Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Año 2000

4.1.1. Modelo

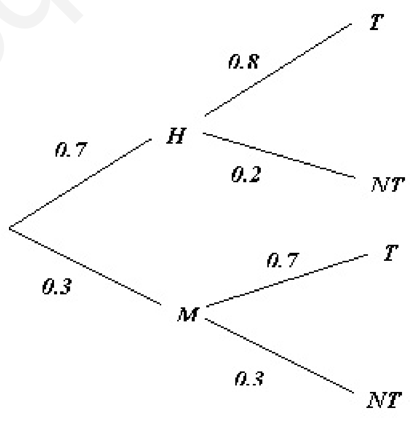
Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* Si se escoge un número al azar en la guía telefónica de cierta ciudad española, la probabilidad de que sea nombre de un hombre es 0,7 y de que figure una mujer es 0,3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0,8 y de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un número de teléfono al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una persona que trabaja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

Solución:



a) $P(T) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,77$

b)

$$P(H|T) = \frac{P(T|H) \cdot P(H)}{P(T)} = \frac{0,8 \cdot 0,7}{0,77} = 0,7272$$

Opción B

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno.

a) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas, de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

Solución:

S: Sabe el tema y NS: No se sabe el tema

a) $P(\text{ sabe alguno}) = 1 - P(\text{no sabe ninguno}) = 1 - \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{13}{15}$

b) $P(\text{ sabe uno y el otro no}) = P(S, NS) + P(NS, S) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$

4.1.2. Ordinaria

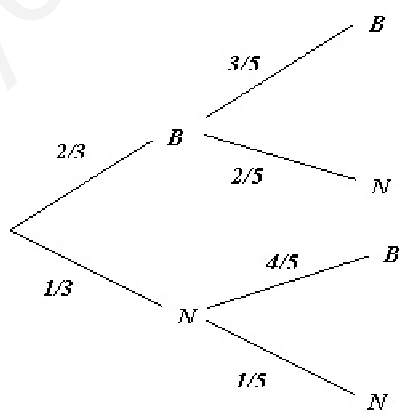
Opción A

Problema 4.1.3 *(2 puntos)* De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

b) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

Solución:



a) $P(BB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b)
$$P(1N|2N) = \frac{P(2N|1N)P(1N)}{P(2N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

Opción B

Problema 4.1.4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$.

a) Calcula $P(A \cap B)$ y razona si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$

Este resultado no es bueno, ya que siempre se tiene que cumplir que la probabilidad $P(B) \geq P(A \cap B)$. (Problema de diseño)

Para que sean independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ y con los datos que tenemos es imposible hacerlo.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ no se puede hacer con los datos que tenemos.

4.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.1.5 *(2 puntos)* La probabilidad de que un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0,6; la probabilidad de que compre un producto B es 0,5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto B no habiendo comprado el producto A es 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos?

Solución:

$$P(A) = 0,6, \quad P(B) = 0,5, \quad P(B|\overline{A}) = 0,4$$
$$P(\overline{A}) = 0,4, \quad P(\overline{B}) = 0,5$$

a) Hay que calcular $P(B \cap \overline{A})$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \Longrightarrow P(B \cap \overline{A}) = P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$$

b) Hay que calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B)$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B\cap\overline{A}) = 0,6 + 0,16 = 0,76$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - 0,76 = 0,24$$

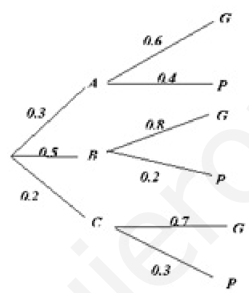
Opción B

Problema 4.1.6 *(2 puntos)* Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0,3; de que se remita al bufete B es 0,5 y de que se remita al bufete C es 0,2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0,6; para el bufete B esta probabilidad es 0,8 y para el bufete C es 0,7.

a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.

b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

Solución:



a) $P(G) = 0,3\cdot 0,6 + 0,5\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,7 = 0,72$

b)
$$P(A|G) = \frac{P(G|A)\cdot P(A)}{P(G)}\frac{0,3\cdot 0,6}{0,72} = 0,25$$

4.2. Año 2001

4.2.1. Modelo

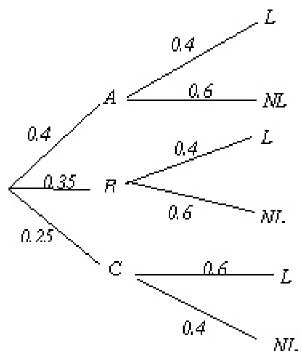
Opción A

Problema 4.2.1 *(2 puntos)* En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0,4; la probabilidad de vote al partido B es 0,35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0,25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0,4; 0,4 y 0,6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

Solución:



a) $P(L) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4 + 0,0,25 \cdot 0,6 = 0,45$

b)

$$P(B|L) = \frac{P(L|B) \cdot P(B)}{P(L)} = \frac{0,4 \cdot 0,35}{0,45} = 0,3111$$

Opción B

Problema 4.2.2 *(2 puntos)* Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos $B_1 = \{$ La primera bola es blanca $\}$, $B_2 = \{$ La segunda bola es blanca $\}$ y $B_3 = \{$ La tercera bola es blanca $\}$.

a) Exprésese con ellos el suceso $\{$ Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no $\}$.

b) Calcúlese la probabilidad del suceso $\{$ Las tres bolas son del mismo color $\}$.

Solución:

a) $B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3$.

b) $P(\text{tres bolas son del mismo color}) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{55}$

4.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.2.3 *(2 puntos)* Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diésel. Sabemos que el 60 % de los modelos son del tipo A y el 30 % del tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diésel, el 30 % de los coches de modelo A son de tipo diésel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diésel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) El coche es del modelo C.

b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diésel.

c) El coche tiene motor diésel, sabiendo que es del modelo C.

Solución:

Hacemos la siguiente tabla

	A	B	C	Total
Gasolina	$0,42$	$0,24$	$0,04$	$0,70$
Diesel	$0,18$	$0,06$	$0,06$	$0,30$
Total	$0,60$	$0,30$	$0,10$	1

a) $P(C) = 0,1$

b) $P(A|Diesel) = \dfrac{0,18}{0,3} = 0,6$

c) $P(Diesel|C) = \dfrac{0,06}{0,1} = 0,6$

Opción B

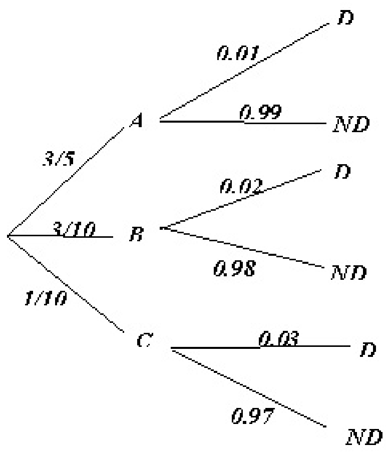
Problema 4.2.4 *(2 puntos)* Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0,01 para A, de 0,02 para B y de 0,03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?

Solución:

$$P(A) = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10},\ P(C) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$



a) $P(ND) = \frac{3}{5} \cdot 0,99 + \frac{3}{10} \cdot 0,98 + \frac{1}{10} \cdot 0,97 = 0,985$

b)

$$P(A|ND) = \frac{P(ND|A)P(A)}{P(ND)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 0,99}{0,985} = 0,603$$

4.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.2.5 *(2 puntos)* En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Los tres escojan la misma película.

b) Dos escojan la película A y el otro la C.

Solución:

a)

$$P(AAA) + P(BBB) + P(CCC) = \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{6}{20} + \frac{9}{22} \cdot \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{20} + \frac{5}{22} \cdot \frac{4}{21} \cdot \frac{3}{20} = \frac{15}{154}$$

b) $P(\text{dos}A \text{ y uno } B) = 3 \cdot \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{5}{20} = \frac{1}{11}$

Opción B

Problema 4.2.6 *(2 puntos)* Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números.

a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él?

b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

Solución:

a) $P(\text{ganar}) = P(GP) + P(PG) = \frac{2}{500} = 0{,}004$

b) $P(\text{ganar}) = P(GG) + P(GP) + P(PG) = 1 - P(PP) = 1 - \dfrac{498}{500} \cdot \dfrac{497}{499} = 0{,}00799$

4.3. Año 2002

4.3.1. Modelo

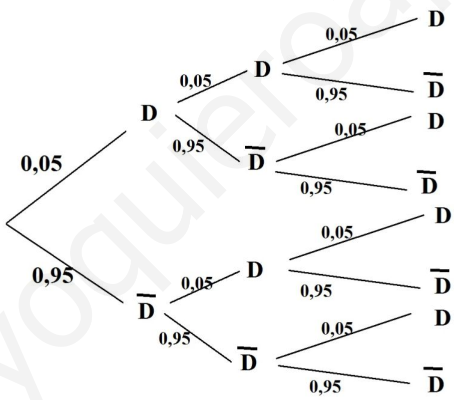
Opción A

Problema 4.3.1 *(2 puntos)* Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

Solución:



a)

$$P(2D) = P(DD\overline{D}) + P(D\overline{D}D) + P(\overline{D}DD) = 3 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95 = 0,007125$$

$$P(3D) = 0{,}05^3 = 0,000125$$

$$P(\text{al menos dos}) = P(2D) + P(3D) = 0{,}00725$$

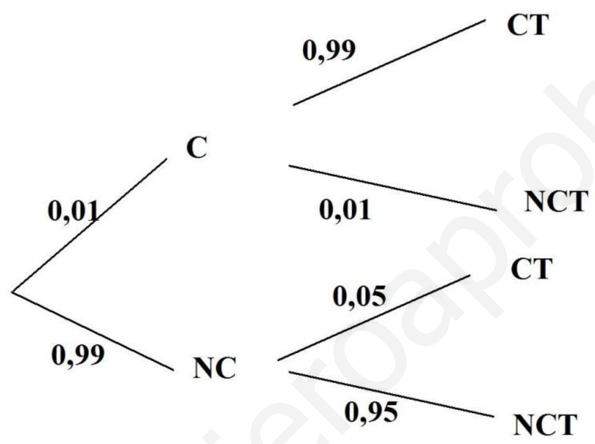
b)

$$P(\text{Máximo dos}) = 1 - P(3D) = 1 - 0,000125 = 0,999875$$

Opción B

Problema 4.3.2 *(2 puntos)* Una prueba para determinar cierta contaminación del agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0,05 de falsos positivos, esto es, casos en los que el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0,99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0,99. Si se realizara una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

Solución:



$$P(NC|CT) = \frac{P(CT|NC) \cdot P(NC)}{P(CT)} = \frac{0,05 \cdot 0,99}{0,0594} = 0,8333$$

Donde $P(CT) = 0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,05 = 0,0594$.

Se trata de un malísimo test.

4.3.2. Ordinaria

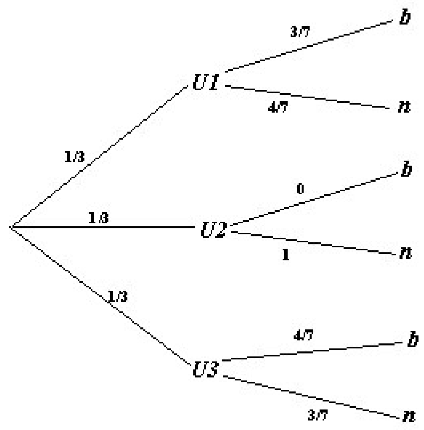
Opción A

Problema 4.3.3 *(2 puntos)* Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

a) Se elige una caja al azar, y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

Solución:



a)

$$P(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$$

b)

$$P(U2|n) = \frac{P(n|U2)P(U2)}{P(n)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Opción B

Problema 4.3.4 *(2 puntos)* Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas.

a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.

b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

Solución:

a)

$$P(3 \text{ veces } = 6D) = \left(\frac{1}{36}\right)^3$$

b)

$$P(3 \text{ veces } \neq 6D) = \left(\frac{5}{36}\right)^3$$

4.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.3.5 *(2 puntos)* Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo se acierta en el blanco. Si sólo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0,3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?

b) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer intento?, ¿y de llevárselo exactamente en el segundo?

Solución: Sea $A = \{\text{Acertar}\} \Longrightarrow P(A) = 0,3$; y $P(\overline{A}) = 0,7$:

a)
$$P(\text{acertar en 3 intentos}) = 1 - P(\text{no acertar en 3 intentos}) =$$
$$= 1 - (0,7)^3 = 0,657$$

b)
$$P(\text{acertar en el 3 intento}) = P(\overline{A})P(\overline{A})P(A) = 0,147$$
$$P(\text{acertar en el 2 intento}) = P(A)P(\overline{A}) = 0,21$$

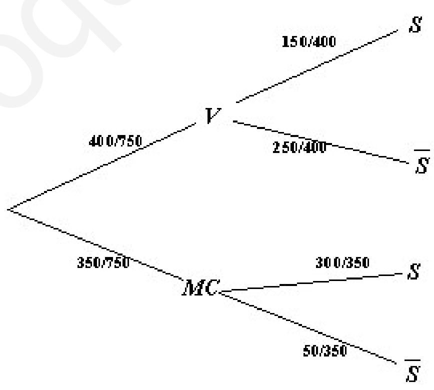
Opción B

Problema 4.3.6 *(2 puntos)* Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las ventas pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros?

b) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

Solución:



a)
$$P(S) = \frac{150}{400} \cdot \frac{400}{750} + \frac{300}{350} \cdot \frac{350}{750} = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(MC|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|MC)P(MC)}{P(\overline{S})} = \frac{50/350 \cdot 350/750}{1-3/5} = \frac{1}{6}$$

4.4. Año 2003

4.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 4.4.1 *(2 puntos)* El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas votan al candidato A.

b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.

c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

Solución:

a) $P(A \cap A \cap A) = (0,45)^3 = 0,091125$.

b) $P(\text{dos votan } A \text{ y uno vota } B) = 3P(A \cap A \cap B) = 3(0,45)^2 \cdot 0,35 = 0,2126$.

c) $P(\text{abstenerse}) = 0,20$, $P(\text{no abstenerse}) = 0,80$

$P(\text{alguno se abstiene}) = 1 - P(\text{ninguno se abstiene}) = 1 - 0,80^3 = 0,488$

Opción B

Problema 4.4.2 *(2 puntos)* De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes.

b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.

c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

Solución:

a)

$$P(PRRR) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470} = 0,0004$$

b)

$$P(F56) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{4}{1235} = 0,0032$$

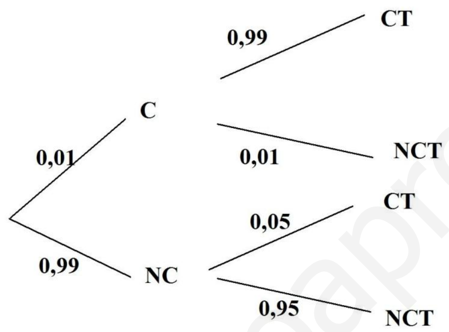
c)

$$P(A36 \,\text{sin orden}) = 3! \left(\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}\right) = \frac{8}{1235} = 0{,}0065$$

4.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.4.3 *(2 puntos)* El test para detectar una sustancia contaminante en agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0,99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0,05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0,99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.
Solución:
C = contaminada, NC = no contaminada, CT = contaminada según el test, NCT = no contaminada según el test



$$P(CT) = 0,99 \cdot 0,05 + 0,01 \cdot 0,99 = 0,0594$$
$$P(NC|CT) = \frac{P(CT|NC) \cdot P(NC)}{P(CT)} = \frac{0,99 \cdot 0,05}{0,0594} = 0,8333$$

El test detecta que el agua está contaminada, cuando en realidad no lo está el 83,33 % de las veces. Se trata de un mal producto.

Opción B

Problema 4.4.4 *(2 puntos)* Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?
Solución:
A= divisible por dos
B= divisible por tres

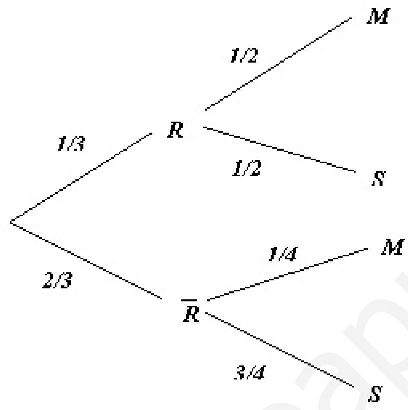
$$P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$
$$P(B \cup \overline{A}) = \frac{3}{20}$$

4.5. Año 2004

4.5.1. Modelo

Opción A

Problema 4.5.1 *(2 puntos)* Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es de 0,25. La probabilidad de no regar el rosal es de 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿Cuál es la probabilidad de no haberlo regado?.
Solución:



$$P(\overline{R}|S) = \frac{P(S|\overline{R})P(\overline{R})}{P(S)} = \frac{3/4 \cdot 2/3}{1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 3/4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Opción B

Problema 4.5.2 *(2 puntos)* Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0,7, \quad P(B) = 0,5 \quad P(A \cap B) = 0,45$$

Calcular:

a) $P(B|A)$

b) $P(A^c \cap B^c)$

Nota: A^c representa el suceso complementario de A.
Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,45}{0,7} = 0{,}6428571428$$

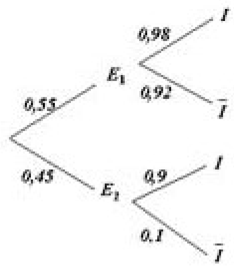
b)

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,5 - 0,45 = 0,75$$

4.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.5.3 *(2 puntos)* Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es $0,55$ y por E_2 es $0,45$. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar a indemnización es 0,98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0,90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.
Solución:

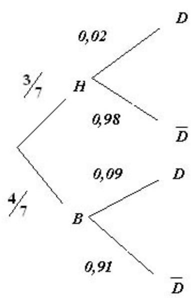


$$P(I) = P(I|E_1)P(E_1) + P(I|E_2)P(E_2) = 0,55 \cdot 0,98 + 0,45 \cdot 0,90 = 0,944$$
$$P(E_2|I) = \frac{P(I|E_2)P(E_2)}{P(I)} = \frac{0,9 \cdot 0,45}{0,944} = 0,429$$

Opción B

Problema 4.5.4 *(2 puntos)* En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0,02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0,09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?.

Solución:



$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|H)P(H) + P(\overline{D}|B)P(B) = \frac{3}{7} \cdot 0,98 + \frac{4}{7} \cdot 0,91 = 0,94$$
$$P(H|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|H)P(H)}{P(\overline{D})} = \frac{0,98 \cdot \frac{3}{7}}{0,94} = 0,4468$$

4.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.5.5 *(2 puntos)* Una cierta instalación de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es $0,95$ y de que se active el segundo es $0,90$.

a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores.

b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

Solución:
Llamamos $A = \{\text{se enciende el indicador}1^{\circ}\},\ P(A) = 0,95,\ P(\overline{A}) = 0,05$
Llamamos $B = \{\text{se enciende el indicador}2^{\circ}\},\ P(B) = 0,90,\ P(\overline{B}) = 0,10$

a) $P(\text{se enciende uno sólo}) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = 0,95 \cdot 0,10 + 0,05 \cdot 0,90 = 0,14$

b) $P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,05 \cdot 0,10 = 0,995$

Opción B

Problema 4.5.6 *(2 puntos)* En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa población el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al futbol.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al futbol.

b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al futbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?.

Solución:
Llamamos $H = \{\text{hombre}\}$, $M = \{\text{mujer}\}$, $A = \{\text{aficionado}\}$, $\overline{A} = \{\text{no aficionado}\}$.

a)
$$P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M) = 0,80 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,60 = 0,44$$

b)
$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,20 \cdot 0,60}{0,44} = 0,273$$

4.6. Año 2005

4.6.1. Modelo

Opción A

Problema 4.6.1 *(2 puntos)* Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0,6, la empata con probabilidad 0,3 y la pierde con probabilidad 0,1. El jugador juega dos partidas.

a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio.

b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

Solución:

a) $\Omega = \{GG, GP, GE, PG, PP, PE, EG, EP, EE\}$

$$P(GG) = 0,36 \quad P(GP) = 0,18 \quad P(GE) = 0,06$$
$$P(PG) = 0,18 \quad P(PP) = 0,09 \quad P(PE) = 0,03$$
$$P(EG) = 0,06 \quad P(EP) = 0,03 \quad P(EE) = 0,01$$

b)
$$P(\text{ganar al menos una}) = P(GG) + P(GP) + P(GE) + P(PG) + P(EG) =$$
$$0,36 + 0,18 + 0,06 + 0,18 + 0,06 = 0,84$$

Opción B

Problema 4.6.2 *(2 puntos)* En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa

	Chicas	Chicos
Científico – Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

a) No curse la opción Científico-Tecnológica.

b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

Solución:

	Chicas	Chicos	Totales
Científico – Tecnológica	64	52	116
Humanidades y C. Sociales	74	50	124
Totales	138	102	240

a) $P(\overline{CT}) = 1 - P(CT) = 1 - \dfrac{116}{240} = \dfrac{31}{60} = 0,5166666666$

b)
$$P(HCS|H) = \frac{P(H|HCS) \cdot P(HCS)}{P(H)} = \frac{50/124 \cdot 124/240}{102/240} =$$
$$\frac{25}{51} = 0,49$$

4.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.6.3 *(2 puntos)* Una caja con una docena de huevos contiene dos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.

b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

Solución:

a) Llamamos $A = \{\text{sale un huevo en buen estado}\}$
Llamamos $B = \{\text{sale un huevo roto}\}$

$$P(AAAA) = \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$$

b)

$$P(BAAA) + P(ABAA) + P(AABA) + P(AAAB) =$$

$$4 \cdot P(BAAA) = 4 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{33}$$

Opción B

Problema 4.6.4 *(2 puntos)* En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres unos", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de cuatro".
Solución:

a) $P(111) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0,00463$

b) $P(\textit{algún } 2) = 1 - P(\textit{ningún } 2) = 1 - P(\overline{222}) = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = 0,4213$

c) $P(3 \textit{ distintos}) = 1 - P(3 \textit{ iguales}) = 1 - 6P(111) = 0,972$

d) $P(\textit{suma} = 4) = P(211) + P(121) + P(112) = 3P(211) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,0139$

4.6.3. Extraordinaria

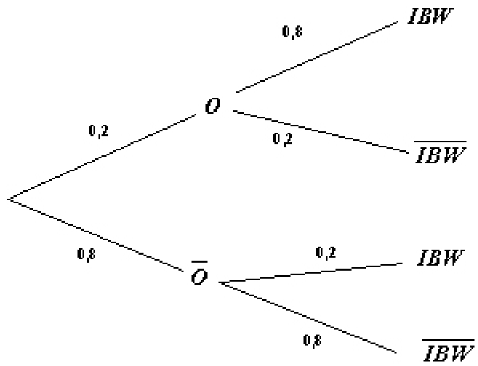
Opción A

Problema 4.6.5 *(2 puntos)* En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía internet. De los inversores que realizan operaciones vía internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan inversiones vía internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

a) Obtener la probabilidad de que un inversor elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por internet?.

Solución:



a)
$$P(IBW) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,32$$

b)
$$P(O|IBW) = \frac{P(IBW|O)P(O)}{P(IBW)} = \frac{0,8 \cdot 0,2}{0,32} = 0,5$$

Opción B

Problema 4.6.6 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos, tal que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{5}$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular

a) $P(B|A)$.

b) $P(\overline{A}|B)$.

Nota: $\overline{A}$ representa el suceso contrario del suceso A.
Solución:

a)
$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Longrightarrow$$
$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

b)
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{3}{5}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$
$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{12}$$

4.7. Año 2006

4.7.1. Modelo

Opción A

Problema 4.7.1 *(2 puntos)* Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B:

$$P(A) = 0,6 \quad P(B) = 0,2 \quad P(A \cap B) = 0,12$$

a) calcular las probabilidades de los sucesos

$$(A \cup B) \text{ y } (A|(A \cup B))$$

b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,12 = 0,68$

$$P(A|(A \cup B)) = \frac{(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,6}{0,68} = 0,88$$

b) Como $P(A \cap B) = 0,12 = P(A) \cdot P(B)$ los sucesos son independientes. Como $P(A \cap B) \neq 0$ los sucesos no son incompatibles.

Opción B

Problema 4.7.2 *(2 puntos)* Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

Solución:

El espacio muestral será $\Omega = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$ y la probabilidad de cada uno de estos sucesos es $1/4$.

Si una de las bolas ha salido blanca, sólo hay tres casos posibles de los que hay únicamente uno favorable, luego la probabilidad pedida es $1/3$.

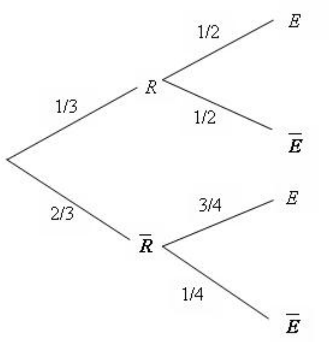
4.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.7.3 *(2 puntos)* Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $2/3$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0,25.

Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Solución:



$$P(\overline{R}|E) = \frac{P(E|\overline{R}) \cdot P(\overline{R})}{P(E)} = \frac{3/4 \cdot 2/3}{1/3 \cdot 1/2 + 3/4 \cdot 2/3} = \frac{3}{4}$$

Opción B

Problema 4.7.4 *(2 puntos)* Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado. Se pide:

a) Describir el espacio muestral de este experimento.

b) Determinar la probabilidad del suceso: "obtener una cara en la moneda y un número par en el dado".

Solución:

a)

$$\Omega = \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),(X,1),(X,2),(X,3),(X,4),(X,5),(X,6)\}$$

b)

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

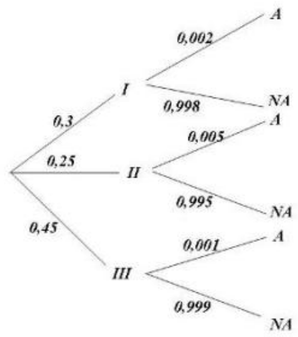
4.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.7.5 (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2 %, mientras que dicha proporción es 0,5 % en la segunda, y 0,1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

Solución:



$$P(A) = 0,002 \cdot 0,3 + 0,005 \cdot 0,25 + 0,001 \cdot 0,45 = 0,0023$$

Opción B

Problema 4.7.6 (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Solución:

$$P(bb) + P(nn) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{11}{21} = 0{,}5238095238$$

4.8. Año 2007

4.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

4.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.8.1 *(2 puntos)* Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

a)
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)
$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

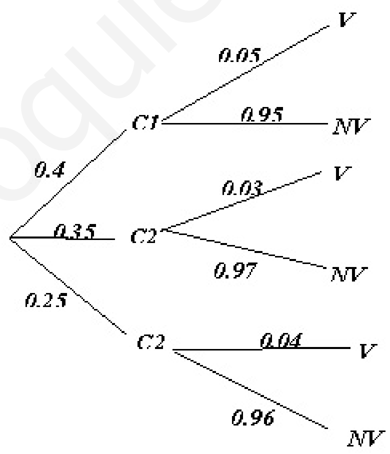
Opción B

Problema 4.8.2 *(2 puntos)* Los pianistas de la isla sordina se forman en tres conservatorios, $C1$, $C2$ y $C3$, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio $C1$.

Solución:



a) $P(V) = 0,4 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,04 = 0,0405$

b)
$$P(C1|V) = \frac{P(V|C1) \cdot P(C1)}{P(V)} = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,0405} = 0,4938$$

4.8.3. Extraordinaria

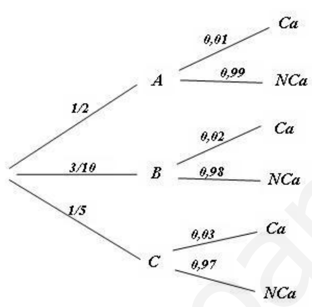
Opción A

Problema 4.8.3 *(2 puntos)* En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Solución:



$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{1}{5}$$

a)
$$P(Ca) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

b)
$$P(B|Ca) = \frac{P(Ca|B)P(B)}{P(Ca)} = \frac{0,02 \cdot \frac{3}{10}}{0,017} = 0,3529$$

Opción B

Problema 4.8.4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B), \quad P(A \cap B), \quad P(\overline{A}|B), \quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

☛ $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

- ☛ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{19}{20}=\dfrac{3}{10}$
- ☛ $P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/2-3/10}{1/2}=\dfrac{2}{5}$
- ☛ $P(\overline{B}|A)=\dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{3/4-3/10}{3/4}=\dfrac{3}{5}$

4.9. Año 2008

4.9.1. Modelo

Opción A

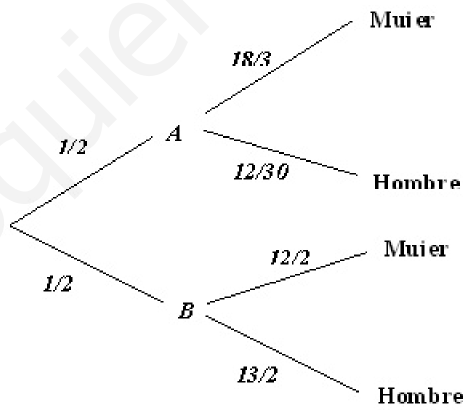
Problema 4.9.1 *(2 puntos)* Un instituto tiene dos grupos de 2º de Bachillerato. El grupo A está formado por 18 alumnas, de las cuales 5 juegan al baloncesto, y 12 alumnos, 7 de los cuales juegan al mismo deporte. El grupo B está formado por 12 alumnas, 4 de ellas jugadoras de baloncesto, y 13 alumnos, 7 de los cuales practican baloncesto.

a) Si se elige un alumno de 2º de bachillerato al azar, calcular la probabilidad de que sea mujer.

b) ¿En qué grupo es más probable elegir al azar un estudiante que juegue al baloncesto?

Solución:

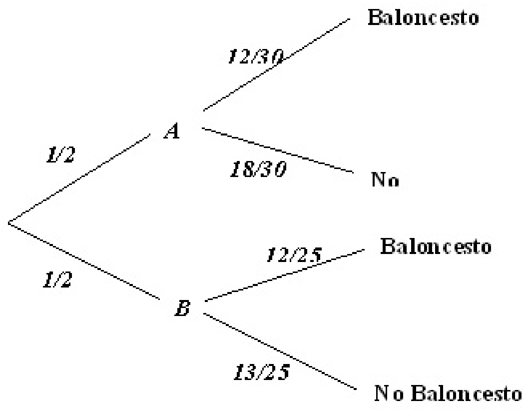
a) Hay dos maneras de ver este problema:



¿Están todos los alumnos juntos y fuera de sus grupo?, en este caso $P(\text{Mujer})=\dfrac{30}{55}=0,5454545454$. Pero también podemos pensar que los alumnos se encuentran en sus grupos, en ese caso primero nos dirigimos hacia un grupo con una probabilidad de $1/2$ y calculamos las probabilidades condicionadas correspondientes:

$$P(\text{Mujer})=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{25}=0,54$$

b) Ahora tenemos:



$$P(A|\text{Baloncesto}) = \frac{P(\text{Baloncesto}|A)P(A)}{P(\text{Baloncesto})} = \frac{12/30 \cdot 1/2}{12/30 \cdot 1/2 + 12/25 \cdot 1/2} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$$

$$P(B|\text{Baloncesto}) = \frac{P(\text{Baloncesto}|B)P(B)}{P(\text{Baloncesto})} = \frac{12/25 \cdot 1/2}{12/30 \cdot 1/2 + 12/25 \cdot 1/2} = \frac{6}{11} = 0{,}5454$$

Es claro que, es más probable encontrar un alumno que juegue al baloncesto en el grupo B.

Opción B

Problema 4.9.2 *(2 puntos)* La orquesta musiquera está formada por tres tipos de instrumentos, 30 de madera, 15 de viento y 5 de percusión. La víspera de un concierto se ponen enfermos dos músicos. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambos toquen instrumentos de viento.

b) Ambos toquen el mismo tipo de instrumento.

Solución:

Llamamos M al instrumento de madera, V al de viento y P al de percusión. Los músicos enfermos son A y B.

a)
$$P(A = V \text{ y } B = V) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{3}{35} = 0,086$$

b)
$$P(\text{ambos lo mismo}) =$$
$$P(A = M \text{ y } B = M) + P(A = V \text{ y } B = V) + P(A = P \text{ y } B = P) =$$
$$\frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{22}{49} = 0,449$$

4.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.9.3 *(2 puntos)* En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual a cinco en el dado.

a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Solución:

$$\begin{gathered}\Omega=\{(CC1),(CC2),(CC3),(CC4),(CC5),(CC6),\\(CX1),(CX2),(CX3),(CX4),(CX5),(CX6),\\(XC1),(XC2),(XC3),(XC4),(XC5),(XC6),\\(XX1),(XX2),(XX3),(XX4),(XX5),(XX6)\}\end{gathered}$$

a)

$$P(\text{Gane})=\frac{7}{24}$$

b)

$$P(CC|\text{gana})=\frac{6}{8}=\frac{3}{7}$$

Opción B

Problema 4.9.4 *(2 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tal que:

$$P(A)=\frac{1}{4},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)\Longrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{12}=P(A)\cdot P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})} =$$

$$\frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

4.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.9.5 *(2 puntos)* Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a $0,46$; la probabilidad de que practique B es igual a 0,33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0,15.

a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores?

b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

Solución:

$$P(A) = 0,46; \quad P(B) = 0,33; \quad P(A\cap B) = 0,15$$

a)

$$P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] = 0,36$$

b)

$$P(A\cap B|A\cup B) = \frac{P(A\cap B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}\frac{0,15}{0,64} = 0,234375$$

Opción B

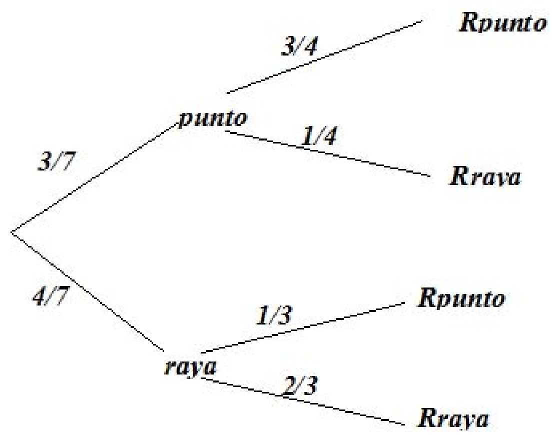
Problema 4.9.6 *(2 puntos)* Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son *punto* y *raya* y que el telégrafo envía un *punto* con probabilidad $\frac{3}{7}$ y una *raya* con probabilidad $\frac{4}{7}$. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un *punto* se reciba una *raya* con probabilidad $\frac{1}{4}$ y que cuando se envíe una *raya* se reciba un *punto* con probabilidad $\frac{1}{3}$.

$$P(raya|punto) = \frac{1}{4}, \quad P(punto|raya) = \frac{1}{3}$$

a) Si se recibe una *raya*, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una *raya*?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe *punto* − *punto* se hubiera enviado *raya* − *raya*

Solución:



a)

$$P(raya|Rraya) = \frac{P(Rraya|raya)\cdot P(raya)}{P(Rraya)} = \frac{2/3\cdot 4/7}{3/7\cdot 1/4 + 4/7\cdot 2/3} =$$

$$= \frac{32}{41} = 0,7804878048$$

b)

$$P(raya|Rpunto) = \frac{P(Rpunto|raya)\cdot P(raya)}{P(Rpunto)} = \frac{1/3\cdot 4/7}{3/7\cdot 3/4 + 4/7\cdot 1/3} =$$

$$= \frac{16}{43} = 0,3720930232 \Longrightarrow P(raya - raya|Rpunto - Rpunto) =$$

$$\frac{16}{43}\cdot\frac{16}{43} = \frac{256}{1849} = 0,1384532179$$

4.10. Año 2009

4.10.1. Modelo

Opción A

Problema 4.10.1 *(2 puntos)* Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.

b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

Solución:

a) $P(\text{ dos caras y una cruz}) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tenemos:

$$P(\text{Suma}\,6) = \frac{5}{36}$$
$$P(\text{Suma}\,7) = \frac{1}{6}$$
$$P(6 \text{ o } 7) = \frac{11}{36}$$

Opción B

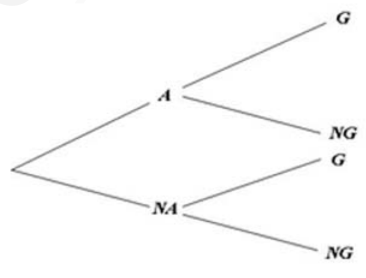
Problema 4.10.2 *(2 puntos)* La probabilidad de que un vehículo de una cierta compañía de coches tenga un accidente es igual a 0,2. Si uno de los vehículos sufre un accidente, la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa es igual a 0,85. Por otra parte, la probabilidad de que uno de los vehículos necesite la asistencia de una grúa sin haber tenido un accidente es igual a 0,1.

a) Se elige al azar un vehículo de dicha compañía, ¿cuál es la probabilidad de que necesite la asistencia de una grúa?

b) Si el vehículo elegido ha necesitado la asistencia de una grúa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido por causa de un accidente?

Solución:

Llamamos A al suceso accidente, NA al suceso no hay accidente, G al suceso necesita grúa y NG al suceso no necesita grúa.



a)
$$P(G) = P(G|A)\cdot P(A) + P(G|NA)\cdot P(NA) = 0,2\cdot 0,85 + 0,8\cdot 0,1 = 0,25$$

b)
$$P(NA|G) = \frac{P(G|NA)\cdot P(NA)}{P(G)} = \frac{0,1\cdot 0,8}{0,25} = 0,32$$

4.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.10.3 *(2 puntos)* Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A) = \frac{1}{2};\ \ P(B) = \frac{1}{3};\ \ P(C) = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3};\ \ P(A \cap B \cap C) = 0;\ \ P(A|B) = P(C|A) = \frac{1}{2}$$

a) Calcúlese $P(C \cap B)$.

b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap A) = P(C|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - P(B \cap C) + 0 \Longrightarrow P(B \cap C) = 0$$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$

Opción B

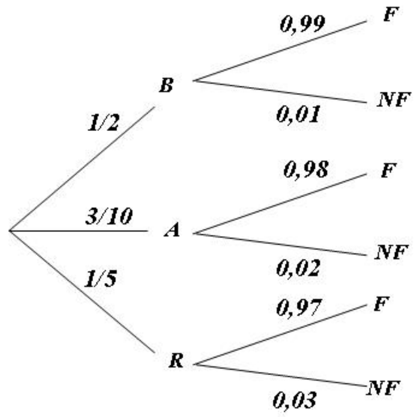
Problema 4.10.4 *(2 puntos)* Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul y 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea de color azul

Solución:

$$P(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},\ \ P(A) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10},\ \ P(R) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$



☛

$$P(NF) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

☛

$$P(A|NF) = \frac{P(NF|A) \cdot P(A)}{P(NF)} = \frac{0,02 \cdot 3/10}{0,017} = 0,35294$$

4.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.10.5 *(2 puntos)* En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a las empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

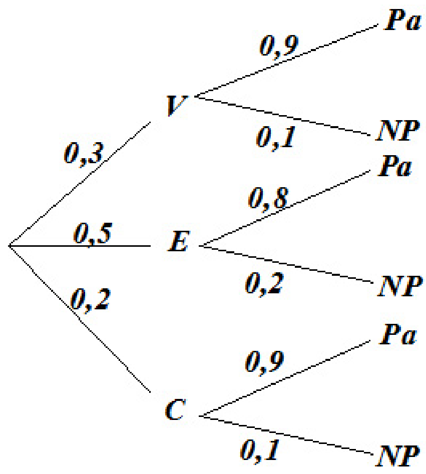
a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Solución:

V: crédito para vivienda, E: crédito para empresa y C: crédito para consumo.

Pa: pagados y NP: no pagados.



a) $P(Pa) = P(V) \cdot P(Pa|V) + P(E) \cdot P(Pa|E) + P(C) \cdot P(Pa|C) = 0,3 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,85$

b)
$$P(C|Pa) = \frac{P(Pa|C) \cdot P(C)}{P(Pa)} = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,85} = 0,21176$$

Opción B

Problema 4.10.6 *(2 puntos)* La probabilidad de que un habitante de cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a) al menos uno de los dos tipos de música.

b) la música clásica y también la moderna.

c) sólo la música clásica.

d) sólo la música moderna.

Solución:

Llamamos M al suceso le gusta la música moderna y C al suceso le gusta la música clásica. Los datos del problema: $P(M) = 0,55$, $P(C) = 0,4$ y $P(\overline{M \cup C}) = 0,25$

a) $P(M \cup C) = 1 - P(\overline{M \cup C}) = 1 - 0,25 = 0,75$

b) $P(M \cap C) = P(M) + P(C) - P(M \cup C) = 0,55 + 0,40 - 0,75 = 0,20$

c) $P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(M \cap C) = 0,40 - 0,20 = 0,20$

d) $P(M \cap \overline{C}) = P(M) - P(M \cap C) = 0,55 - 0,20 = 0,35$

4.11. Año 2010

4.11.1. Modelo

Opción A

Problema 4.11.1 *(2 puntos)* Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:
Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A\cap B) = 0,2$$

a)

$$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)

$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A\cup B) =$$

$$1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

Opción B

Problema 4.11.2 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A}\cap\overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A\cup B), \quad P(A\cap B), \quad P(\overline{A}|B), \quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

☞ $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(\overline{A\cup B}) = 1 - \dfrac{1}{20} \Longrightarrow P(\overline{A\cup B}) = \dfrac{19}{20}$

☞ $P(\overline{A\cup B}) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{19}{20} = \dfrac{3}{10}$

☞ $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/2 - 3/10}{1/2} = \dfrac{2}{5}$

☞ $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{3/4 - 3/10}{3/4} = \dfrac{3}{5}$

4.11.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.11.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$; $P(A \cap B) = 0,1$. Calcúlense las siguientes probabilidades:

$$a)P(A \cup B); \quad b)P(\overline{A} \cup \overline{B}); \quad c)P(A|B); \quad d)P(\overline{A} \cap B)$$

Solución:

$a)P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8$

$b)P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9$

$c)P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,25$

$d)P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3$

Opción B

Problema 4.11.4 *(2 puntos)* Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener al menos un seis en el total de los lanzamientos.

b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Solución:

✌

$$P(\text{algún seis}) = 1 - P(\text{ningún seis}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,6651020233$$

✌

$$P(6, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,01339591906$$

4.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.11.5 *(2 puntos)* Sean tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A|C) \geq P(B|C), \quad P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\text{a) } P(A) < P(B); \quad \text{b) } P(A) \geq P(B)$$

Nota.- $\overline{C}$ representa el suceso complementario de C.
Solución:

$$P(A|C) \geq P(B|C) \Longrightarrow \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \geq \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \Longrightarrow P(A \cap C) \geq P(B \cap C)$$

$$P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}) \Longrightarrow \frac{P(A\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} \geq \frac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} \Longrightarrow P(A\cap\overline{C}) \geq P(B\cap\overline{C})$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap C)+P(A\cap\overline{C})=P(A) \\ P(B\cap C)+P(B\cap\overline{C})=P(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A)\geq P(B)$$

Luego es falso que $P(A) < P(B)$, se cumple que:

$$P(A) \geq P(B)$$

Opción B

Problema 4.11.6 *(2 puntos)* Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A=La economía de un cierto país está en recesión.
- Suceso B=Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que:

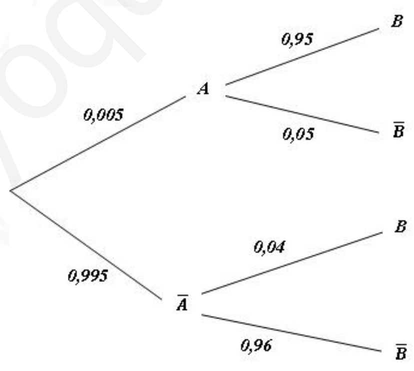
$$P(A)=0,005, \quad P(B|A)=0,95, \quad P(\overline{B}|\overline{A})=0,96$$

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación $\overline{A}$ representa el suceso complementario de A.

Solución:



a)

$$P(\overline{B}\cap A)=0,005\cdot 0,05=0,00025$$

b)

$$P(B)=0,005\cdot 0,95+0,995\cdot 0,04=0,04455$$

4.12. Año 2011

4.12.1. Modelo

Opción A

Problema 4.12.1 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $\dfrac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\dfrac{7}{12}$. Se sabe además que $P(A|B) = \dfrac{1}{2}$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A ó B.

b) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A.

Solución:

$$P(A\cap B) = \frac{1}{6},\quad P(\overline{A\cup B}) = \frac{7}{12},\quad P(A|B) = \frac{1}{2}$$

a) $P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A\cup B}) = 1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$.

b)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A|B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$
$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow$$
$$P(A) = P(A\cup B) + P(A\cap B) - P(B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

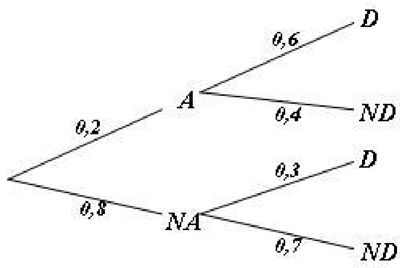
Opción B

Problema 4.12.2 *(2 puntos)* En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. Entre los habitantes que siguen una dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3. Se elige al azar un habitante de la población.

a) Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

Solución:



a) $P(D) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0{,}3 = 0,36$

b)

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,36} = 0{,}333$$

4.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.12.3 *(2 puntos)* En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos con probabilidad 0,26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) por alguna de las dos instalaciones,

b) solamente por una de las dos.

Solución:

Sean los sucesos A: energía solar y B: energía eólica

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,26, \quad P(A \cap B) = 0,12$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,54.$

b)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0,42$$

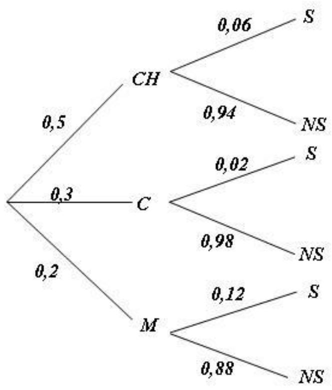
Opción B

Problema 4.12.4 *(2 puntos)* En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0,5, de que sea un camión es 0,3 y de que sea una motocicleta es 0,2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0,06 para un coche, 0,02 para un camión y 0,12 para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.

a) Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?

Solución:



a) $P(S) = 0,5 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,12 = 0,06$

b)
$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,2 \cdot 0,12}{0,06} = 0,46$$

4.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.12.5 *(2 puntos).* Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca un niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Solución:

a) V_1: el primer hijo es niño, V_2: el segundo hijo es niño. M_1: el primer hijo es niña, M_2: el segundo hijo es niña.

$$P(V_1 \cap V_2|V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{0,51} = 0,51$$

b) Si el suceso A es al menos un niño y el B es dos niños tendremos que $A \cap B = B$ y

$$P(A) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,49^2 = 0,7599$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,51^2}{0,7599} = 0,342$$

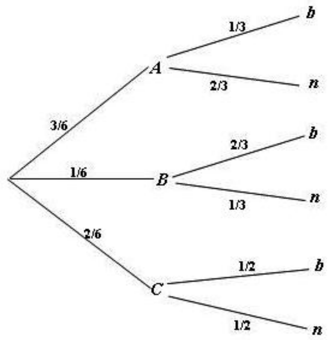
Opción B

Problema 4.12.6 *(2 puntos).* Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Solución:



a)

$$P(b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9} = 0,444$$

b)

$$P(C|b) = \frac{P(b|C)P(C)}{P(b)} = \frac{1/2\cdot 1/3}{0,444} = 0,375$$

4.12.4. Reserva

Opción A

Problema 4.12.7 *(2 puntos)*. La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a 7/9, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es 5/7. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Solución:

$$P(A) = \frac{7}{9},\quad P(\overline{A}) = \frac{2}{9},\quad P(B) = \frac{5}{7},\quad P(\overline{B}) = \frac{2}{7}$$

a)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B) = \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{7} + \frac{2}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{8}{21} = 0,381$$

b)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{7}{9} + \frac{5}{7} - \frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{59}{63} = 0,937$$

Opción B

Problema 4.12.8 *(2 puntos).* Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
NoApto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

b) Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

	Chico	Chica	Total
Apto	12109	9863	21972
NoApto	1717	1223	2940
Total	13826	11086	24912

$\Longrightarrow$

	Chico	Chica	Total
Apto	$0,486$	$0,396$	$0,882$
NoApto	$0,069$	$0,049$	$0,118$
Total	$0,555$	$0,445$	1

Sean los sucesos V: Chico, M: Chica, A: Apto y $\overline{A}$: No Apto.

a) $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,445 + 0,882 - 0,396 = 0,931$

b)

$$P(\overline{A}|V) = \frac{P(\overline{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,069}{0,555} = 0,124$$

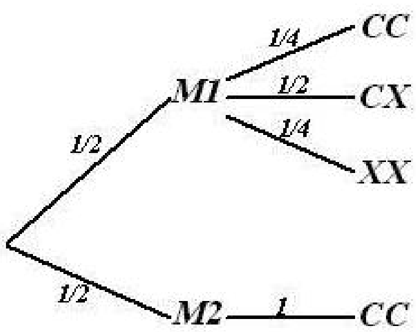
4.13. Año 2012

4.13.1. Modelo

Opción A

Problema 4.13.1 *(2 puntos)* Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

Solución:



$$P(CC)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8},\ \ P(CC|M2)=1$$
$$P(M2|CC)=\frac{P(CC|M2)P(M2)}{P(CC)}=\frac{4}{5}$$

Opción B

Problema 4.13.2 *(2 puntos)* Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre − benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Solución:

a)
$$P(\text{iniciación})=\frac{200}{480}=\frac{5}{12}$$

b)
$$P(\text{perfeccionamiento}\cup\text{alevín})=\frac{280}{480}+\frac{160}{480}-\frac{150}{480}=\frac{29}{48}$$

c)
$$P(\text{perfeccionamiento}|\text{benjamín})=\frac{9}{16}$$

d)
$$P(\text{benjamín}|\text{iniciación})=\frac{7}{20}$$

4.13.2. Ordinaria

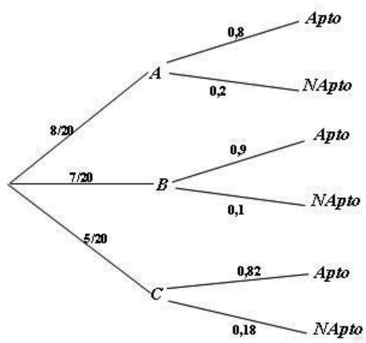
Opción A

Problema 4.13.3 *(2 puntos)* En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Solución:



a)

$$P(Apto) = \frac{8}{20} \cdot 0,8 + \frac{7}{20} \cdot 0,9 + \frac{5}{20} \cdot 0,82 = 0,84$$

b) $P(NApto) = 1 - P(Apto) = 0,16$

$$P(B|NApto) = \frac{P(NApto|B)P(B)}{P(NApto)} = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Opción B

Problema 4.13.4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5$$

Calcúlense:

a) $P(B)$.

b) $P(A \cup B)$.

c) $P(A)$.

d) $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

b)

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 0,6$$
$$P(A\cup B) = 0,4$$

c)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow$$
$$P(A) = P(A\cup B) + P(A\cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

d)

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86$$

4.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

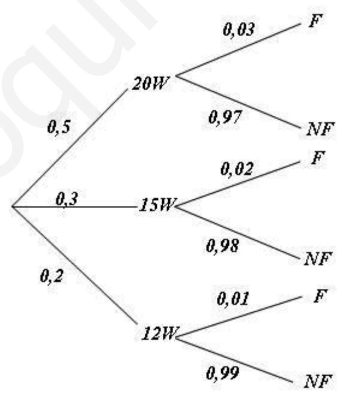
Problema 4.13.5 *(2 puntos)* Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo de 0,03 para las bombillas de 20 W, de 0,02 para las de 15 W y de 0,01 para las bombillas de 12 W.

a) Se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

b) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

Solución:

$$P(20W) = 0,5,\;\; P(15W) = 0,3,\;\; P(12W) = 0,2$$



a)

$$P(F) = P(20W)P(F|20W) + P(15W)P(F|15W) + P(12W)P(F|12W) =$$
$$0,5\cdot 0,03 + 0,3\cdot 0,02 + 0,2\cdot 0,01 = 0,023$$

b)

$$P(20W|F) = \frac{P(F|20W)P(20W)}{P(F)} = \frac{0,03\cdot 0,5}{0,023} = 0,652$$

Opción B

Problema 4.13.6 *(2 puntos)* Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian obligatoriamente Inglés y Francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado Inglés, 14 han aprobado Francés y 6 han aprobado los dos idiomas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado ni Inglés ni Francés?

b) Se elige un estudiante al azar de entre los aprobados de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Inglés?

Solución:

Llamamos I al suceso aprobar inglés y F al de aprobar francés.

$$P(I) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5},\ P(F) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15},\ P(I \cap F) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

a)

$$P(\overline{I} \cap \overline{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - (P(I) + P(F) - P(I \cap F)) = \frac{1}{15} = 0,133$$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$

4.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.13.7 *(2 puntos)* Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

a) Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

Solución:

Para que un jugador gane pueden ocurrir los siguientes sucesos: B, NB y NNB.

a)

$$P(Ganar) = P(B) + P(NB) + P(NNB) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

$$P(una\ caja|Perder) = \frac{P(Perder \cap una\ caja)}{P(Perder)} = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$$

Opción B

Problema 4.13.8 *(2 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tal que:

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlese razonadamente:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(B)$.

c) $P(\overline{B}|A)$.

d) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

c)

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

d)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{3}$$

4.14. Año 2013

4.14.1. Modelo

Opción A

Problema 4.14.1 *(2 puntos)* Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0,01, de que lo sea uno fabricado en B es 0,02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0,03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

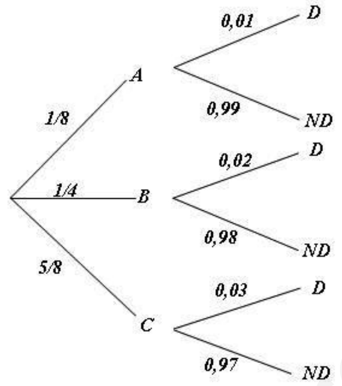
a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

Solución:

$$P(D|A) = 0,01, \quad P(D|B) = 0,02, \quad P(D|C) = 0,03$$

$$P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}$$



a)

$$P(ND) = \frac{1}{8} \cdot 0,99 + \frac{1}{4} \cdot 0,98 + \frac{5}{8} \cdot 0,97 = 0,975$$

b)

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \cdot 0,25}{1 - 0,975} = 0,2$$

Opción B

Problema 4.14.2 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tal que

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{B}) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B.

b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \neq 0 \Longrightarrow$ los sucesos A y B son compatibles.

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{12} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

4.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.14.3 *(2 puntos)* Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:
$D \equiv$ deportistas, $L \equiv$ lectores.

$$P(D \cup L) = 0,55, \;\; P(D) = 0,4, \;\; P(L) = 0,3$$

a) $P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L) \Longrightarrow P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0,4 + 0,3 - 0,55 = 0,15$
$P(D \cap \overline{L}) = P(D) - P(D \cap L) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

b)
$$P(D|L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

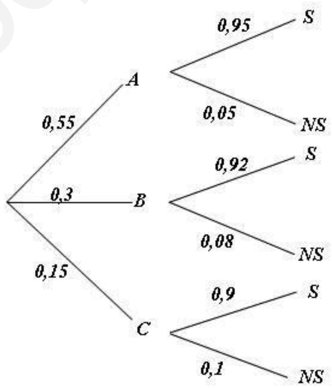
Opción B

Problema 4.14.4 *(2 puntos)* Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A

Solución:



a) $P(NS) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$

b) $P(A|NS) = \dfrac{P(NS|A)}{P(NS} = \dfrac{0,05 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,4135$

4.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.14.5 *(2 puntos)* En un instituto se imparten únicamente dos lenguas extranjeras: inglés y francés. El 72 % de los alumnos de ese instituto estudia inglés y el 42 % estudia francés. Todos los alumnos estudian al menos una lengua extranjera. Si se elige un alumno al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Estudie inglés y francés.

b) Estudie inglés, y no estudie francés.

Solución:

$$P(I) = 0,72; \quad P(F) = 0,42$$

a) $P(I \cup F) = 1 = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Longrightarrow$
$1 = 0,72 + 0,42 - P(I \cap F) \Longrightarrow P(I \cap F) = 0,14$

b) $P(I \cap \overline{F}) = P(I) - P(I \cap F) = 0,72 - 0,14 = 0,58$

Opción B

Problema 4.14.6 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$, determínese la probabilidad de A condicionado a que B haya ocurrido.

b) Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,5$ y que C y D son incompatibles, determínese $P(C \cup D)$.

Solución:

a) $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,4 - 0,8 = 0,2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

b) C y D incompatibles $\Longrightarrow P(C \cap D) = 0$, luego $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = 0,4 + 0,5 - 0 = 0,9$

4.14.4. Extraordinaria

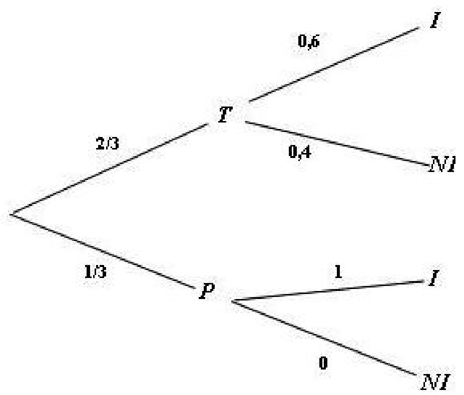
Opción A

Problema 4.14.7 *(2 puntos)* En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

Solución:



a) $P(I) = \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0,733$

b)

$$P(T|I) = \frac{P(I|T)P(T)}{P(I)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,6}{0,733} = 0,54$$

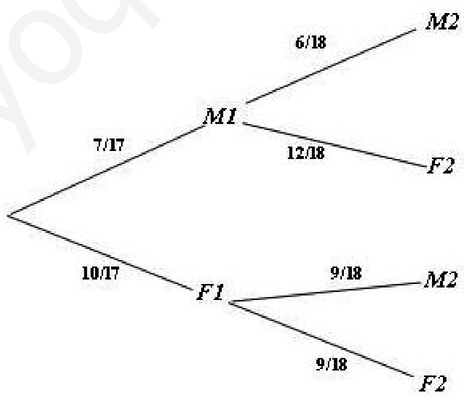
Opción B

Problema 4.14.8 *(2 puntos)* Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

Solución:



a) $P(F2) = \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{29}{51} = 0,569$

b) $P(mismo\ \ sabor) = P(M1, M2) + P(F1, F2) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{22}{51} = 0,43$

4.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.14.9 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tal que

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

a) Determínese la probabilidad de que suceda A si sabemos que ha sucedido B.

b) Determínese la probabilidad de que no suceda ni A ni B.

Solución:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

b)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Opción B

Problema 4.14.10 *(2 puntos)* En un avión viajan un 10 % de los pasajeros en primera clase. Del total de pasajeros del avión un 20 % son mujeres. Se sabe que los pasajeros que viajan en primera clase y además son mujeres, son el 2 % del total. Determínese la probabilidad de que:

a) al escoger un pasajero de primera clase al azar sea mujer.

b) al escoger un varón del avión al azar, no viaje en primera clase.

Solución:

$$P(1^a) = 0,1, \quad P(2^a) = 0,9, \quad P(M) = 0,2, \quad P(H) = 0,8, \quad P(1 \cap M) = 0,02$$

	11^a	21^a	
H	0,08	0,12	0,2
M	0,02	0,78	0,8
	0,1	0,9	

a)

$$P(M|11^a) = \frac{P(11^a \cap M)}{P(11^a)} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2$$

b)

$$P(21^a|H) = \frac{P(21^a \cap H)}{P(H)} = \frac{0,12}{0,2} = 0,6$$

4.15. Año 2014

4.15.1. Modelo

Opción A

Problema 4.15.1 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tal que la probabilidad de que no ocurra B es 0,6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0,4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0,25. Calcúlense:

a)$P(B)$, b)$P(A\cap B)$, c)$P(A)$, d)$P(A\cup B)$

Solución:

$$P(\overline{B}) = 0,6, \quad P(A|B) = 0,4, \quad P(B|A) = 0,25$$

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0,4$

b) $P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = 0,4\cdot 0,4 = 0,16$

c) $P(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B|A)} = \dfrac{0{,}16}{0,25} = 0,64$

d) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,64 + 0,4 - 0,16 = 0,88$

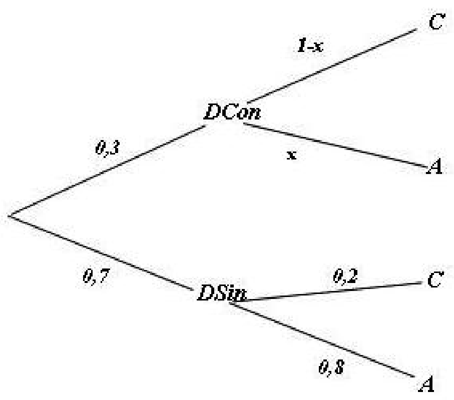
Opción B

Problema 4.15.2 *(2 puntos)* En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

Solución:



a) $P(A \cap DSin) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

b) $P(C) = 0,4 \Longrightarrow P(A) = 0,6 = 0,3x + 0,7 \cdot 0,8 \Longrightarrow x = 0,1333 \Longrightarrow x = 13,33\,\%$

4.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.15.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tal que: $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,5$; $P(B|A) = 0,5$. Calcúlense:

a) $P(B)$.

b) $P(A|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) =$$
$$= 0,5 + 0,2 - 0,4 = 0,3$$

b)
$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,3} = 0,28$$

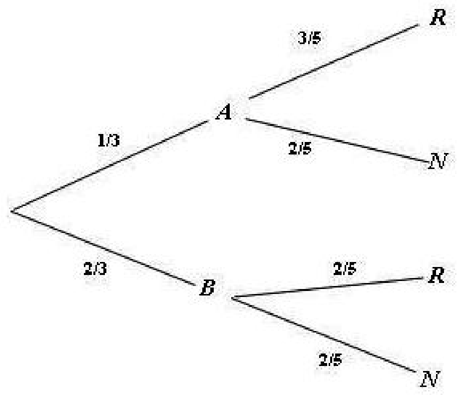
Opción B

Problema 4.15.4 *(2 puntos)* Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Solución:



a)

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b)

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/5 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{3}{7}$$

4.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.15.5 *(2 puntos)* Todos los trabajadores de una determinada empresa tienen como mínimo conocimientos de Inglés o de Alemán. El 75 % de los empleados tienen conocimientos de Inglés y el 46 % conocimientos de Alemán. Calcúlese la probabilidad de que un empleado elegido al azar:

a) Tenga conocimientos de Inglés y de Alemán.

b) Tenga conocimientos de Inglés si sabemos que tiene conocimientos de Alemán.

Solución:

$$P(I) = 0,75, \quad P(A) = 0,46, \quad P(I \cup A) = 1$$

a)

$$P(I \cap A) = P(I) + P(A) - P(I \cup A) = 0,75 + 0,46 - 1 = 0,21$$

b)

$$P(I|A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{0,21}{0,46} = 0,457$$

Opción B

Problema 4.15.6 *(2 puntos)* En un estudio de arquitectura de Madrid trabajan personas de diferentes nacionalidades. El 80 % de las personas que trabajan en el estudio son españolas. El 40 % de los empleados del estudio son mujeres, de las cuales un 90 % son españolas. Calcúlese la probabilidad de que tomando a un empleado del estudio de arquitectura al azar:

a) Sea mujer y extranjera.

b) Sea español sabiendo que no es mujer.

Solución:

$$P(E) = 0,8, \;\; P(\overline{E}) = 0,2, \;\; P(M) = 0,4, \;\; P(\overline{M}) = 0,6, \;\; P(E|M) = 0,9, \;\; P(\overline{E}|M) = 0,1$$

Construimos una tabla de contingencia:

	E	$\overline{E}$	
M	$0,36$	$0,04$	$0,4$
$\overline{M}$	$0,44$	$0,16$	$0,6$
	$0,8$	$0,2$	1

a) $P(\overline{E} \cap M) = P(\overline{E}|M)P(M) = 0,1 \cdot 0,4 = 0,04$

b) $P(E|\overline{M}) = \dfrac{P(E \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,44}{0,6} = 0,73$

4.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.15.7 *(2 puntos)* En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.

b) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

Solución:
Sean los sucesos A con dibujos de animales, B con dibujos de personas y C con dibujos de árboles.

$$P(A) = \frac{7}{22}, \;\; P(B) = \frac{3}{22}, \;\; P(C) = \frac{12}{22}$$

a)

$$P(\text{mismo papel}) = P(AA) + P(BB) + P(CC) = \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{21} + \frac{3}{22} \cdot \frac{2}{21} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} =$$
$$= \frac{30}{77} = 0,3896103896$$

b)

$$P(\text{el primero de persona al tercero}) =$$
$$= P(AAB) + P(ACB) + P(CAB) + P(CCB) =$$
$$= \frac{7}{22} \cdot \frac{6}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{7}{22} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{12}{22} \cdot \frac{7}{21} \cdot \frac{3}{20} + \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{3}{20} = \frac{171}{1540} = 0,1110389610$$

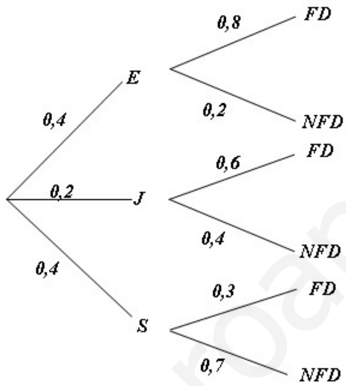
Opción B

Problema 4.15.8 *(2 puntos)* Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Solución:



a)

$$P(FD) = P(FD|E)P(E) + P(FD|J)P(J) + P(FD|S)P(S) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

b)

$$P(S|NFD) = \frac{P(NFD|S)P(S)}{P(NFD)} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

4.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.15.9 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tal que $P(A) = P(A|B) = 0,25$ y $P(B|A) = 0,5$.

a) Estúdiese si los sucesos son independientes.

b) Calcúlese $P(A \cup B)$

Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = 0,5\cdot 0,25 = 0,125$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5$$

$P(A)\cdot P(B) = 0,25\cdot 0,5 = 0,125 = P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,25 + 0,5 - 0,125 = 0,625$

Opción B

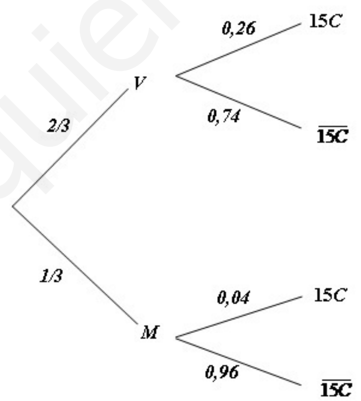
Problema 4.15.10 *(2 puntos)* Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren 15 crestas es 0,26, mientras que en una mujer es 0,04.

a) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga 15 crestas en el recuento de dicha área.

b) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con 15 crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?

Solución:

$$P(M) = \frac{1}{3},\ \ P(V) = \frac{2}{3},\ \ P(15C|V) = 0,26,\ \ P(15C|M) = 0,04$$



a)

$$P(15C) = P(15C|V)P(V) + P(15C|M)P(M) =$$

$$= 0,26\cdot\frac{2}{3} + 0,04\cdot\frac{1}{3} = 0,187$$

b)

$$P(V|15C) = \frac{P(15C|V)P(V)}{P(15C)} = \frac{0,26\cdot\frac{2}{3}}{0,187} = 0,927$$

4.16. Año 2015

4.16.1. Modelo

Opción A

Problema 4.16.1 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(B \cap \overline{A})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,3.$
Por ser A y B incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,7.$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 0,3$

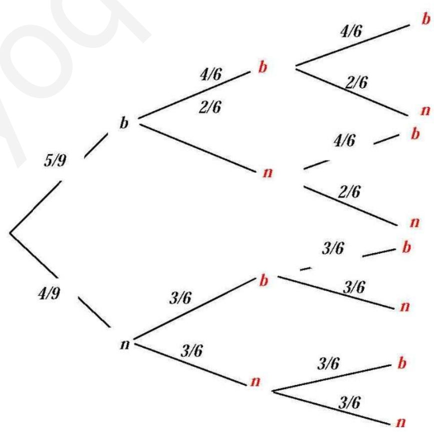
Opción B

Problema 4.16.2 *(2 puntos)* Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) Del mismo color.

b) De distinto color.

Solución:



a) $P(\text{mismo color}) = P(2b) + P(2n) = \dfrac{43}{81}$

$P(2b) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{29}{81}$

$$P(2n) = \frac{5}{9}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{14}{81}$$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

4.16.2. Ordinaria

Opción A

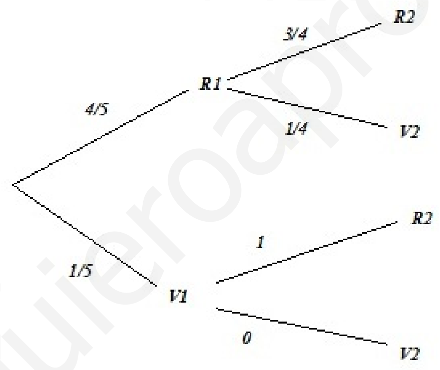
Problema 4.16.3 *(2 puntos)* En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

Solución:

a) Tenemos:



$$P(mismo\ \ color) = P(R1)P(R2|R1) + P(V1)P(V2|V1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{3}{5}$$

b)
$$P(V1|R2) = \frac{P(R2|V1)P(V1)}{P(R2)} = \frac{1\cdot\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Opción B

Problema 4.16.4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A\cap B) = 0,3$; $P(A\cap\overline{B}) = 0,2$; $P(B) = 0,7$. Calcúlense:

a) $P(A\cup B)$:

b) $P(B|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$\begin{cases} P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \\ P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(A\cup B) = P(A\cap \overline{B}) + P(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9$$

b) $P(A) = P(A\cap \overline{B}) + P(A\cap B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B\cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = 0,8$$

ubsectionOrdinaria-Coincidente

Opción A

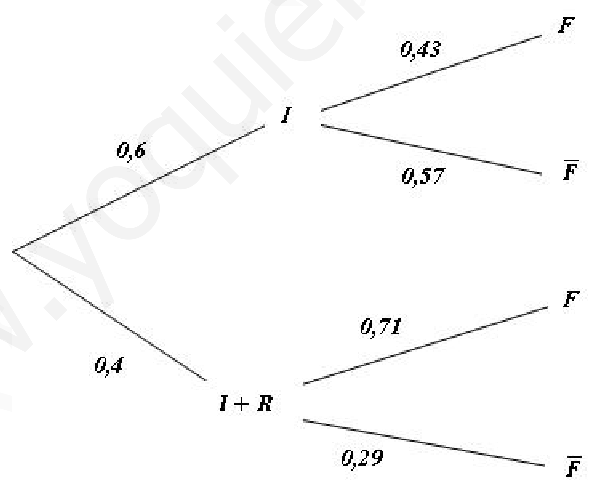
Problema 4.16.5 *(2 puntos)* En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

b) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

Solución:

$P(I) = 0,6$, $\quad P(I + R) = 0,4$



a)

$$P(F) = 0,6\cdot 0,43 + 0,4\cdot 0,71 = 0,542$$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(F|I)}{P(F)} = \frac{0,6\cdot 0,43}{0,542} = 0,476$$

Opción B

Problema 4.16.6 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tal que $P(A) = 0,8$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,8$ y $P(A \cup B) = 0,9$.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) Calcúlese $P(B|\overline{A})$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,8 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,2$
$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,9 + 0,2 - 0,8 = 0,3$
$P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24 \neq P(A \cap B)$, luego no son independientes.

b) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,3 - 0,2}{0,2} = 0,5$

4.16.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.16.7 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tal que: $P(A) = 0,09$; $P(B) = 0,07$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,97$. Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcúlese $P(A \cap B|C)$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,97 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,03$
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,09 \cdot 0,07 = 0,0063 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) $P(A \cap B|C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = 0$ ya que $P(A \cap B) = 0$ por ser incompatibles y, por tanto, $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Opción B

Problema 4.16.8 *(2 puntos)* La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es $3/4$. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Supóngase que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

Solución:
Denominamos A al suceso llega puntual, $\overline{A}$ al no puntual y B utiliza transporte público. Tenemos:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(\overline{A}) = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

a)
$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} \Longrightarrow P(B\cap\overline{A}) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$$

b)
$$P(\text{al menos uno llega temprano}) = 1 - P(\text{todos llegan tarde}) =$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,984375$$

4.16.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.16.9 *(2 puntos)* Todos los estudiantes de una facultad de Madrid afirman haber comido en el último mes en alguna de las dos cafeterías de esa facultad, la grande y la pequeña. Un 60 % declara haber comido en la grande mientras que un 55 % declara haber comido en la pequeña. Calcúlese la probabilidad de que un estudiante de dicha facultad elegido al azar:

a) Haya comido en el último mes en la cafetería grande y en la pequeña.

b) Haya comido en el último mes en la cafetería pequeña si se sabe que nunca ha comido en la grande.

Solución:
G: grande y Pe: pequeña $\Longrightarrow P(G) = 0,6$, $P(Pe) = 0,55$ y $P(G\cup Pe) = 1$

a) $P(G\cup Pe) = 1 = P(G) + P(Pe) - P(G\cap Pe) \Longrightarrow P(G\cap Pe) = 0,6 + 0,55 - 1 = 0,15$

b) $P(Pe|\overline{G}) = \dfrac{P(Pe\cap\overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(Pe) - P(G\cap Pe)}{P(\overline{G})} = \dfrac{0,55-0,15}{0,4} = 1$

Opción B

Problema 4.16.10 *(2 puntos)* En una universidad de Madrid el 65 % del profesorado es funcionario. Por otro lado, el 60 % del profesorado son mujeres de las cuales el 70 % son funcionarias. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado tomado al azar:

a) Sea funcionario y hombre.

b) Sea mujer sabiendo que no es funcionario.

Solución:
Construimos una tabla de contingencia: (la probabilidad de ser mujer y funcionaria es $0,6\cdot 0,7 = 0,42$)

	F	$\overline{F}$	
H			$0,4$
M	$0,42$		$0,6$
	$0,65$	$0,35$	

$\Longrightarrow$

	F	$\overline{F}$	
H	$0,23$	$0,17$	$0,4$
M	$0,42$	$0,18$	$0,6$
	$0,65$	$0,35$	

a) $P(H\cap F) = 0,23$

b) $P(M|\overline{F}) = \dfrac{P(M\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,18}{0,35} = 0,514$

4.17. Año 2016

4.17.1. Modelo

Opción A

Problema 4.17.1 *(2 puntos)* En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que proceden de la fábrica C.

a) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

Solución:

a) Casos favorables: $1800 + 2400 + 3000 = 7200$ y casos posibles 30000. Por la ley de Laplace:

$$p = \frac{7200}{30000} = \frac{6}{25}$$

b) Casos favorables: 1800 y casos posibles 7200. Por la ley de Laplace:

$$p = \frac{1800}{7200} = \frac{1}{4}$$

Opción B

Problema 4.17.2 *(2 puntos)* Las probabilidades de que cinco jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de 0,8; 0,9; 0,7; 0,9; 0,93. Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:

a) Todos los jugadores encesten su tiro libre.

b) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste.

Solución:

a) $p = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,9 \cdot 0,93 = 0,4218$

b) La probabilidad de que no enceste ninguno de los tres primero es $0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,006$ la probabilidad que nos piden será $1 - 0,006 = 0,994$

4.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.17.3 *(2 puntos)* Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Solución:

$$P(H) = 0,55,\ \ P(M) = 0,45,\ \ P(C) = 0,3,\ \ P(C|M) = 0,25$$

a)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M)P(M)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot 0,45}{0,30} = 0,375$$

b)

$$P(H \cap C) + P(M \cap C) = P(C) \Longrightarrow P(H \cap C) = P(C) - P(M \cap C) =$$

$$P(C) - P(C|M)P(M) = 0,3 - 0,25 \cdot 0,45 = 0,1875$$

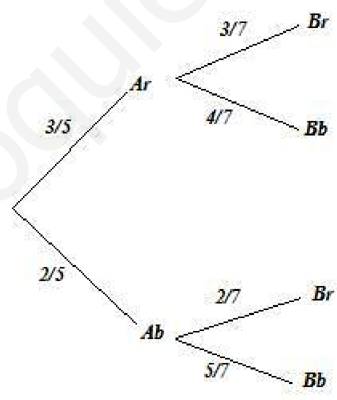
Opción B

Problema 4.17.4 *(2 puntos)* Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

Solución:



a)

$$P(Br) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0,371$$

b)

$$P(Ab \cap Bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7} = 0,286$$

4.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.17.5 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,5$ y $P(\overline{B}) = 0,8$. Calcúlese:

a) $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.
Solución:

$$P(A) = 0,5, \quad P(B) = 0,2$$

a) Como A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} = \frac{1 - 0,6}{0,8} = 0,5$$

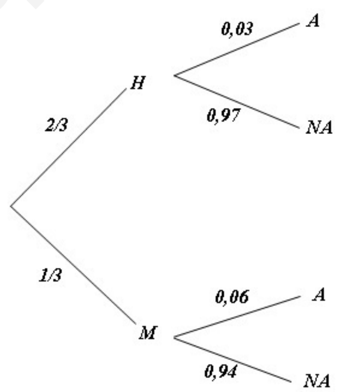
Opción B

Problema 4.17.6 *(2 puntos)* En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:

a) Padezca albinismo.

b) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.

Solución:



$H \equiv$ Hembra, $M \equiv$ Macho.

$$P(H) = \frac{2}{3}, \quad P(M) = \frac{1}{3}, \quad P(A|M) = 0,06, \quad P(A|H) = 0,03$$

a)
$$P(A) = P(A|H)\cdot P(H) + P(A|M)\cdot P(M) = \frac{2}{3}\cdot 0,03 + \frac{1}{3}\cdot 0,06 = 0,04$$

b)
$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \frac{0,03\cdot 2/3}{0,04} = 0,5$$

4.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.17.7 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 3/4$, $P(A|B) = 3/4$ y $P(B|A) = 1/4$.

a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) Calcúlese $P(\overline{A}|\overline{B})$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a)
$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B\cap A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$$

$P(A)\cdot P(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16} = P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes. Como $P(A\cap B) \neq 0 \Longrightarrow A$ y B son compatibles.

b)
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)} =$$
$$\frac{1-(P(A)+P(B)-P(A\cup B))}{1-P(B)} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

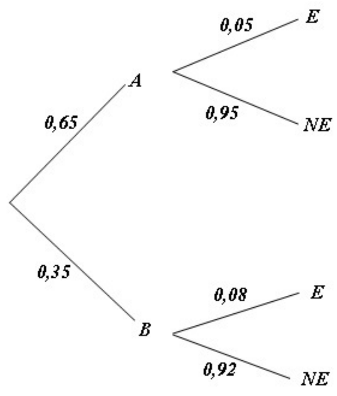
Opción B

Problema 4.17.8 *(2 puntos)* Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:



a)
$$P(E) = 0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0605$$

b)
$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0{,}05 \cdot 0,65}{0,0605} = 0,5372$$

4.18. Año 2017

4.18.1. Ordinaria

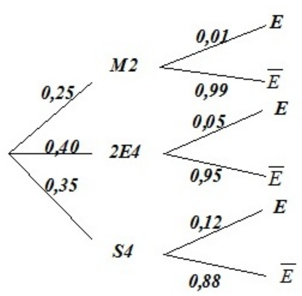
Opción A

Problema 4.18.1 *(2 puntos)* Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0,05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0,12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución:



a) $P(E) = P(M2)P(E|M2) + P(2E4)P(E|2E4) + P(S4)P(E|S4) = 0,25 \cdot 0,01 + 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 = 0,0645$

b) $P(S4|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|S4)P(S4)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,35 \cdot 0,88}{1 - 0,0645} = 0,329$

Opción B

Problema 4.18.2 *(2 puntos)* El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0,20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Solución:
J: joven y L: lee el periódico.
$P(J) = 0,3$, $P(\overline{J}) = 0,7$, $P(L|J) = 0,2$ y $P(\overline{J}|L) = 0,9$

a) $P(L|J) = \dfrac{P(L \cap J)}{P(J)} \Longrightarrow P(L \cap J) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

$$P(\overline{J}|L) = \frac{P(\overline{J} \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - P(J \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - 0,06}{P(L)} = 0,9$$

$$\Longrightarrow P(L) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{L}) = 0,4$$

b) $P(\overline{L} \cup \overline{J}) = P(\overline{L \cap J}) = 1 - P(L \cap J) = 1 - 0,06 = 0,94$

4.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.18.3 *(2 puntos)* El profesorado de cierta Facultad de Cc. Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad de Cc. Económicas y Empresariales elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

b) Sea de Economía y sea mujer.

Solución:

$$P(Ec) = 0,6, \;\; P(Em) = 0,4, \;\; P(M) = 0,55, \;\; P(H) = 0,45$$

$$P(Em|M) = 0,52, \;\; P(Ec|M) = 0,48$$

a) $P(M|Em) = \dfrac{P(Em|M) \cdot P(M)}{P(Em)} = \dfrac{0,52 \cdot 0,55}{0,4} = 0,715$

b) $P(Ec \cap M) = P(Ec|M) \cdot P(M) = 0,48 \cdot 0,55 = 0,264$

Opción B

Problema 4.18.4 *(2 puntos)* Una máquina tiene dos chips de control A y B. Se sabe que al encender la máquina la probabilidad de que falle el chip A es de 0,2, la probabilidad de que falle el B es de 0,3 y la probabilidad de que fallen los dos es de 0,015. Calcúlese la probabilidad de que al encender la máquina:

a) Haya fallado el chip A si se sabe que ha fallado el B.

b) No falle ninguno de los dos chips.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.
Solución:

$$P(A) = 0,2, \quad P(B) = 0,3, \quad P(A \cap B) = 0,015$$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,015}{0,3} = 0,05$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$$1 - (0,2 + 0,3 - 0,015) = 0,515$$

4.18.3. Extraordinaria

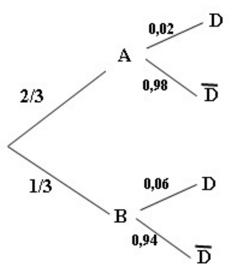
Opción A

Problema 4.18.5 *(2 puntos)* Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0,02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0,06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

a) No salga defectuoso.

b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

Solución:



a) $P(\overline{D}) = P(A)P(\overline{D}|A) + P(B)P(\overline{D}|B) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,98 + \dfrac{1}{3} \cdot 0,94 = 0,967$

b) $P(A|D) = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0,02 \cdot 2/3}{1 - 0,967} = 0,404$

Opción B

Problema 4.18.6 *(2 puntos)* La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0'6, por sulfatos es 0,4, y por ambos es 0,2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

Solución:
N: contaminado con nitratos y S: contaminado con sulfatos.
$P(N) = 0,6$, $P(S) = 0,4$, $P(N \cap S) = 0,2$, $P(\overline{N}) = 0,4$ y $P(\overline{S}) = 0,6$

a) $P(\overline{N}|S) = \dfrac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = 0,5$

b) $P(\overline{N} \cap \overline{S}) = P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - (P(N) + P(S) - P(N \cap S)) = 1 - (0,6 + 0,4 - 0,2) = 0,2$

4.18.4. Extraordinaria-Coincidente

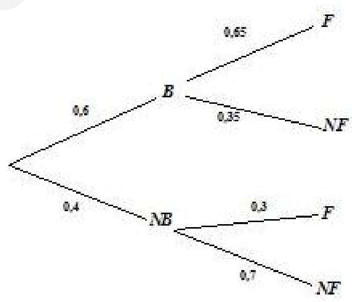
Opción A

Problema 4.18.7 *(2 puntos)* En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) Reciba clases de flamenco.

b) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

Solución: B: reciben clases de ballet y F: reciben clases de flamenco.



a) $P(F) = P(F|B)P(B) + P(F|NB)P(NB) = 0,65 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,51$

b) $P(B|NF) = \dfrac{P(NF|B)P(B)}{P(NF)} = \dfrac{0,35 \cdot 0,6}{1 - 0,51} = 0,429$

Opción B

Problema 4.18.8 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos tal que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = 0,375$ y $P(B \cap A) = 0,3$. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Ocurra B.

b) Ocurra B pero no A

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,3}{0,375} = 0,8$

b) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,375 = 0,425$

4.19. Año 2018

4.19.1. Modelo

Opción A

Problema 4.19.1 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A) = 0,4; \quad P(B) = 0,5; \quad P(A|B) = 0,7$$

Calcúlese:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A}|B)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,35 = 0,55$

b) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,5 - 0,35}{0,5} = 0,3$

Opción B

Problema 4.19.2 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tal que:

$$P(A) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(A \cup B) = 0,9$$

Calcúlese:

a) $P(\overline{A}|B)$

b) $P(A|\overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario de* S.
Solución:

a) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{B} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,8 - 0,2}{0,8} = 0,75$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,8 - 0,9 = 0,2$$

b) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{\overline{B}} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,3 - 0,2}{1 - 0,8} = 0,5$

4.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.19.3 *(2 puntos)* En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.

b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Solución:
T : buscan billete de transporte y H : buscan billete de hotel, $P(T) = 0,75$, $P(H) = 0,8$ y $P(T \cap H) = 0,65$

a) $P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0,75 + 0,8 - 0,65 = 0,9$

b) $P(T|H) = \dfrac{P(T \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,65}{0,8} = 0,8125$

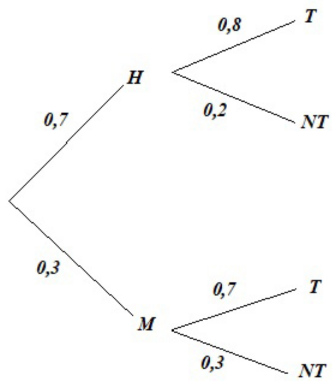
Opción B

Problema 4.19.4 *(2 puntos)* En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0,8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

a) Una persona que trabaja.

b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Solución:



a) $P(T) = P(T|H)P(H) + P(T|M)P(M) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,77$

b) $P(H|T) = \dfrac{P(T|H)P(H)}{P(T)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,7}{0,77} = 0,727$

4.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 4.19.5 *(2 puntos)* Se toma un coche al azar de la Comunidad de Madrid. Se sabe que la probabilidad de que tenga motor diésel es 0,4. La probabilidad de que tenga más de 8 años es 0,5. Finalmente, se sabe que la probabilidad de que tenga más de ocho años o motor diésel es 0,55. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Tenga motor diésel sabiendo que tiene más de ocho años.

b) No tenga motor diésel ni tenga más de ocho años.

Solución:
D : motor diésel y $M8$: tenga más de 8 años, $P(D) = 0,4$, $P(M8) = 0,5$ y $P(D \cup M8) = 0,55$

a) $P(D|M8) = \dfrac{P(D \cap M8)}{P(M8)} = \dfrac{P(D) + P(M8) - P(D \cup M8)}{P(M8)} = \dfrac{0,4 + 0,5 - 0,55}{0,5} = 0,7.$

b) $P(\overline{D} \cap \overline{M8}) = P(\overline{D \cup M8}) = 1 - P(D \cup M8) = 1 - 0,55 = 0,45$

Opción B

Problema 4.19.6 *(2 puntos)* Entre los músicos que ensayan en un determinado local de Madrid, un 30 % sabe tocar la batería, un 80 % sabe tocar la guitarra y un 20 % sabe tocar tanto la batería como la guitarra. Se elige uno de esos músicos al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

a) No sepa tocar la batería si se conoce que sabe tocar la guitarra.

b) Conocido que no sabe tocar la guitarra, no sepa tocar la batería.

Solución:
B: sabe tocar la batería, G: sabe tocar la guitarra.
$P(B) = 0,3$, $P(G) = 0,8$ y $P(B \cap G) = 0,2$

a) $P(\overline{B}|G) = \dfrac{P(\overline{B}\cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(G) - P(B\cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,8-0,2}{0,8} = 0,75$

b) $P(\overline{B}|\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{B}\cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(\overline{B\cup G})}{1-P(G)} = \dfrac{1-P(B\cup G)}{1-0,8} = \dfrac{1-(P(B)+P(G)-P(B\cap G))}{0,2} = \dfrac{1-(0,3+0,8-0,2)}{0,2} = 0,5$

4.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.19.7 *(2 puntos)* Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

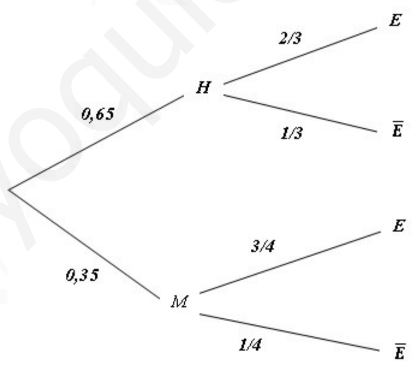
a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

Solución:
H : Hombre, M : Mujer, E : Entrena y $\overline{E}$: no entrena.

a) $P(E \text{ alguno}) = P(E|H)\cdot P(\overline{E}|M) + P(\overline{E}|H)\cdot P(E|M) + P(E|H)\cdot P(E|M) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{12} = 0,917$

b) $P(H|E) = \dfrac{P(H\cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,65\cdot 2/3}{0,65\cdot 2/3 + 0,35\cdot 3/4} = 0,62275$



Opción B

Problema 4.19.8 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ y $P(A\cup B) = 0,8$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A}\cap B)$.

b) $P(\overline{A\cup B}|A)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,8 = 0,2$
$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$

b) $P(\overline{A\cup B}|A) = \dfrac{P(\overline{A\cup B}\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\phi)}{P(A)} = 0$

4.20. Año 2019

4.20.1. Modelo

Opción A

Problema 4.20.1 *(2 puntos)* En una determinada sede de la $EVAU$ hay un 45 % de alumnos de la modalidad de ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II ($MACCSSII$). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen de $MACCSSII$. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de $MACCSSII$. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

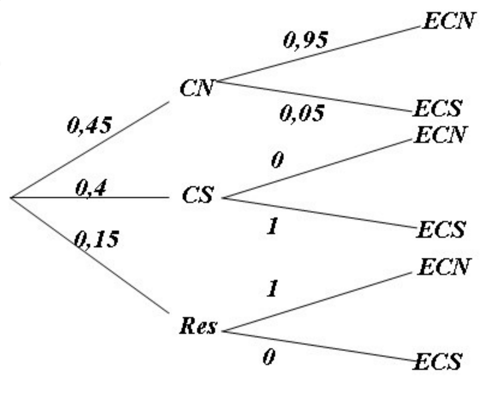
a) Se examine de $MACCSSII$.

b) Sabiendo que se examina de $MACCSS$ sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

Solución:

a) $P(ECS) = P(ECS|CN)P(CN) + P(ECS|CS)P(CS) + P(ECS|Res)P(Res) = 0,45\cdot 0,05 + 0,4\cdot 1 + 0,15\cdot 0 = 0,4225$

b) $P(CN|ECS) = \dfrac{P(ECS|CN)P(CN)}{P(ECS)} = \dfrac{0,05\cdot 0,45}{0,4225} = 0,053$



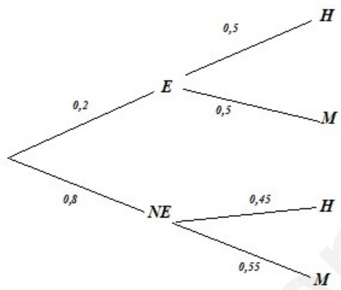
Opción B

Problema 4.20.2 *(2 puntos)* Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0,2. La probabilidad de que siendo extranjero sea hombre es 0,45. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es 0,1. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Conocido que es español, sea un hombre.

b) Sea una mujer.

Solución:



a) $P(M|E) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2} = 0,5 \Longrightarrow P(H|E) = 1 - P(M|E) = 0,5$

b) $P(M) = P(M|E) \cdot P(E) + P(M|NE) \cdot P(NE) = 0,5 \cdot 0,2 + 0,55 \cdot 0,8 = 0,54$

4.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 4.20.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución:
Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B			$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$		
Totales	$0,6$		1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,5$	$0,3$	$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$	$0,1$	$0,2$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

$$\left\{\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B}) = 0,1 \\ P(A) = 0,6 \\ P(\overline{B}) = 0,2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B}) = 0,1 \\ P(A)\cdot P(\overline{B}) = 0,6\cdot 0,2 = 0,12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$P(A\cap\overline{B}) \neq P(A)\cdot P(\overline{B}) \Longrightarrow$ A y $\overline{B}$ no son independientes.

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$

Opción B

Problema 4.20.4 *(2 puntos)* De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0,60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0,30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0,15. Seleccionado un niño al azar de esta región.

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución:

Sea V el suceso juega con consola de videojuegos más tiempo del recomendado y F el suceso fracaso escolar.
$P(V) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{V}) = 0,4$, $P(F|V) = 0,30$ y $P(F|\overline{V}) = 0,15$

$$P(F|V) = 0,30 = \frac{P(F\cap V)}{P(V)} \Longrightarrow P(F\cap V) = 0,30\cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(F|\overline{V}) = 0,15 = \frac{P(F\cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \Longrightarrow P(F\cap \overline{V}) = 0,15\cdot 0,4 = 0,06$$

Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	$0,18$	$0,06$	
$\overline{F}$			
Totales	$0,6$	$0,4$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	$0,18$	$0,06$	$0,24$
$\overline{F}$	$0,42$	$0,34$	$0,76$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(F) = 0,24$

b) $P(\overline{V}|F) = \dfrac{P(\overline{V}\cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,06}{0,24} = 0,25$

4.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

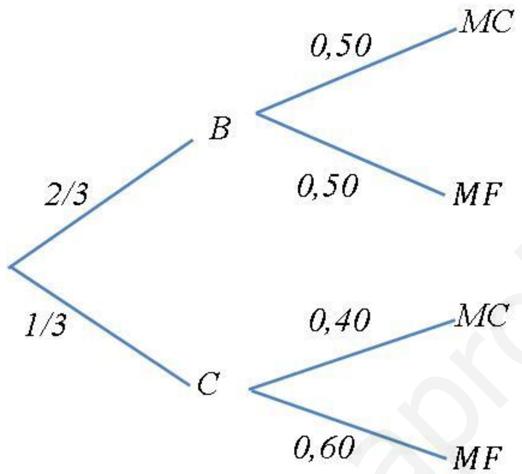
Problema 4.20.5 *(2 puntos)* En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0,6. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:

a) Esté elaborado con masa fresca.

b) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

Solución:

Sea B pan blanco, C pan de cereales, MC masa congelada y MF masa fresca.



a) $P(MF) = P(MF|B)P(B) + P(MF|C)P(C) = \dfrac{2}{3}\cdot 0,5 + \dfrac{1}{3}\cdot 0,6 = 0,5\widehat{3}$

b) $P(C|MC) = \dfrac{P(MC|C)P(C)}{P(MC)} = \dfrac{0,4\cdot\frac{1}{3}}{1-0,5\widehat{3}} = 0,2857$

Opción B

Problema 4.20.6 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tal que: $P(A|B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B|A) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A) = \dfrac{2}{3}$
Calcúlese:

a) $P(\overline{B}\cup\overline{A})$

b) $P(\overline{A}\cap B)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{B}\cup\overline{A}) = P(\overline{B\cap A}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - (P(B|A)P(A)) =$

$1 - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9},\quad \left(P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{9}\right)$

b) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)}$

$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)} - P(A\cap B) = \dfrac{1/9}{1/4} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$

4.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.20.7 *(2 puntos)* Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:
E : hace ejercicio, $\overline{E}$: no hace ejercicio, D : desayuna y $\overline{D}$: no desayuna.
$P(E) = \dfrac{2}{5}$, $P(\overline{E}) = \dfrac{3}{5}$, $P(D) = \dfrac{2}{3}$, $P(\overline{D}) = \dfrac{1}{3}$ y $P(E|D) = \dfrac{9}{25} = \dfrac{P(E \cap D)}{P(D)} \Longrightarrow P(E \cap D) = \dfrac{9}{25} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{25}$

Ponemos los datos en una tabla:

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25		2/3
$\overline{D}$			1/3
Totales	2/5	3/5	1

$\Longrightarrow$

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25	32/75	2/3
$\overline{D}$	4/25	13/75	1/3
Totales	2/5	3/5	1

a) $\begin{cases} P(E \cap D) = 6/25 \\ P(E) = 2/5 \\ P(D) = 2/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(E \cap D) = 6/25 \\ \\ P(E) \cdot P(D) = 2/5 \cdot 2/3 = 4/15 \end{cases} \Longrightarrow$
$P(E \cap D) \neq P(E) \cdot P(D) \Longrightarrow$ E y D no son independientes.

b) $P(\overline{E}|\overline{D}) = \dfrac{13}{75}$

Opción B

Problema 4.20.8 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,3$, $P(B|A) = 0,4$, $P(B|\overline{A}) = 0,6$. Calcúlese:

a) $P(A|B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:
Tenemos $P(A) = 0,3$ y $P(\overline{A}) = 0,7$, además:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Ponemos los datos en una tabla:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	
$\overline{B}$			
Totales	$0,3$	$0,7$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	$0,54$
$\overline{B}$	$0,18$	$0,28$	$0,46$
Totales	$0,3$	$0,7$	1

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,54} = 0,222$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,28}{0,46} = 0,61$$

4.20.5. Extraordinaria-Coincidente

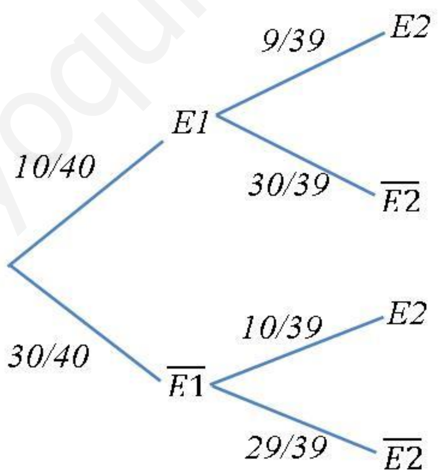
Opción A

Problema 4.20.9 *(2 puntos)* Una única carta, escogida al azar, es eliminada, sin ser vista, de una baraja española de 40 cartas, 10 cartas de cada palo (espadas, copas, oros y bastos). Una vez eliminada, se escoge al azar otra carta, entre las que quedan en el mazo, y se observa.

a) Calcúlese la probabilidad de que la carta observada sea del palo de espadas.

b) Si la carta observada no es del palo de espadas, calcúlese la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución:
$E1$: la primera carta es espadas, $\overline{E1}$: la primera carta no es espadas, $E2$: la segunda carta es espadas y $\overline{E2}$: la segunda carta no es espadas.



a) $P(E2) = P(E2|E1)P(E1) + P(E2|E2)P(E2) = \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{40} + \frac{10}{39} \cdot \frac{30}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$

b) $P(\overline{E1}|\overline{E2}) = \frac{P(\overline{E2}|\overline{E1})P(\overline{E1})}{P(\overline{E2})} = \frac{29/39 \cdot 30/40}{1 - 1/4} = \frac{29}{39} = 0,744$

Opción B

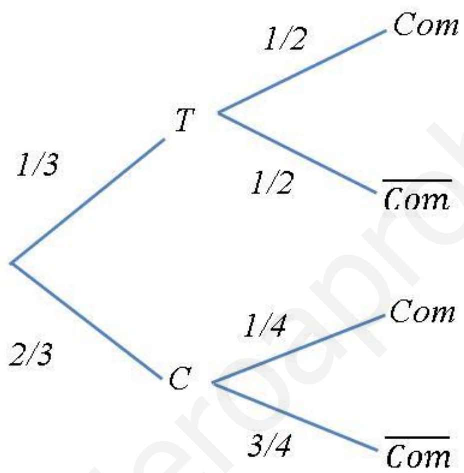
Problema 4.20.10 *(2 puntos)* Se lanza un dado para decidir si se va al cine o al teatro. Si sale 1 o 6 se va al teatro, en caso contrario se va al cine. Luego, se escoge una función al azar, de cine o teatro, según lo que haya indicado el dado. El 50 % de funciones de teatro son comedias mientras que sólo 112 de las 448 funciones de cine lo son.

a) Calcúlese la probabilidad de ver una comedia.

b) Si el resultado fue no ver comedia, calcúlese la probabilidad de que haya sido en el teatro.

Solución:

T: teatro, C: cine, Com: comedia y $\overline{Com}$: no comedia.



a) $P(Com) = P(Com|T)P(T) + P(Com|C)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

b) $P(T|\overline{Com}) = \frac{P(\overline{Com}|T)P(T)}{P(\overline{Com})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

4.21. Año 2020

4.21.1. Modelo

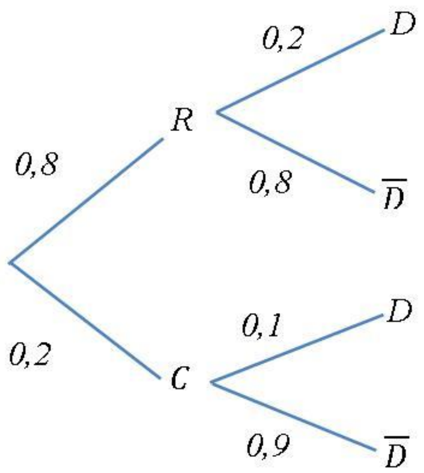
Opción A

Problema 4.21.1 *(2 puntos)* En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que sólo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

a) Sea una prenda de ropa y sea devuelta.

b) Sea devuelta.

Solución:



a) $P(R\cap D) = P(D|R)P(R) = 0,2\cdot 0,8 = 0,16$

b) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|C)P(C) = 0,2\cdot 0,8 + 0,1\cdot 0,2 = 0,18$

Opción B

Problema 4.21.2 *(2 puntos)* Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.

a) Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.

b) Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

Solución:
Sea X el número de cruces y sea Y el número que ha salido en el dado. $P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = P(Y=4) = P(Y=5) = P(Y=6) = \frac{1}{6}$

a)
$$P(X=0|Y=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}$$
$$P(X=0|Y=2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$P(X=0|Y=3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$P(X=0|Y=4) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$P(X=0|Y=5) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$P(X=0|Y=6) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=0)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)=$$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6-1}{\frac{1}{2}-1}\right]=\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]=0,164$$

b) $P(Y=2|X=0)=\dfrac{P(X=0|Y=2)}{P(X=0)}=\dfrac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}=\dfrac{0,04167}{0,164}=0,2541$

4.21.2. Ordinaria

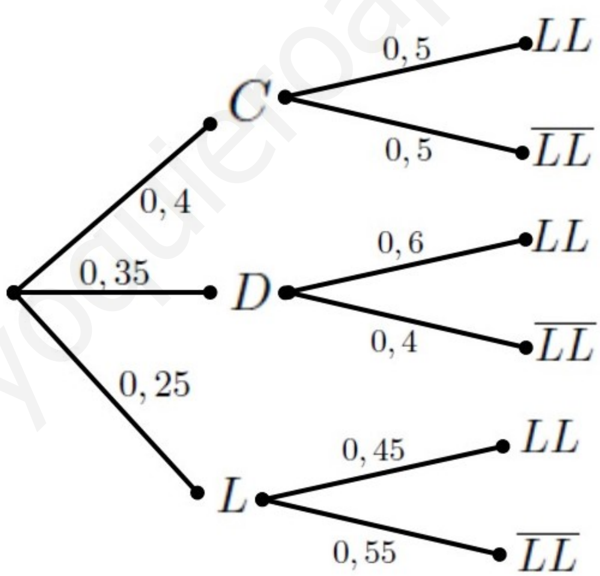
Opción A

Problema 4.21.3 *(2 puntos)* Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:



Sea C ir al río Cuervo, D ir a las Hoces del Duratón, L ir al Cañón del rio Lobo, LL llueve y $\overline{LL}$ no llueve.

a) $P(\overline{LL})=P(\overline{LL}|C)P(C)+P(\overline{LL}|D)P(D)+P(\overline{LL}|L)P(L)=0,5\cdot 0,4+0,4\cdot 0,35+0,55\cdot 0,25=0,4775$

b) $P(C|LL)=\dfrac{P(LL|C)P(C)}{P(LL)}=\dfrac{0,5\cdot 0,4}{1-0,4775}=0,38277$

Opción B

Problema 4.21.4 *(2 puntos)* Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:
Sean los sucesos M se estropea el microondas, H se estropea el horno y F conserva la factura. $P(M) = 0,02$, $P(H) = 0,05$. Como M y H son independientes $P(M \cap H) = P(M)P(H) = 0,02 \cdot 0,05 = 0,001$. También tenemos $P(\overline{F}|M) = 0,4$.

a) $P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$.

b) $P(\overline{F}|M) = \dfrac{P(\overline{F} \cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(\overline{F} \cap M) = P(M) \cdot P(\overline{F}|M) = 0,02 \cdot 0,4 = 0,008$.
$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) \Longrightarrow P(F \cap M) = P(M) - P(\overline{F} \cap M) = 0,02 - 0,008 = 0,012$.

4.21.3. Ordinaria-Coincidente

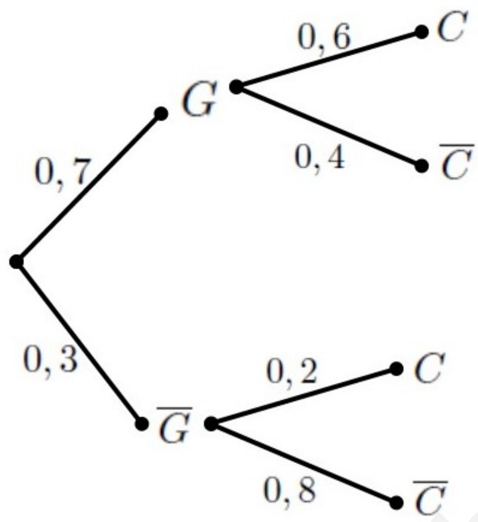
Opción A

Problema 4.21.5 *(2 puntos)* En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) El espectáculo sea gratuito y no se realice en la calle.

b) El espectáculo se realice en la calle.

Solución:
G : espectáculos gratuitos, $\overline{G}$: espectáculos de pago, C : espectáculos en las calles y $\overline{C}$: espectáculos en interiores.



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(\overline{C}|G)P(G) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

b) $P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\overline{G})P(\overline{G}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,48$

Opción B

Problema 4.21.6 *(2 puntos)* En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40 % de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90 % de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8 % del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

a) Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.

b) Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

Solución:
Pe: periódico, R: revista, C: castellano y $\overline{C}$: otra lengua.

	Pe	R	Total
C			0, 9
$\overline{C}$		0, 08	
Total	0, 4		1

$\Longrightarrow$

	Pe	R	Total
C	0, 38	0, 52	0, 9
$\overline{C}$	0, 02	0, 08	0, 1
Total	0, 4	0, 6	1

a) $P(Pe|\overline{C}) = \dfrac{P(Pe \cap \overline{C})}{\overline{C}} = \dfrac{0,02}{0,1} = 0,2$

b) $P(Pe \cup \overline{C}) = P(Pe) + P(\overline{C}) - P(Pe \cap \overline{C}) = 0,4 + 0,1 - 0,02 = 0,48$

4.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.21.7 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tal que: $P(A|B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A) = \dfrac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \overline{B})$.

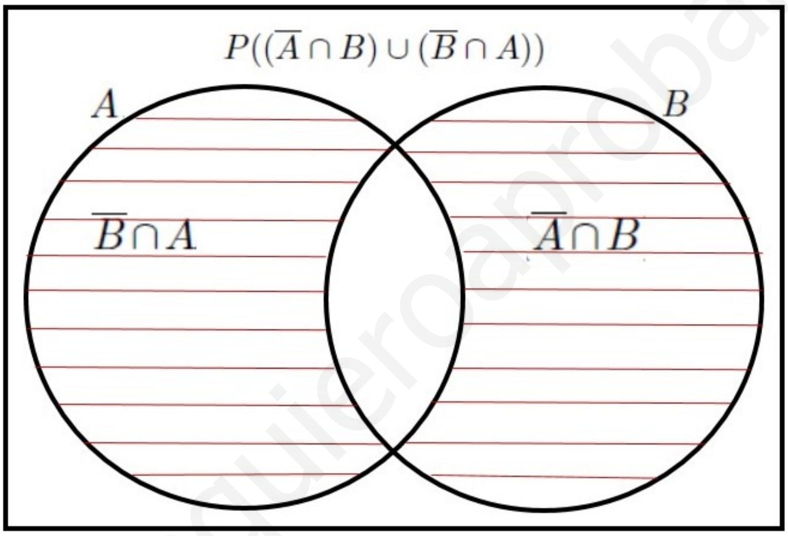
b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$.
$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = P(A) + (1 - P(B)) - (P(A) - P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{8}$.

b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A)) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{B} \cap A) - P((\overline{A} \cap B) \cap (\overline{B} \cap A)) = P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) - P(\phi) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} - 2 \cdot \dfrac{1}{24} = \dfrac{3}{4}$.



Opción B

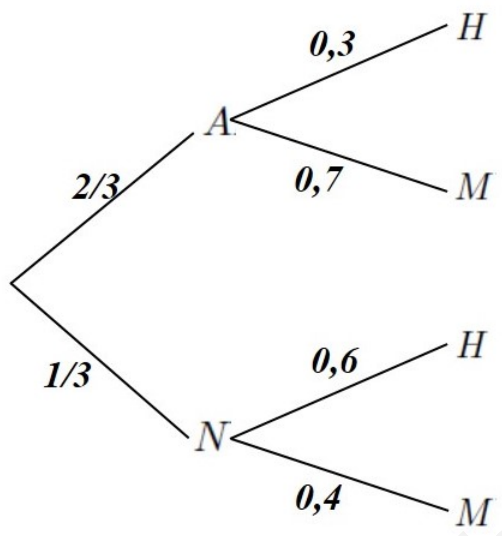
Problema 4.21.8 *(2 puntos)* En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.

b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Solución:

A: azul, N: negro, H: alumno y M: alumna.
$P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(N) = \dfrac{1}{3}$, $(M|A) = 0,7$ y $P(N \cap H) = 0,2$
$P(N \cap H) = 0,2 \Longrightarrow P(H|N) = \dfrac{P(N \cap H)}{P(N)} = \dfrac{0,2}{1/3} = 0,6$



a) $P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|N)P(N) = 0,3 \cdot \dfrac{2}{3} + 0,6 \cdot \dfrac{1}{3} = 0,4$

b) $P(H|N) = \dfrac{P(N \cap H)}{P(N)} = \dfrac{0,2}{\frac{1}{3}} = 0,6$

4.22. Año 2021

4.22.1. Modelo

Opción A

Problema 4.22.1 *(2 puntos)* En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

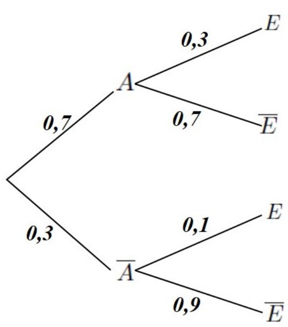
a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Solución:
A : proximidad, $\overline{A}$: no proximidad, E : ecológica y $\overline{E}$: no ecológica.

a) $P(\overline{E}) = P(\overline{E}|A)P(A) + P(\overline{E}|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,76$

b) $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = P(A) + (1 - P(\overline{E})) - P(E|A)P(A) = 0,7 + 1 - 0,76 - 0,3 \cdot 0,7 = 0,73$



Opción B

Problema 4.22.2 *(2 puntos)* Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tal que $P(C) = 0,4$, $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,8$. Calcule:

a) $P(C|D)$.

b) $P(\overline{C \cap D}|C)$.

Solución:

a) $P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(C) + P(D) - P(C \cup D)}{P(D)} = \dfrac{0,4 + 0,6 - 0,8}{0,6} = \dfrac{1}{3} = 0,333$

b) $P(\overline{C \cap D}|C) = \dfrac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

4.22.2. Ordinaria

Opción A

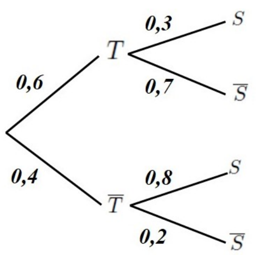
Problema 4.22.3 *(2 puntos)* El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.

b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Solución:

T : teletrabaja, $\overline{T}$: no teletrabaja, S : trastorno de sueño y $\overline{S}$: sin trastorno de sueño.



a) $P(T \cap \overline{S}) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$

b) $P(\overline{T}|\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{S}|\overline{T})P(\overline{T})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,4}{0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,2} = \dfrac{4}{25} = 0,16$

Opción B

Problema 4.22.4 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B|\overline{A})$.

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = 0,4 \Longrightarrow P(\overline{B}\cap A) = 0,5\cdot 0,4 = 0,2$
$P(\overline{B}\cap A) = P(A) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,5 - 0,2 = 0,3$
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,5 + P(B) - 0,3 \Longrightarrow P(B) = 0,7$
$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)} = \frac{0,7-0,3}{1-0,5} = 0,8$

b) $P(A)\cdot P(B) = 0,5\cdot 0,7 = 0,35 \neq P(A\cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

4.22.3. Ordinaria-Coincidente

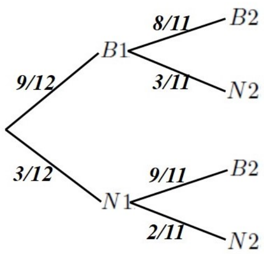
Opción A

Problema 4.22.5 *(2 puntos)* Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

a) La segunda bola seleccionada sea negra.

b) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

Solución:
Sean $B1$: la primera es blanca, $N1$: la primera es negra, $B2$: la segunda es blanca y $N2$: la segunda es negra.



a) $P(N2) = P(N2|B1)P(B1) + P(N2|N1)P(N1) = \frac{3}{11}\cdot\frac{9}{12} + \frac{2}{11}\cdot\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$

b) $P(N1|N2) = \frac{P(N2|N1)P(N1)}{P(N2)} = \frac{\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{11} = 0,182$

Opción B

Problema 4.22.6 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A|\overline{B}) = \frac{4}{5}$.

a) Calcule $P(A\cap\overline{B})$.

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \Longrightarrow P(A\cap\overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = \frac{4}{5}((1-\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$

b) $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap\overline{B}) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$, luego los sucesos son incompatibles.

4.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 4.22.7 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,1$
$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,2 - 0,1) = 0,4$
$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$

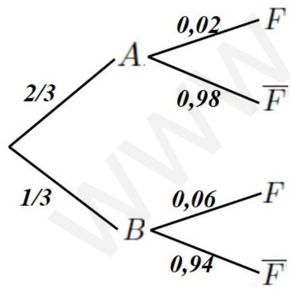
Opción B

Problema 4.22.8 *(2 puntos)* Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.

b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Solución:
Sean A: alumno matriculado residente en el municipio A, B: alumno matriculado residente en el municipio B, F: alumno con fracaso escolar y $\overline{F}$: alumno sin fracaso escolar.



a) $P(\overline{F}) = P(\overline{F}|A)P(A) + P(\overline{F}|B)P(B) = 0,98 \cdot \frac{2}{3} + 0,94 \cdot \frac{1}{3} = 0,9667$

b) $P(A|F) = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{0,02 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0,9667} = 0,4004$

4.23. Año 2022

4.23.1. Modelo

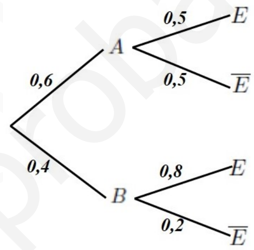
Opción A

Problema 4.23.1 *(2 puntos)* Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60 % de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40 % restante del segundo. El 50 % de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80 % para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

Solución:
Sean A primer restaurante, B segundo restaurante, E ecológica y $\overline{E}$ no ecológica.



a) $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) =$
$0,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 = 0,62$

b) $P(B|\overline{E}) = \frac{P(\overline{E}|B)P(B)}{P(\overline{E})} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{1-0,62} = 0,2105$

Opción B

Problema 4.23.2 *(2 puntos)* Entre los deportistas profesionales, el 50 % disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30 % está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10 % de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.

b) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

Solución:
Sean B disfruta de beca y E estudia cursos superiores.
$P(B) = 0,5$, $P(E) = 0,3$ y $P(B \cap E) = 0,1$

a) $P(B \cup E) = P(B) + P(E) - P(B \cap E) = 0,5 + 0,3 - 0,1 = 0,7$

b) $P(\overline{B}|\overline{E}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{B \cup E})}{1-P(E)} = \frac{1-P(B \cup E)}{1-P(E)} = \frac{1-0,7}{1-0,3} = 0,4286$