) - (1 - P(Z \le 2,68)) = 2P(Z \le 2,68) - 1 = 0,9926$

Opción B

Problema 5.19.6 *(2 puntos)* El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0,2$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,05 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1,5$ kg.

Solución:

$$N(\mu; 0,2)$$

a) $E = 0,05$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\frac{0,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 0,2}{0,05}\right)^2 = 61,47 \Longrightarrow n = 62$$

b) $n = 20$, $\mu = 1,5 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(1,5; 0,045)$ y $\overline{X} = \dfrac{32}{20} = 1,6$

$P(\overline{X} \geq 1,6) = P\left(Z \geq \dfrac{1,6 - 1,5}{0,045}\right) = P(Z \geq 2,22) = 1 - P(Z \leq 2,22) = 1 - 0,9868 = 0,0132$

5.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.19.7 *(2 puntos)* La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23 550 km. .

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

Solución:

a) Amplitud$= 23550 \Longrightarrow E = 11775$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 11775 = 1,96\frac{24000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 24000}{11775}\right)^2 = 15,959 \Longrightarrow n = 16$$

b) $n = 25$, $\mu = 150000 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(150000; 4800)$

$P(144240 \leq \overline{X} \leq 153840) = P\left(\dfrac{144240 - 150000}{4800} \leq Z \leq \dfrac{153840 - 150000}{4800}\right) = P(-1,2 \leq Z \leq 0,8) = P(Z \leq 0,8) - P(Z \leq -1,2) = 0,7881 - (1 - 0,8849) = 0,673$

Opción B

Problema 5.19.8 *(2 puntos)* Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % (± 3 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

Solución:

a) $E = 0,03$, $p = 0,5$, $q = 0,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 (0,5 \cdot 0,5) = 1067,11$$

Luego $n = 1068$.

b) $n = 450$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $p = \dfrac{90}{450} = 0,2 \Longrightarrow q = 0,8$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{450}} = 0,031$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,2 - 0,031; 0,2 + 0,031) = (0,169; 0,231) = (16,9\,\%; 23,1\,\%)$$

5.20. Año 2019

5.20.1. Modelo

Opción A

Problema 5.20.1 *(2 puntos)* Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % (±2 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

Solución:

a) $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,02 \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,02}\right)^2 = 2401 \Longrightarrow n = 2401$$

b)

$$p_r = \frac{85}{500} = 0,17 \Longrightarrow q_r = 1 - p_r = 0,83 \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,645:$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,17 \cdot 0,83}{500}} = 0,0283$$

$$IC = (p_r - E, p_r + E) = (0,142; 0,198)$$

Entre el 14,2 % y el 19,8 %

Opción B

Problema 5.20.2 *(2 puntos)* El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0,1$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Sabiendo que $\mu = 0,7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0,65 kg.

Solución:

$$N(\mu; 0,1)$$

a) $E = 0,025$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{n}} = 0,025 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{0,1\cdot 1,96}{0,025}\right)^2 = 61,47 \Longrightarrow$$

$$n = 62$$

b) $\mu = 0,7$, $\sigma = 0,1$ y $n = 20$.

$$P(\overline{X} \leq 0,65) = P\left(Z \leq \frac{0,65 - 0,7}{0,1/\sqrt{20}}\right) = P(Z \leq -2,24) =$$

$$1 - P(Z \leq 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$

5.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.20.3 *(2 puntos)* El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:
$N(\mu; 7)$ ya que $\sigma^2 = Var(X) = 49 \Longrightarrow \sigma = 7$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 34$ y $NC = 0,992$:
$1 - \alpha = 0,992 \Longrightarrow \alpha = 0,008 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 0,004$
$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,004 = 0,996 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 2,65$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{7}{\sqrt{64}} = 2,319 \Longrightarrow$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (34 - 2,319; 34 + 2,319) = (31,681; 36,319)$$

b) $E = 3$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1,96\frac{7}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(1,96\frac{7}{3}\right)^2 = 20,91 \Longrightarrow n = 21$$

Opción B

Problema 5.20.4 *(2 puntos)* El peso de las mochilas escolares de los niños de $5^{\underline{o}}$ y $6^{\underline{o}}$ de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1,5$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $2E = 0,49 \Longrightarrow E = 0,245$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} = 0,245 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,5 \cdot 1,96}{0,245}\right)^2 = 144 \Longrightarrow$$

$$n = 144$$

b) $\mu = 6$, $\sigma = 1,5$ y $n = 225$.

$$P(\overline{X} \geq 5,75) = P\left(Z \geq \frac{5,75 - 6}{1,5/\sqrt{225}}\right) = P(Z \geq -2,5) =$$

$$1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$$

5.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.20.5 *(2 puntos)* El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0,1587$.

Solución:

$N(\mu; 10)$

a) $E = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 10}{5}\right)^2 = 15,3664 \Longrightarrow$$

$$n = 16$$

b) $\mu = 40 \Longrightarrow \overline{X} \approx \left(40, \dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{10/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{-2\sqrt{n}}{10}\right) =$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,1587 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,8413 \Longrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}}{5} = 1 \Longrightarrow n = 25$$

Opción B

Problema 5.20.6 *(2 puntos)* En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ euros, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 euros sea 0, 20.

b) Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 euros y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 euros.

Solución:

$$N(\mu; \sigma)$$

a) $\mu = 3000$ y $n = 49$. $\overline{X} \approx N\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\right) = N\left(3000, \dfrac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} \geq 3125) = P\left(Z \geq \frac{3125-3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z \geq \frac{875}{\sigma}\right) =$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{875}{\sigma}\right) = 0,20 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{875}{\sigma}\right) = 0,8 \Longrightarrow$$

$$\frac{875}{\sigma} = 0,845 \Longrightarrow \sigma = 1035,5$$

b) $\sigma = 1000$, $n = 100$, $\overline{X} = 3300$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1000}{10} = 196$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (3300 - 196, 3300 + 196) = (3104, 3496)$$

5.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.20.7 *(2 puntos)* Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

$$N(\mu; 25)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 560$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{25}{\sqrt{15}} = 12,652$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (547,348; 572,652)$$

b) $\mu = 560 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right) = N(560; 3,54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{3,54}\right) = P(Z \geq 1,41) =$$

$$1 - P(Z \leq 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793$$

Opción B

Problema 5.20.8 *(2 puntos)* Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0,22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

a) $p = 0,22$, $q = 0,78$ y $z_{\alpha/2} = 2,576$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,576}{0,04}\right)^2 (0,22 \cdot 0,78) = 711,69$$

Luego $n = 712$.

b) $n = 1000$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ $p = \dfrac{250}{1000} = 0,25 \Longrightarrow q = 0,75$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{1000}} = 0,0268$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,25 - 0,0268; 0,25 + 0,0268) =$$
$$(0,2232; 0,2768) = (22,32\,\%; 27,68\,\%)$$

5.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.20.9 *(2 puntos)* En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es $1/4$.

a) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

b) Sin tomar en cuenta las especificaciones, si en 100 juegos la máquina devolvió algo al jugador sólo en 15 ocasiones, calcúlese un intervalo de confianza del 99 % para la proporción P.

Solución:

a) $p = \dfrac{1}{4}$, $q = \dfrac{3}{4}$ y $n = 100$. Como $n > 10$, $np = 100 \cdot 0,25 = 25 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0,75 = 75 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n; p) \Longrightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$
$$X \approx B(100; 0,25) \Longrightarrow X \approx N(25; 4,33)$$
$$P(X \geq 20) = P\left(Z > \frac{19,5 - 25}{4,33}\right) = P(Z > -1,27) = 1 - P(Z < -1,27)$$
$$= 1 - (1 - P(Z < 1,27)) = P(Z < 1,27) = 0,8980$$

b) $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 2,575$, $\hat{p} = \dfrac{15}{100} = 0,15 \Longrightarrow \hat{q} = 0,85$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,575\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{100}} = 0,092$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,15 - 0,092; 0,15 + 0,092) =$$
$$(0,058; 0,242) = (5,8\,\%; 24,2\,\%)$$

Opción B

Problema 5.20.10 *(2 puntos)* La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com, se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

b) Determínese el número mínimo de comensales que debería tener una muestra aleatoria simple para que el coste medio por comensal no exceda los 30 euros con probabilidad no inferior a 0,95.

Solución:

$$N(25; 5)$$

a) $n = 9 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(25, \dfrac{5}{3}\right)$

$$P(\overline{X} \le 30) = P\left(Z < \frac{30 - 25}{5/3}\right) = P(Z < 3) = 0,9987$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 5$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 5}{5}\right)^2 = 3,84$$

Luego $n = 4$:

5.21. Año 2020

5.21.1. Modelo

Opción A

Problema 5.21.1 *(2 puntos)* La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0,09 mg^2.

a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.

b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

Solución:

$$\sigma^2 = Var(X) = 0,09 \Longrightarrow \sigma = 0,3 \Longrightarrow N(\mu; 0,3)$$

a) $n = 400$, $\overline{X} = 13$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{0,3}{\sqrt{400}} = 0,038625$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (13 - 0,038625; 13 + 0,038625)$$

$$IC = (12,961375; 13,038625)$$

b) $E = 0,05$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,05 = 2,325\frac{0,3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 0,3}{0,05}\right)^2 = 194,6025 \Longrightarrow n = 195$$

Opción B

Problema 5.21.2 *(2 puntos)* En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450$g.

a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestal de $\overline{X} = 2700$g, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

b) Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000$g, calcule la probabilidad de que el peso medio de una muestra de cuatro sandías escogidas al azar esté entre 3000 g y 3450 g.

Solución:

$$N(\mu; 450)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} = 2700$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{450}{\sqrt{25}} = 176,4$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2700 - 176,4; 2700 + 176,4) = (2523,6; 2876,4)$$

b) $\mu = 3000$ y $n = 4$

$$P(3000 \leq X \leq 3450) = P\left(\frac{3000 - 3000}{450/\sqrt{4}} < Z < \frac{3450 - 3000}{450/\sqrt{4}}\right) =$$

$$P(0 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0,9772 - 0,5 = 0,4772$$

5.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.21.3 *(2 puntos)* La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

Solución:

$$N(\mu; 0,5)$$

a) $z_{\alpha/2} = 2$ y $E = 0,05$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2\cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 400$$

Luego $n = 400$.

b) Tenemos $N(2; 0,5)$, $n = 16$ y $\overline{X} = \frac{30}{16} = 1,875$

$$P(\overline{X} \geq 1,875) = P\left(Z \geq \frac{1,875}{0,5/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0,8413$$

Opción B

Problema 5.21.4 *(2 puntos)* Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 7)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 41$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{7}{\sqrt{10}} = 3,64136$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (37,36; 44,64)$$

b) $n = 64$ y $L = 2E = 5 \Longrightarrow E = 2,5$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = z_{\alpha/2}\frac{7}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2,5\cdot 8}{7} = 2,8571$$

$$P(Z \leq 2,86) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9979 \Longrightarrow \alpha = 0,0042 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9958$$

$$NC = 99,58\,\%$$

5.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.21.5 *(2 puntos)* El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

Solución:

$$N(\mu; 900)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 200$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{900}{\sqrt{n}} = 200 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 900}{200}\right)^2 = 77,7924$$

Luego $n = 78$.

b) $\mu = 1889$ y $n = 64$ $P(\overline{X} > 1900) = P\left(Z > \dfrac{1900 - 1889}{900/\sqrt{64}}\right) = P(Z > 0,1) = 1 - P(Z < 0,1) = 1 - 0,5398 = 0,4602$

Opción B

Problema 5.21.6 *(2 puntos)* Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 500)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 5100$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{500}{\sqrt{100}} = 82,25$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5017,75; 5182,25)$$

b) $n = 36$ y $E = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 160 = z_{\alpha/2}\frac{500}{\sqrt{36}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,92$$

$$P(Z < 1,92) = 0,9726 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0548 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0,9452$$

$$NC = 94,52\,\%$$

5.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.21.7 *(2 puntos)* El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0,9940$.

Solución:

$$N(\mu; 60)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 20$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{60}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 60}{20}\right)^2 = 34,57$$

Luego $n = 35$.

b) $P(X \leq 220) = P\left(Z \leq \dfrac{220-\mu}{60/\sqrt{100}}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{220-\mu}{6}\right) = 0,9940 \Longrightarrow \dfrac{220-\mu}{6} = 2,51 \Longrightarrow$ $\mu = 204,94 \simeq 205$.

Opción B

Problema 5.21.8 *(2 puntos)* Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26,9; 37,1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $E = \dfrac{37,1 - 26,9}{2} = 5,1$ y $\overline{X} = \dfrac{37,1 + 26,9}{2} = 32$.
$NC = 0,9892 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0108 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0054 \Longrightarrow P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} =$ $1 - 0,0054 = 0,9946 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,55$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,55\frac{10}{\sqrt{n}} = 5,1 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,55 \cdot 10}{5,1}\right)^2 = 25$$

Luego $n = 25$.

b) $\mu = 30$ y $n = 16$:
$P(25 \le \overline{X} \le 35) = P\left(\frac{25-30}{10/\sqrt{16}} \le Z \le \frac{35-30}{10/\sqrt{16}}\right) = P(-2 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - (1 - P(Z \le 2)) = 2P(Z \le 2) - 1 = 0,9544$

5.22. Año 2021

5.22.1. Modelo

Opción A

Problema 5.22.1 *(2 puntos)* El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 30$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4,383$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (30 - 4,383; 30 + 4,383) = (25,617; 34,383)$$

b) $\mu = 28$ y $n = 10$:

$$P\left(28 \le \overline{X} \le 30\right) = P\left(\frac{28-28}{10/\sqrt{10}} \le \overline{X} \le \frac{30-28}{10/\sqrt{10}}\right) =$$

$$P(0 \le Z \le 0,63) = P(Z \le 0,63) - P(Z \le 0) = 0,7357 - 0,5 = 0,2357$$

Opción B

Problema 5.22.2 *(2 puntos)* Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

Solución:

$$N(\mu; 300)$$

a) $E = 100$, $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{300}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96\cdot 300}{100}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 3000$ y $n = 50$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(\overline{X} \geq \frac{2700-3000}{300/\sqrt{50}}\right) =$$

$$P(Z \geq -7,07) = 1 - P(Z \leq -7,07) = 1 - (1 - P(Z \leq 7,07)) = 1 - (1-1) = 1$$

5.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 5.22.3 *(2 puntos)* Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

Solución:

a) $p = \frac{320}{500} = \frac{16}{25} = 0,64$, $q = 1 - p = 0,36$ y $n = 500$.

$$NC = 0,96 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,04 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,02$$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,02 = 0,98 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,055\sqrt{\frac{0,64\cdot 0,36}{500}} = 0,0441$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,64 - 0,0441; 0,64 + 0,0441) =$$

$$(0,5959; 0,6841) = (59,59\,\%; 68,41\,\%)$$

b)

$$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 1,96\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq \frac{1,96^2\cdot 0,5^2}{0,05^2} = 384,16$$

$$\Longrightarrow n = 385$$

Opción B

Problema 5.22.4 *(2 puntos)* El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117,3444; 124,6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $n = 36$:

$$P(\overline{X} \le 120) = P\left(Z \le \frac{125-120}{20/\sqrt{36}}\right) = P(Z \le 1,5) = 0,9332$$

b) $E = \frac{124,6556-117,3444}{2} = 3,6556$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,6556\cdot\sqrt{81}}{20} = 1,645$$

$$P(Z \le 1,645) = 0,95 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow NC = 0,9 = 90\,\%$$

5.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 5.22.5 *(2 puntos)* Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 4)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 254$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{4}{\sqrt{15}} = 2,02428$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (254 - 2,02428; 254 + 2,02428) = (251,97572; 256,02428)$$

b) $\mu = 250$ y $n = 25$ $P(\overline{X} \ge 248) = P\left(Z \ge \frac{248-250}{4/\sqrt{25}}\right) = P(Z \ge -2,5) = 1 - P(Z \le -2,5) = 1 - (1 - P(Z \le 2,5)) = P(Z \le 2,5) = 0,9938$

Opción B

Problema 5.22.6 *(2 puntos)* Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

Solución:

a) $NC = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 0,08$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Longrightarrow 0,08 = 2,575\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge 0,2\cdot 0,8\left(\frac{2,575}{0,08}\right)^2 = 165,765625$$

Luego $n = 166$.

b) $p = \frac{25}{200} = 0,125$, $n = 200$ y $NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,125\cdot 0,875}{200}} = 0,04584$$

$$IC = (p-E; p+E) = (0,125-0,04584; 0,125+0,04584) \Longrightarrow$$

$$(0,07916; 0,17084)$$

5.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 5.22.7 *(2 puntos)* El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 60$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{8}{\sqrt{20}} = 3,5062$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (60 - 3,5062; 60 + 3,5062) = (56,4938; 63,5062)$$

b) $\mu = 59$ y $n = 10$
$P(57 \le \overline{X} \le 61) = P\left(\frac{57-59}{8/\sqrt{10}} \le Z \le \frac{61-59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \le Z \le 0,79) = P(Z \le 0,79) - P(Z \le -0,79) = P(Z \le 0,79) - (1 - P(Z \le 0,79)) = 2P(Z \le 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

Opción B

Problema 5.22.8 *(2 puntos)* El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu, 3)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$
y $E = 1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 32$ y $n = 16$
$P(\overline{X} \le 30,5) = P\left(Z \le \frac{30,5-32}{3/\sqrt{16}}\right) = P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 - 1 = 0,0228$

5.23. Año 2022

5.23.1. Modelo

Opción A

Problema 5.23.1 *(2 puntos)* El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2,75$ horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2,9388;3,0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 0,25)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} N(2,75; 0,05)$
$P(\overline{X} \leq 2,9) = P\left(Z \leq \frac{2,9-2,75}{0,05}\right) = P(Z \leq 3) = 0,9987$

b) $\overline{X} = \frac{2,9388+3,0613}{2} = 3,00005$ y $2E = 3,0613 - 2,9388 = 0,1225 \Longrightarrow E = 0,06125$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,06125 = z_{\alpha/2}\frac{0,25}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{8 \cdot 0,06125}{0,25} = 1,96$$

$$P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

Opción B

Problema 5.23.2 *(2 puntos)* Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90 % para estimar μ.

b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu; 6)$$

a) Tenemos $\overline{X} = 44$, $n = 81$ y $NC = 90\,\%$
$NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{6}{\sqrt{81}} = 1,0967$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (44 - 1,0967; 44 + 1,0967) = (42,9033; 45,0967)$$

b) $E = \frac{3}{2} = 1,5$ y $NC = 95\,\%$
$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{6}{\sqrt{n}} = 1,5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 6}{1,5}\right)^2 = 61,4656$$

Luego $n = 62$.