Capítulo 2

Programación

2.1. Año 2000

2.1.1. Modelo

Opción B

Problema 2.1.1 *(3 puntos)* Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Exprésese la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represéntese gráficamente el recinto definido.

c) Obténgase el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

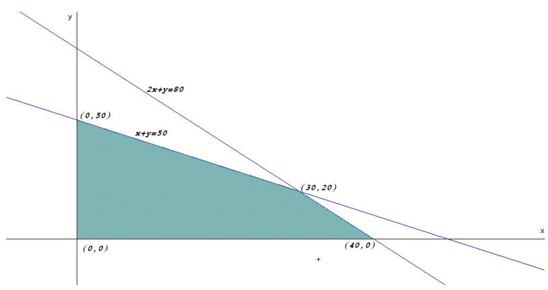
Solución:

a) Llamamos x al nº de collares e y al nº de pulseras. Las restricciones son:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right.$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 5x + 4y$.

b) El recinto será el siguiente:



c) Los vértices son: $(0, 50)$, $(30, 20)$ y $(40, 0)$

$$\begin{array}{l} z(0,50) = 200 \\ z(30,20) = 230 \\ z(40,0) = 200 \end{array}$$

El artesano tiene que fabricar 30 collares y 20 pulseras para obtener el máximo beneficio, que asciende a 230 euros.

2.1.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.1.2 *(3 puntos)* Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.

Cada mesa requiere dos horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula los vértices de la misma.

c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

d) Resuelve el problema

Solución:

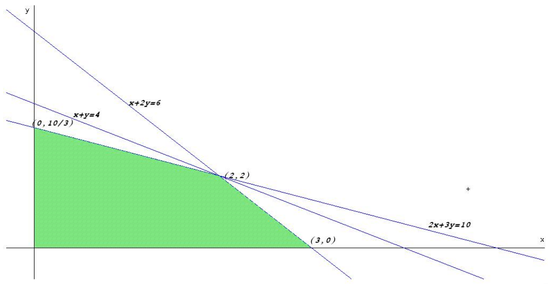
a) Llamamos x al nº de mesas e y al nº de sillas. Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 20x + 30y - 4x - 2y$.

Los vértices son: $(0, 10/3)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$:

b) El dibujo es el siguiente:



c) El punto $(1,1)$ está dentro de la región factible, por lo que si es posible que un operario fabrique una silla y una mesa en un día, pero no es en este punto en el que se obtendría un máximo beneficio y, por tanto, no será del interés de la empresa.

d)
$$\begin{aligned} &z(0,10/3) = 100 \\ &z(2,2) = 100 \\ &z(3,0) = 60 \end{aligned}$$

Como el número de sillas y mesas producidas tiene que ser un número entero la solución sería dos sillas y dos mesas.

2.1.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.1.3 *(3 puntos)*.Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 Kilocalorías por cada 100 g de ingrediente, mientras que el B contiene 15 g de grasas y 100 Kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 1,5 euros por cada 100 g. del ingrediente A y de 1 euros por cada 100 g del ingrediente B.

El menú a diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y al menos 110 Kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada ingrediente a emplear en el menú de manera que su coste sea lo más reducido posible.

a) Indíquese la expresión de las restricciones y la función objetivo.

b) Represéntese gráficamente la región delimitada por las restricciones.

c) Calcúlese el porcentaje óptimo de cada ingrediente a incluir en el menú.

Solución:

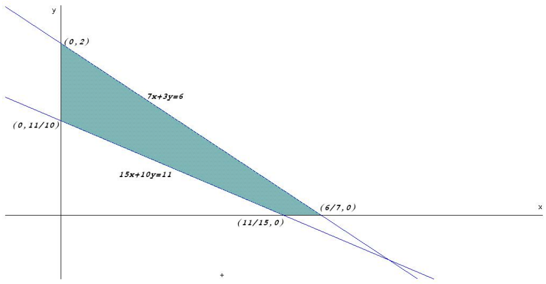
a) Llamamos x a la cantidad de A e y a la cantidad de B. Hacemos la siguiente tabla

	Grasas	Kcal	Coste
A	35	150	$1,5$
B	15	100	2
	≤ 30	≥ 110	

$$\Longrightarrow \begin{cases} 35x + 15y \leq 30 \\ 150x + 100y \geq 110 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 3y \leq 6 \\ 15x + 10y \geq 11 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es: $z(x,y) = 1,5x + y$.

b) El dibujo es el siguiente:



Los vértices son: $(0, 2)$, $(6/7, 0)$,$(0, 11/10)$ y $(11/15, 0)$:

c)
$$\begin{array}{l} z(0,2) = 2 \\ z(6/7,0) = 1,28 \\ z(0,11/10) = 1,1 \\ z(11/15,0) = 1,1 \end{array}$$

El valor mínimo es cualquier punto de la recta $15x + 10y = 11$. Para obtener el porcentaje hacemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 15x + 10y = 11 \\ x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0,2 \\ y = 0,8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 20\,\% \\ y = 80\,\% \end{array} \right.$$

La proporción buscada sería el 20 % de A y el 80 % de B.

2.2. Año 2001

2.2.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.2.1 *(3 puntos)* En un depósito se almacenan bidones de petróleo y de gasolina. Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, siendo la capacidad del depósito de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario al menos 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma.

c) Resuélvase el problema

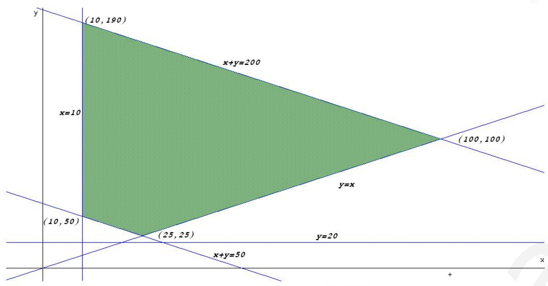
Solución:

a) Llamamos x al nº de bidones de petróleo e y al nº de bidones de gasolina. Las restricciones son:
$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ y > x \\ 50 \leq x + y \leq 200 \end{array} \right.$$

La función objetivo es: $z(x, y) = 20x + 30y$.

Los vértices son: $(10, 190)$, $(100, 100)$, $(25, 25)$ y $(10, 40)$:

b) Representación de la región factible



c)

$$\begin{array}{l} z(10, 190) = 5900 \\ z(100, 100) = 5000 \\ z(25, 25) = 1250 \\ z(10, 40) = 1400 \end{array}$$

El mínimo está en el punto $(25, 25)$, pero no es válida, ya que tiene que haber más bidones de gasolina que de petróleo. Buscamos una solución próxima a este punto en el punto $(25, 26)$ en el que $z(25, 26) = 1280$ céntimos que sigue siendo una solución mínima y que corresponde a 25 bidones de petróleo y 26 bidones de gasolina.

2.2.2. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.2.2 *(3 puntos)*. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4 % en un cierto producto A, un 6 % en el producto B y un 5 % en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8 % sobre el precio inicial de A, un 10 % sobre el precio inicial de B y un 6 % sobre el precio inicial de C.

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución:

	A	B	C
Sin Oferta	x	y	z
1 Oferta	$0,96x$	$0,94y$	$0,95z$
2 Oferta	$0,92x$	$0,90y$	$0,94z$

Nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 0,96x + 1,88y + 2,85z = x + 2y + 3z - 16 \\ 2,76x + 0,90y + 4,70z = 3x + y + 5z - 29 \\ x + y + z = 135 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{r} 4x + 12y + 15z = 1600 \\ 12x + 5y + 15z = 1450 \\ x + y + z = 135 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 50 \\ z = 60 \end{array}\right.$$

2.3. Año 2002

2.3.1. Modelo

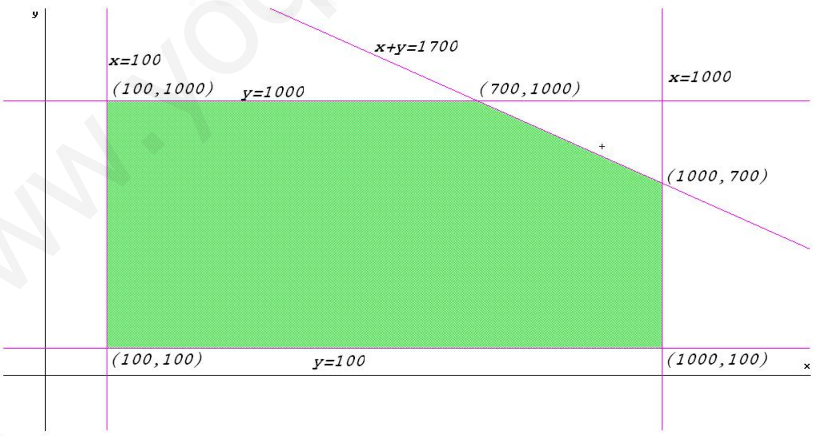
Opción A

Problema 2.3.1 *(3 puntos)* Un fabricante de productos químicos vende fertilizantes, A y B, a razón de 40 y 20 euros el kilogramo, respectivamente. Su producción máxima es de una tonelada de cada fertilizante y su mínimo operativo es de 100 kilogramos de cada fertilizante. Si su producción total es de 1700 kilogramos, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcular dichos ingresos máximos.

Solución:
Llamamos x a los kg de fertilizante de A e y a los kg de fertilizante de B. Se trata de resolver el problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Máximo } z(x,y) = 40x + 20y \\ \text{Sujeto a :} \\ 100 \le x \le 1000 \\ 100 \le y \le 1000 \\ x + y = 1700 \end{array}$$

La región factible sería la siguiente:



Tendríamos:

$$\left\{\begin{array}{l} z(700,1000) = 48000 \\ z(1000,700) = 54000 \end{array}\right.$$

Los otros puntos no cumplen $x + y = 1700$.
El máximo beneficio se daría con una producción de 1 tonelada de fertilizante A y 700 kg de fertilizante B. El beneficio máximo que se produciría con estas cantidades sería de 54000 euros.

Opción B

Problema 2.3.2 *(3 puntos)* Considerar el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar $z = -3x - 2y$
Sujeto a

$$\begin{array}{l} -2x + y \le 2 \\ x - 2y \le 2 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \end{array}$$

a) Mediante la resolución gráfica del problema, discutir si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

b) Si se añade la restricción:

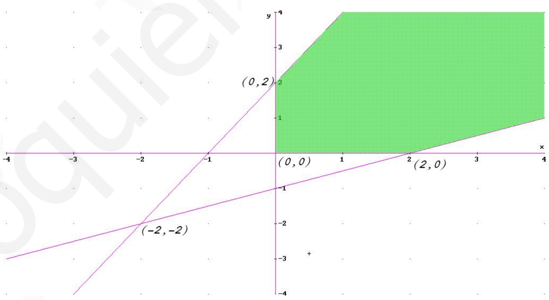
$$x + y \ge 10$$

discutir si existe solución óptima y en caso afirmativo calcularla.

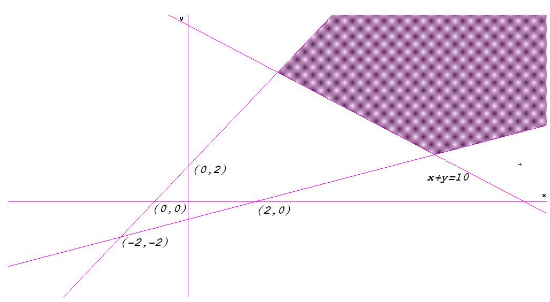
Solución:

a) Minimizar $z = -3x - 2y$ equivale a Maximizar $z(x, y) = 3x + 2y$ sujeto a

$\begin{array}{l} -2x + y \le 2 \\ x - 2y \le 2 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \end{array} \Longrightarrow$ el máximo es imposible obtenerlo, basta observar el recinto de estas inecuaciones:

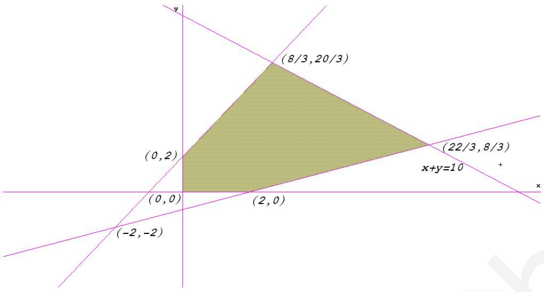


b) Cuando se introduce la restricción $x + y \ge 10$ la situación no mejora, nos encontramos como antes sin solución factible:



La situación cambia considerablemente sin tomamos $x+y \leq 10$. En este caso si que se obtiene solución en los vértices del polígono determinado por las inecuaciones:

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z(0,0) = 0 \\ z(2,0) = 6 \\ z(0,2) = 4 \\ z(8/3, 20/3) = 64/3 \\ z(22/3, 8/3) = 82/3 \end{cases}$$



Luego los valores buscados que hacen máxima la función con las restricciones escritas son $x = 22/3$ e $y = 8/3$

2.3.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.3.3 *(3 puntos)* Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: $G1$ y $G2$. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo $G1$ es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo $G2$ es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 33000 euros para $G1$ y en 35000 euros para $G2$. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:

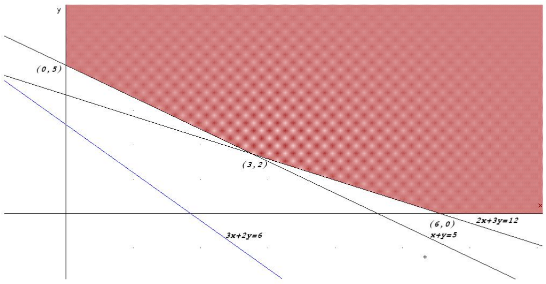
Sea x el número de semanas que trabaja el grupo $G1$.

Sea y el número de semanas que trabaja el grupo $G2$.

	A	B	C	coste
$G1$	3	2	2	33000
$G2$	2	3	2	35000
	6	12	10	

$$z(x,y) = 33000x + 35000y \;\; \text{sujeto a :}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 12 \\ x + y \geq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$z(0,5) = 175000$$
$$z(6,0) = 198000$$
$$z(3,2) = 99000 + 70000 = 169000$$

El coste mínimo viene dado cuando el grupo $G1$ trabaja 3 semanas y el grupo $G2$ 2 semanas, con un coste de 169000 euros.

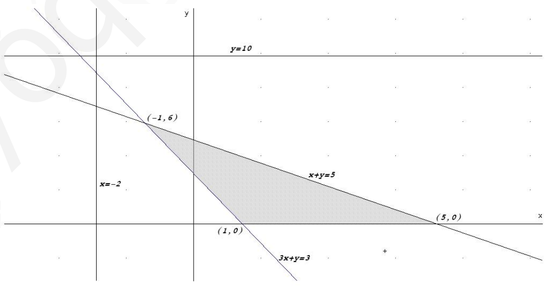
2.3.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Determinar los valores máximo y mínimo de la función $z = 3x + 4y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq -2 \\ y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



$$z(1,0) = 3$$
$$z(5,0) = 15$$
$$z(-1,6) = 21$$

El valor máximo corresponde al punto $(-1,6)$ y es 21.

El valor mínimo corresponde al punto $(1,3)$ y es 3.

2.4. Año 2003

2.4.1. Ordinaria

Opción B

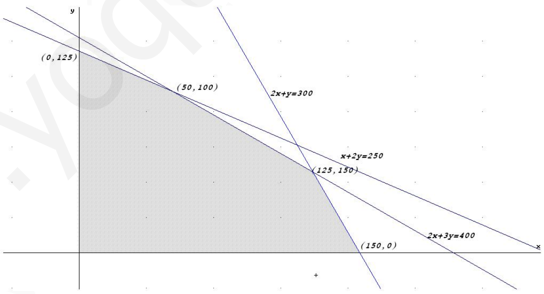
Problema 2.4.1 *(3 puntos)* Un vendedor quiere dar salida a 400 kg de garbanzos, 300 kg de lentejas y 250 kg de judías. Para ello hace dos tipos de paquetes. Los de tipo A contienen 2 kg de garbanzos, 2 kg de lentejas y 1 kg de judías y los de tipo B contienen 3 kg de garbanzos, 1 kg de lentejas y 2 kg de judías. El precio de venta de cada paquete es de 25 euros para los del tipo A y de 35 euros para los del tipo B. ¿Cuántos paquetes de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución:
Sea x el número de lotes A.
Sea y el número de lotes B

	garbanzos	lentejas	judías	precio
A	2	2	1	25
B	3	1	2	35
Totales	400	300	250	

$$z(x,y) = 25x + 35y \text{ sujeto a :}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 400 \\ 2x + y \leq 300 \\ x + 2y \leq 250 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$z(0,125) = 4375$$
$$z(50,100) = 4750$$
$$z(125,50) = 4875$$
$$z(150,0) = 3750$$

El beneficio máximo se obtiene con la venta de 125 lotes de A y 50 de B con un beneficio de 4875 euros.

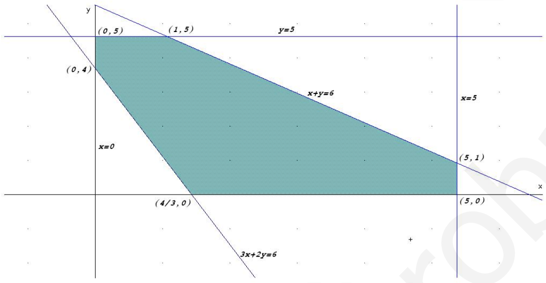
2.4.2. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.4.2 *(3 puntos)* Determinar los valores máximos y mínimos de la función $z = 5x+3y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} 3x + y \geq 4 \\ x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Solución:



$$z(x, y) = 5x + 3y$$

$$\begin{array}{l} z(0,5) = 15 \\ z(0,4) = 12 \\ z(4/3,0) = 20/3 \\ z(5,0) = 25 \\ z(5,1) = 28 \\ z(1,5) = 20 \end{array}$$

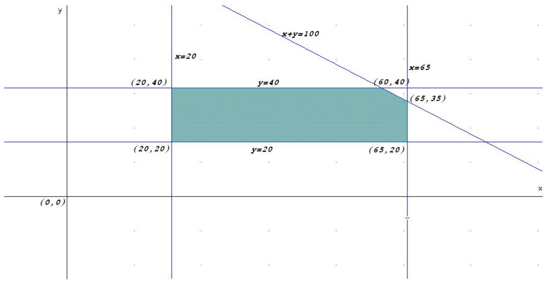
El máximo se obtiene en el punto $(5,1)$ con un valor de 28.
El mínimo se obtiene en el punto $(4/3,0)$ con un valor de $20/3$.

2.5. Año 2004

2.5.1. Modelo

Opción B

Problema 2.5.1 *(3 puntos)* Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 y 65 estudiantes del curso básico y entre 20 y 40 estudiantes del curso avanzado. El número máximo de estudiantes que en total puede atender es 100. Los beneficios que obtiene por cada estudiante en el curso básico se estiman en 145 euros y en 150 euros por cada estudiante del curso avanzado. Hallar qué número de estudiantes de cada curso proporciona el máximo beneficio.
Solución:
Sea x el número de alumnos en el curso básico.
Sea y el número de alumnos en el curso avanzado.



Máx $z(x, y) = 145x + 150y$ sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \le 100 \\ 20 \le x \le 65 \\ 20 \le y \le 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z(20, 20) = 5900 \\ z(20, 40) = 8900 \\ z(60, 40) = 14700 \\ z(65, 35) = 14675 \\ z(65, 20) = 12425 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ el máximo beneficio se produce cuando hay 60 alumnos en el curso básico y 40 alumnos en el avanzado, y asciende a 14700 euros.

2.5.2. Ordinaria

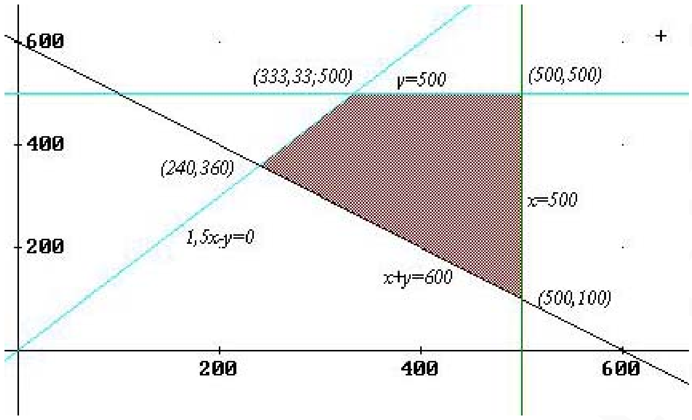
Opción A

Problema 2.5.2 *(3 puntos)* Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen $500kg$ de A y $500kg$ de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que $1,5$ veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a $600kg$. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.

Solución:

Se trata de un problema de optimización. Vamos a llamar x al nº de kg de A, y vamos a llamar y al nº de kg de B. El conjunto de restricciones será el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x \le 500 \\ y \le 500 \\ 1,5x - y \ge 0 \\ x + y \ge 600 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$



$$u(x,y) = 5x + 4y \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} u(240,360) & = 2640 \\ u(333,33;500) & = 3666,67 \\ u(500,500) & = 4500 \\ u(500,100) & = 2900 \end{array} \right.$$

El coste mínimo sería de 2640 euros que correspondería a $240kg$ de A y $360kg$ de B.

2.5.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.5.3 *(3 puntos)* Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 euros y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.
Solución:

	bañadores	gorros	gafas	beneficio
A	1	1	1	8
B	2	0	1	10
	1600	800	1000	

Observando la tabla anterior, si llamamos x al número de lotes vendidos de A y llamamos y al número de lotes vendidos de B, obtenemos las siguientes restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y \leq 1600 \\ x \leq 800 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

Y la función beneficio será $u(x,y) = 8x + 10y - 1500$, en la que tendremos que encontrar el valor máximo.

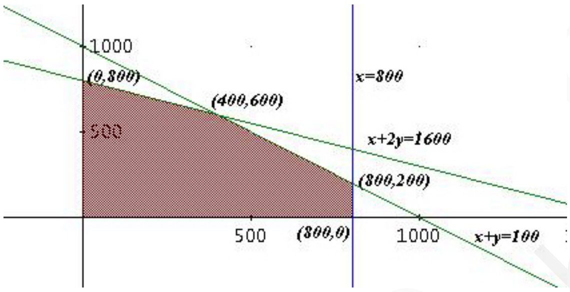
Los puntos de corte de la inecuaciones anteriores son los siguientes:

$$(0,800) \;\; (400,600) \;\; (800,200) \;\; (800,0)$$

Nos producen los siguientes beneficios:

$$\begin{cases} u(0, 800) = 6500 \\ u(400, 600) = 7700 \\ u(800, 200) = 6900 \\ u(800, 0) = 4900 \end{cases}$$

Para obtener un beneficio máximo se deberán vender 400 lotes A y 600 lotes B.
Gráficamente sería:



2.6. Año 2005

2.6.1. Modelo

Opción B

Problema 2.6.1 *(3 puntos)* Una compañía naviera dispone de dos barcos A y B para realizar un determinado crucero. El barco A debe hacer tantos viajes o más que el barco B, pero no puede sobrepasar 12 viajes. Entre los dos barcos deben hacer no menos de 6 viajes y no más de 20. La naviera obtiene un beneficio de 18000 euros por cada viaje del barco A y 12000 euros por cada viaje del B. Se desea que las ganancias sean máximas.

a) Expresar la función objetivo.

b) Describir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

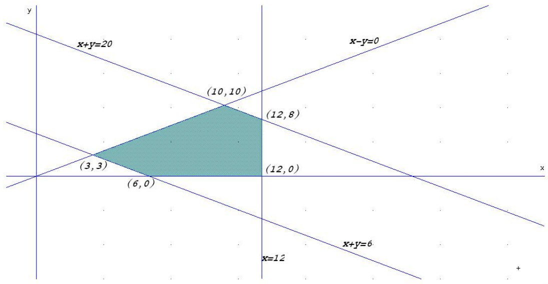
c) Hallar el número de viajes que debe efectuar cada barco para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:
Sea x el n$^{\underline{o}}$ de viajes del barco A.
Sea y el n$^{\underline{o}}$ de viajes del barco B.

a) La función objetivo: $z(x, y) = 18000x + 12000y$

b) las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ x + y \leq 20 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



c)

$$\begin{array}{rcr} z(10,10) & = & 300000 \\ z(12,8) & = & 312000 \\ z(6,0) & = & 108000 \\ z(3,3) & = & 90000 \\ z(12,0) & = & 216000 \end{array}$$

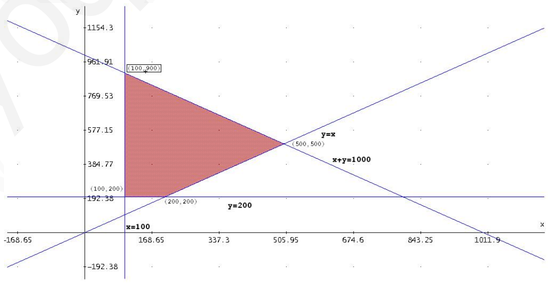
Luego para obtener el máximo beneficio se deberán hacer 12 cruceros A y 8 cruceros B, con un beneficio de 312000 euros.

2.6.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.6.2 *(3 puntos)* Un mayorista vende productos congelados que presenta en dos envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el gasto mínimo de almacenaje?. Obtener dicho mínimo.

Solución:



Si llamamos x al número de envases de tamaño pequeño, y llamamos y al número de envases de tamaño grande, la función objetivo será: $z(x,y) = 10x + 20y$, que tendremos que minimizar con las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \geq 100 \\ y \geq 200 \\ y \geq x \end{cases}$$

La región factible de encuentra representada en el gráfico anterior.

$$\begin{cases} z(100,200) = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 200 = 5{,}000 \\ z(200,200) = 10 \cdot 200 + 20 \cdot 200 = 6{,}000 \\ z(500,500) = 10 \cdot 500 + 20 \cdot 500 = 15{,}000 \\ z(100,900) = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 900 = 19{,}000 \end{cases}$$

El mínimo gasto de almacenaje corresponde a 100 envases pequeños y 200 grandes y sería de 5.000 céntimos = 50 euros.

2.6.3. Extraordinaria

Opción A

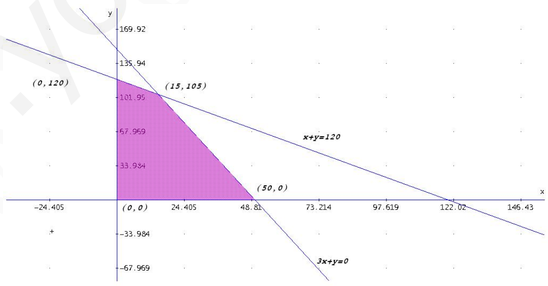
Problema 2.6.3 *(3 puntos)* En una empresa de alimentación se dispone de 24 kg de harina de trigo y 15 kg de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración del preparado A contiene 200 gr de harina de trigo y 300 gr de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración del preparado B contiene 200 gr de harina de trigo y 100 gr de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo.

Solución:

	Trigo	Maiz	Energía
A	200	300	600
B	200	100	400

Tenemos que preparar x raciones de A e y raciones de B. El problema sería calcular el Máx$z(x,y) = 600x + 400y$ sujeto a

$$\begin{cases} 200x + 200y < 24000 \\ 300x + 100y < 15000 \\ x > 0, \ \ y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y < 120 \\ 3x + y < 150 \\ x > 0, \ \ y > 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{l} z(0,120) = 48000 \\ z(15,105) = 51000 \\ z(50,0) = 30000 \end{array}$$

Luego el máximo de esta función se encuentra para 15 preparados de A y 105 de B con un rendimiento de 51000 cal.

2.7. Año 2006

2.7.1. Modelo

Opción B

Problema 2.7.1 *(3 puntos)* Un taller dedicado a la confección de prendas de punto fabrica dos tipos de prendas: A y B. Para la confección de la prenda de tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de máquina. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquina. El taller dispone al mes como máximo de 85 horas para el trabajo manual y de 75 horas para el trabajo de máquina y debe de confeccionar al menos 100 prendas. Si los beneficios son de 20 euros por cada prenda de tipo A y de 17 euros por cada prenda de tipo B, ¿cuántas prendas de cada tipo debe de fabricar al mes, para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende éste?

Solución:

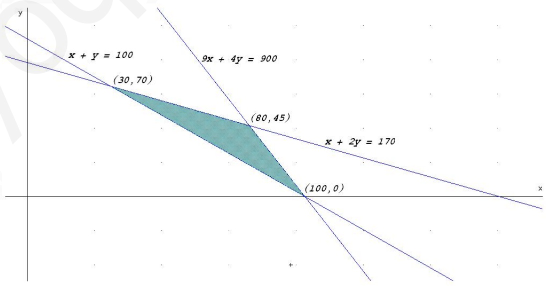
Sea x el nº de prendas del tipo A.
Sea y el nº de prendas del tipo B.

La función objetivo: $z(x,y) = 20x + 17y$

	Manual	Máquina
A	30	45
B	60	20
Total	5100	4500

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 30x + 60y \le 5100 \\ 45x + 20y \le 4500 \\ x + y \ge 100 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \le 170 \\ 9x + 4y \le 900 \\ x + y \ge 100 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} z(30,70) &= 1790 \\ z(80,45) &= 2365 \\ z(100,0) &= 2000 \end{aligned}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 80 prendas tipo A y 45 prendas tipo B, con un beneficio de 2365 euros.

2.7.2. Ordinaria

Opción A

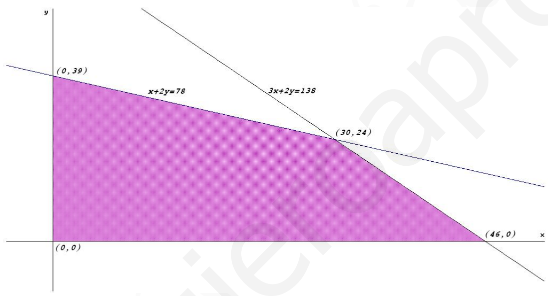
Problema 2.7.2 *(3 puntos)* Una papelería quiere liquidar hasta 78 kg de papel reciclado y hasta 138 kg de papel normal. Para ello hace dos tipos de lotes, A y B. Los lotes A están formados por 1 kg de papel reciclado y 3 kg de papel normal, y los lotes B por 2 kg de papel de cada clase. El precio de venta de cada lote A es de 0,9 euros y el de cada lote B es de 1 euro. ¿Cuántos lotes A y B debe vender para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos máximos?.

Solución:

	Reciclado	Normal	Precio
A	1	3	$0,9$
B	2	2	1
	78	138	

Hay que calcular Máx $z(x, y) = 0,9x + y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \le 78 \\ 3x + 2y \le 138 \\ x \ge 0, \ y \ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z(0, 39) = 39 \\ z(46, 0) = 41, 4 \\ z(30, 24) = 51 \end{cases}$$

Para obtener el máximo beneficio debe de vender 30 lotes de A y 24 del B con un beneficio de 51 euros.

2.7.3. Extraordinaria

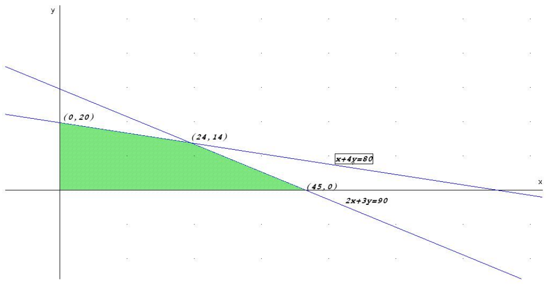
Opción A

Problema 2.7.3 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m^2 de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m^2 de lámina gruesa necesita 20 kg y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m^2 de cada lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Solución:

	Aluminio	Horas	Beneficio
F	5	10	45
G	20	15	80
	400	450	



Hay que calcular Máx $z(x,y) = 45x + 80y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 5x + 20y \le 400 \\ 10x + 15y \le 450 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 4y \le 80 \\ 2x + 3y \le 90 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(0,20) = 1600 \\ z(45,0) = 2025 \\ z(24,14) = 2200 \end{cases}$$

Para obtener el máximo beneficio debe de fabricar 24 láminas finas y 14 láminas gruesas con un beneficio de 2200 euros.

2.8. Año 2007

2.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

2.8.2. Ordinaria

Opción B

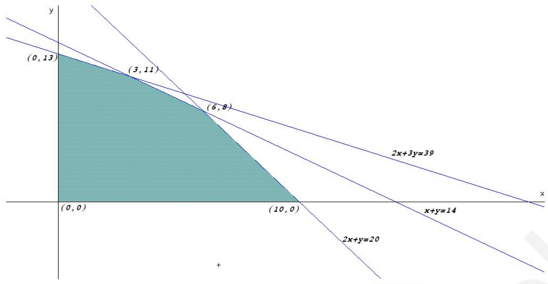
Problema 2.8.1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de tipo B, 1000 euros.

Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio.

Solución:

Sea x cantidad de cable tipo A.

Sea y cantidad de cable tipo B.



	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

La función objetivo: $z(x, y) = 1500x + 1000y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} z(0,13) & = & 13000 \\ z(3,11) & = & 15500 \\ z(6,8) & = & 17000 \\ z(10,0) & = & 15000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.

2.8.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.8.2 *(3 puntos)* Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 euros y de 206 euros para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo?

Solución:

Sea x el número de filas de clase preferente.

Sea y el número de filas de clase turista.

La función objetivo: $z(x, y) = 206x + 152y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + 1,5y \le 104 \\ x \ge 3 \\ y \ge 3x \\ y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 20x + 15y \le 1040 \\ 3x - y \le 0 \\ x \ge 3 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcr} z(3, 196/3) & = & 10548,6 \\ z(3, 9) & = & 1986 \\ z(16, 48) & = & 10592 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán instalar 16 filas de clase preferente y 48 de clase turista, con un beneficio de 10592 euros.

2.9. Año 2008

2.9.1. Modelo

Opción B

Problema 2.9.1 *(3 puntos)*

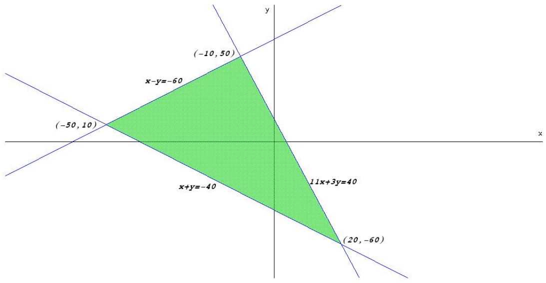
a) Representar la región del plano definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & y \le & 60 \\ x+ & y \ge & -40 \\ 11x+ & 3y \le & 40 \end{array}\right.$$

b) Maximizar la función $f(x,y) = 10x - y$ en la región obtenida.

c) Minimizar la función $g(x,y) = x - 10y$.

Solución:

a) 

$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & y \le & 60 \\ x+ & y \ge & -40 \\ 11x+ & 3y \le & 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & y \ge & -60 \\ x+ & y \ge & -40 \\ 11x+ & 3y \le & 40 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} f(-10,50) = -150 \\ f(-50,10) = -510 \\ f(20,-60) = 260 \end{array}\right.$$

El máximo de f en este recinto se encuentra en el punto $(20,-60)$ con un valor de 260.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} g(-10,50) = -510 \\ g(-50,10) = -150 \\ g(20,-60) = 620 \end{array}\right.$$

El mínimo de g en este recinto se encuentra en el punto $(-10,50)$ con un valor de -510.

2.9.2. Ordinaria

Opción B

Problema 2.9.2 *(3 puntos)* Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada almazara para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

Solución:

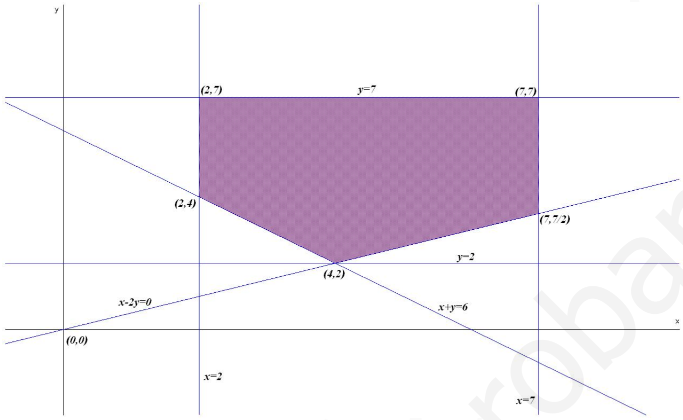
Sea x cantidad de toneladas de A.

Sea y cantidad de toneladas de B.

La función objetivo: $z(x,y) = 2000x + 3000y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x \le 2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x - 2y \le 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{lcl} z(4,2) & = & 14000 \\ z(2,4) & = & 16000 \\ z(2,7) & = & 25000 \\ z(7,7) & = & 35000 \\ z(7,7/2) & = & 24500 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberá comprar cuatro toneladas a la almazara A y 2 a la almazara B, con un gasto de 14000 euros.

2.9.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.9.3 *(3 puntos)* Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las del tipo B garantizan una ganancia del 5 % anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

Solución:

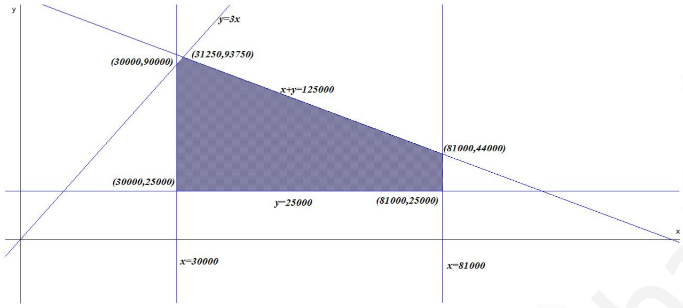
Sea x cantidad invertida en A.

Sea y cantidad invertida en B.

La función objetivo: $z(x,y) = 0,1x + 0,05y$

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} x + y \leq 125000 \\ 30000 \leq x \leq 81000 \\ y \geq 25000 \\ y \leq 3x \end{cases}$$



$$\begin{aligned} z(30000, 25000) &= 4250 \\ z(81000, 25000) &= 9350 \\ z(30000, 90000) &= 7500 \\ z(81000, 44000) &= 10300 \\ z(31250, 93750) &= 7812,5 \end{aligned}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberá invertir 81000 euros en acciones tipo A y 44000 euros en acciones tipo B con un beneficio máximo esperado de 10300 euros.

2.10. Año 2009

2.10.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.10.1 *(3 puntos)* Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oíl. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oíl. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oíl. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución:

Sea x cantidad de petróleo tipo A.

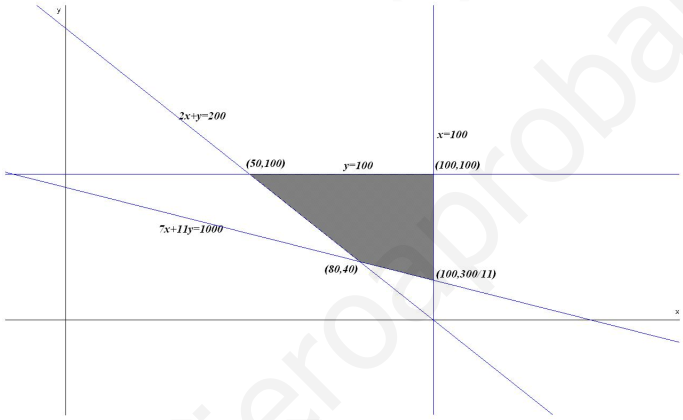
Sea y cantidad de petróleo tipo B.

	Gasolina	Fuel − oil	Coste
A	$0,1$	$0,35$	350
B	$0,05$	$0,55$	400
Total	10	50	

La función objetivo: $z(x, y) = 350x + 400y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 0,1x + 0,05y \geq 10 \\ 0,35x + 0,55y \geq 50 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + y \geq 200 \\ 7x + 11y \geq 1000 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{lcr} z(80, 40) & = & 44000 \\ z(50, 100) & = & 57500 \\ z(100, 300/11) & = & 45909,09 \\ z(100, 100) & = & 75000 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberán comprar 80 toneladas del petróleo tipo A y 40 toneladas del tipo B, con un coste de 44000 euros.

2.10.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.10.2 *(3 puntos)* Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas de taller de fabricación y 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x m^2 de tipo A.

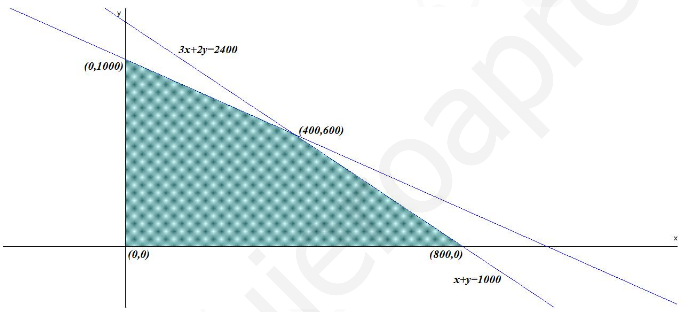
Sea y m^2 de tipo B.

	Fabricación	Barnizado	Beneficio
A	$0,3$	$0,2$	4
B	$0,2$	$0,2$	3
Total	240	200	

La función objetivo: $z(x,y) = 4x + 3y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 0,3x + 0,2y \le 240 \\ 0,2x + 0,2y \le 200 \\ x,y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x + 2y \le 2400 \\ x + y \le 1000 \\ x,y \ge 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{lcl} z(0,1000) & = & 3000 \\ z(400,600) & = & 3400 \\ z(800,0) & = & 3200 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán vender 400 m^2 del tipo A y 600 del tipo B. El benficio de esta venta es de 3400 euros.

2.11. Año 2010

2.11.1. Modelo

Opción B

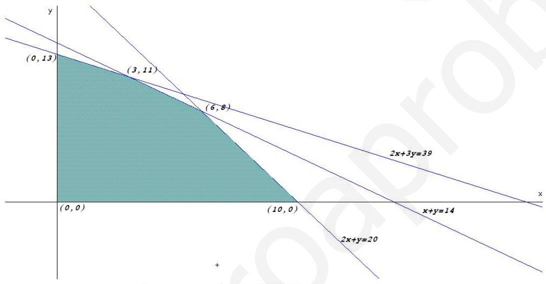
Problema 2.11.1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricados es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual a 1000 euros. Calcúlese los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para

maximizar el beneficio y determínese dicho beneficio máximo.
Solución:
Sea x cantidad de cable tipo A.
Sea y cantidad de cable tipo B.

	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

La función objetivo: $z(x, y) = 1500x + 1000y$
Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 10x + 15y \le 195 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \le 39 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} z(0, 13) &= 13000 \\ z(3, 11) &= 15500 \\ z(6, 8) &= 17000 \\ z(10, 0) &= 15000 \end{aligned}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.

2.11.2. Ordinaria

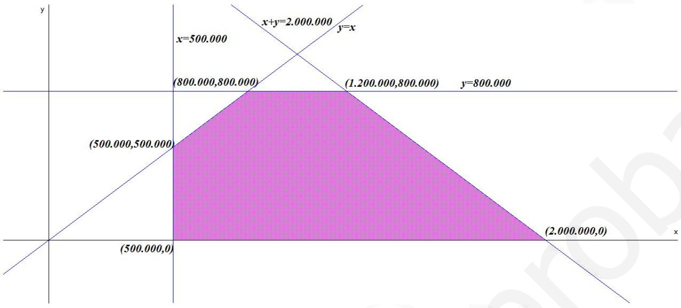
Opción A

Problema 2.11.2 *(3 puntos)* Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800000 euros la inversión total en jugadores extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser como mínimo de 500000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.

Solución:
Sea x cantidad invertida en españoles.
Sea y cantidad invertida en extranjeros.

La función objetivo: $z(x,y) = 0,1x + 0,15y$
Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{r}x + y \le 2000000\\ y \le 800000\\ x \ge 500000\\ x \ge y\\ y \ge 0\end{array}\right.$$



$$\begin{array}{lcr}z(800000, 800000) & = & 200000\\ z(1200000, 800000) & = & 240000\\ z(500000, 500000) & = & 125000\\ z(500000, 0) & = & 50000\\ z(2000000, 0) & = & 200000\end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán invertir 1.200.000 euros en fichajes españoles y 800.000 euros en fichajes extranjeros. El beneficio de esta operación sería de 270.000 euros.

2.11.3. Extraordinaria

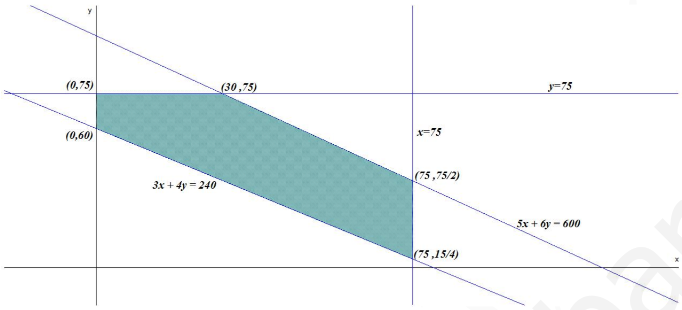
Opción B

Problema 2.11.3 *(3 puntos)* Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.
Solución:
Llamamos x al número de kg de pintura comprados al proveedor A y, llamamos y al número de kg de pintura comprados al proveedor B.

Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	$1,2$

Función Objetivo: Mín $z(x, y) = x + 1,2y$
Sujeto a:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$



Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} z(0, 75) = 90 \\ z(0, 60) = 72 \\ z(30, 75) = 120 \\ z(75, 75/2) = 120 \\ z(75, 15/4) = 79,5 \end{array}\right.$$

El mínimo coste, de 72 euros, corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

2.12. Año 2011

2.12.1. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.12.1 *(3 puntos).* Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

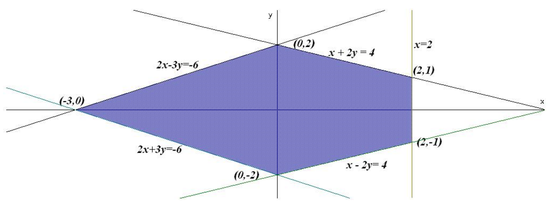
$$x + 2y \leq 4; \;\; x - 2y \leq 4; \;\; 2x - 3y \geq -6; \;\; 2x + 3y \geq -6; \;\; x \leq 2$$

a) Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S sería:



b) $f(x,y) = 2x + y$:

$$\begin{cases} f(-3,0) = -6 \\ f(0,2) = 2 \\ f(0,-2) = -2 \\ f(2,1) = 5 \\ f(2,-1) = 3 \end{cases}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto $(-3,0)$ vale -6. El valor máximo se encuentra en el punto $(2,1)$ y vale 5.

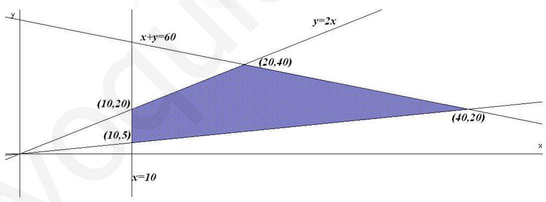
2.13. Año 2012

2.13.1. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.13.1 *(3 puntos)* Una compañía aérea oferta hasta un máximo de 60 plazas en sus vuelos diarios entre Madrid y Lisboa. Las plazas de clase turista se ofrecen a 40 euros, mientras que las de primera clase tienen un precio de venta de 75 euros. Por normativa internacional, el número de plazas ofertadas de primera clase debe ser inferior o igual al doble de las plazas de clase turista y superior o igual a la mitad de las plazas de dicha clase turista. Además, por motivos de estrategia empresarial, la compañía tiene que ofrecer como mínimo 10 plazas de clase turista.
¿Qué número de plazas de cada clase se deben ofertar diariamente con el objetivo de maximizar los ingresos de la aerolínea? Determínese dicho ingreso máximo.

Solución:



Sean: x : plazas en clase turista. y : plazas en primera clase. Hay que maximizar $z(x,y) = 40x + 75y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq x/2 \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(20,40) = 3800 \\ z(40,20) = 3100 \\ z(10,5) = 775 \\ z(10,20) = 1900 \end{cases}$$

El ingreso máximo se obtiene ofreciendo 20 plazas de turista y 40 de primera clase, con un total de 3800 euros.

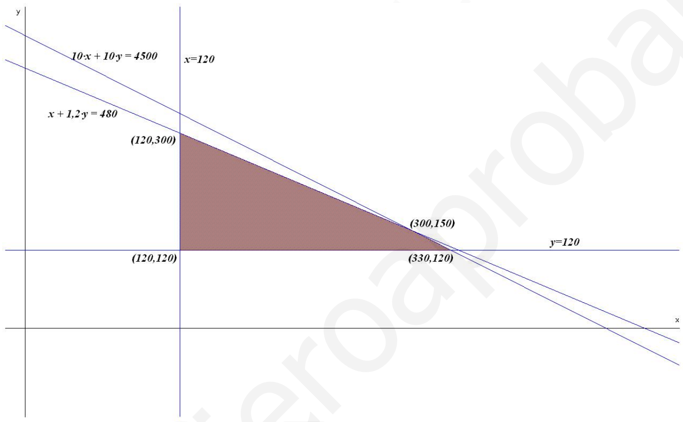
2.13.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.13.2 *(3 puntos)* Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 euros por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura. Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Solución:

Llamamos x al nº de litros de pintura del primer tipo e y al nº de litros de pintura del segundo tipo.



Función objetivo: $z(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + 1,2y \le 480 \\ 10x + 10y \le 4500 \\ x, y \ge 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(120, 120) = 840 \\ z(120, 300) = 1560 \\ z(300, 150) = 1500 \\ z(330, 120) = 1470 \end{cases}$$

La cantidad óptima a utilizar sería: 120 litros de pintura del primer tipo y 300 de pintura del segundo tipo 2. Podrían pintarse 1560 m^2.

2.14. Año 2013

2.14.1. Modelo

Opción B

Problema 2.14.1 *(2 puntos)*

a) Determínense los valores de a y b para que la función objetivo $F(x, y) = 3x + y$ alcance su valor máximo en el punto $(6, 3)$ de la región factible definida por

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + ay \leq 3 \\ 2x + y \leq b \end{cases}$$

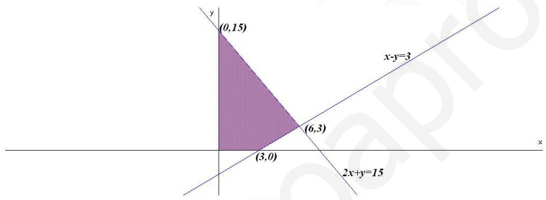
b) Represéntese la región factible para esos valores y calcúlense las coordenadas de todos sus vértices.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6 + 3a = 3 \\ 12 + 3 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 15 \end{cases}$$

b) Representación:



$$\begin{cases} F(3, 0) = 9 \\ F(0, 15) = 15 \\ F(6, 3) = 21 \text{ Máximo} \end{cases}$$

2.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.14.2 *(2 puntos)* Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700, \ \ 2x + 3y \leq 300, \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0$$

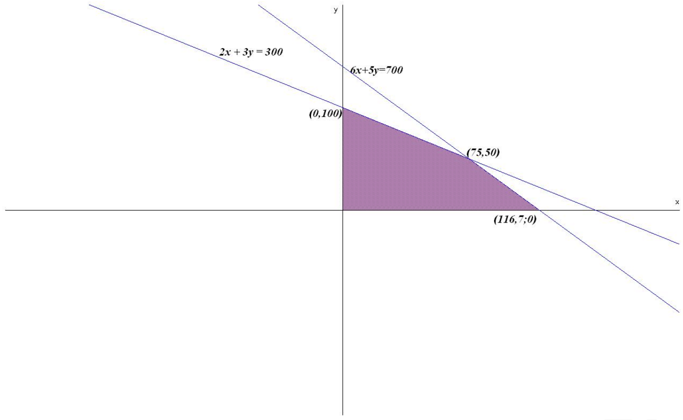
a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Solución:

$f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeto a: $\begin{cases} 6x + 5y \leq 700 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$

Representación:



$$\begin{cases} f(0,100) = 7650 \\ f(116,7;0) = 7560 \\ f(75,50) = 8685 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(75,50)$ con un valor de 8685.

2.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.14.3 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

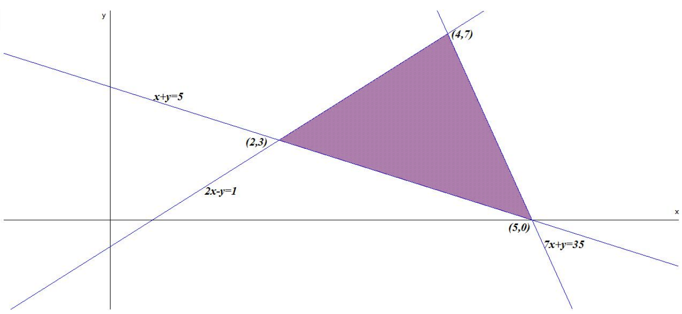
$$S: \begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + y \geq 5 \\ 7x + y \leq 35 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = 3x - 2y$ sobre la región C, determinando los puntos donde se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región C pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(5,0)$, $(2,3)$, y $(4,7)$.

b)

$$\begin{cases} f(5,0) = 15 \text{ Máximo} \\ f(2,3) = 0 \\ f(4,7) = -2 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo es -2 y se alcanza en el punto $(4,7)$ y el máximo en el $(5,0)$ con 15.

2.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.14.4 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

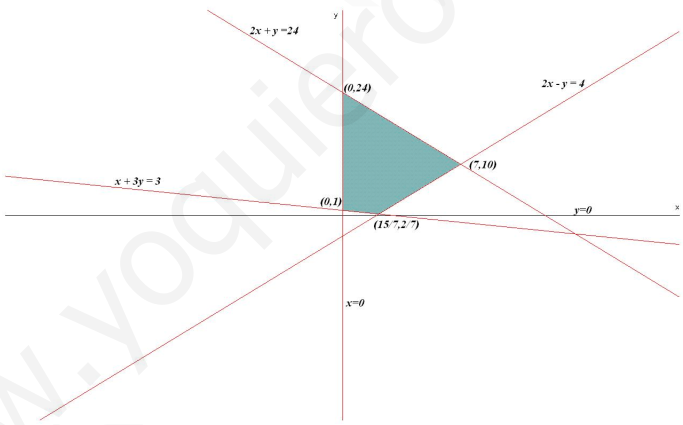
$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de C donde la función $f(x,y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Solución:

Representación:



$$f(x,y) = 3x + y \text{ sujeto a: } \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(0,24) = 24 \\ f(7,10) = 31 \text{ Máximo} \\ f(15/7, 2/7) = 47/7 \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(7,10)$ con un valor de 31.

2.15. Año 2014

2.15.1. Modelo

Opción A

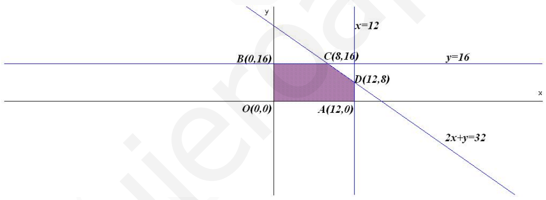
Problema 2.15.1 *(2 puntos)* Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
Llamamos x : al nº de pesqueros e y al nº de yates.

$$z(x, y) = 50000x + 10000y$$

sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} 100x + 50y \le 1600 \\ x \le 12 \\ y \le 16 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y \le 32 \\ x \le 12 \\ y \le 16 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} z(12, 0) = 600000 \\ z(0, 16) = 160000 \\ z(12, 8) = 680000 \text{ Máximo} \\ z(8, 16) = 560000 \end{array}\right.$$

Hay que reparar 12 pesqueros y 8 yates para que el ingreso sea máximo con un montante de 680000 euros.

2.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.15.2 *(2 puntos)* Se consideran la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

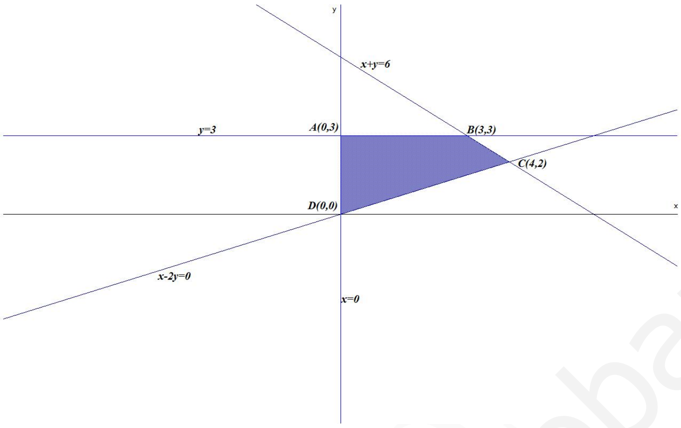
$$x - 2y \le 0, \;\; x + y \le 6, \;\; x \ge 0, \;\; y \le 3$$

a) Represéntese la región S.

b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Solución:

a) La región S pedida será:



b)

$$\begin{cases} z(0,3) = -6 \ \text{Mínimo} \\ z(3,3) = 9 \\ z(4,2) = 16 \ \text{Máximo} \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$$

El máximo es de 16 y se alcanza en el punto $C(4,2)$. El mínimo es de -4 y se alcanza en el punto $A(0,2)$.

2.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.15.3 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

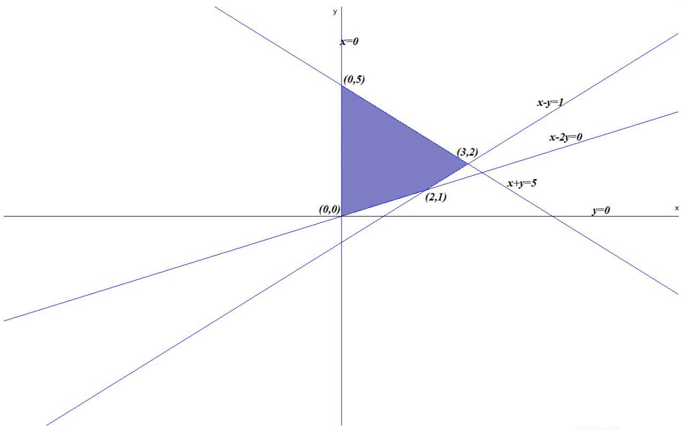
$$x - 2y < 0; \quad x - y < 1; \quad x + y < 5; \quad x > 0; \quad y > 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $O(0,0)$, $A(2,1)$ $B(3,2)$, y $C(0,5)$.

b)

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \text{ Mínimo} \\ f(2,1) = 1 \\ f(3,2) = 1 \\ f(0,5) = -5 \end{cases}$$

El mínimo estaría en el punto $C(0,5)$ con un valor de -5 y, el máximo estaría en cualquier punto del segmento que une los puntos A y B con valor 1.

2.15.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.15.4 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4; \quad y \leq x - 1; \quad 2y \geq x; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

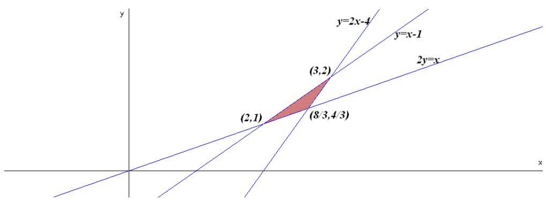
.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2,1)$, $(3,2)$ y $(8/3,4/3)$.

b)

$$\begin{cases} f(2,1) = -1 \text{ Máximo} \\ f(3,2) = -3 \text{ Mínimo} \\ f(8/3, 4/3) = -4/3 \end{cases}$$

El máximo es de -1 y se alcanza en el punto $(2,1)$. El mínimo es de -3 y se alcanza en el punto $(3,2)$.

2.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.15.5 *(2 puntos)* Una industria química elabora plásticos de dos calidades diferentes. Para ello tiene 2 máquinas, A y B. Es necesario que fabrique un mínimo de 20 toneladas de plástico superior y 13 de plástico medio. Cada hora que trabaja la máquina A, fabrica 7 toneladas de plástico superior y 2 de plástico medio, mientras que la máquina B produce 2 y 3 toneladas, respectivamente. Además, la máquina A no puede trabajar más de 9 horas, ni más de 10 horas la máquina B. El coste de funcionamiento de las máquinas es de 800 euros/hora para A y de 600 euros/hora para B. Calcúlese cuántas horas debe funcionar cada máquina para que el coste total de funcionamiento sea mínimo y cuál es ese coste mínimo.

Solución:

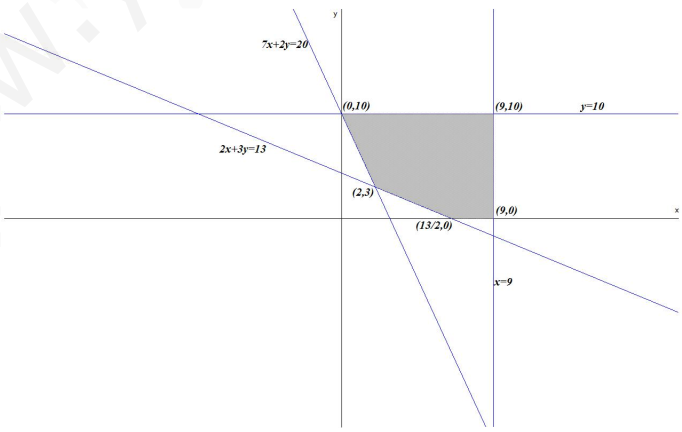
x : número de horas de funcionamiento de la máquina A e y : número de horas de funcionamiento de la máquina B

	Tm plástico superior	Tm plástico medio	coste
A	7	2	800
B	2	3	600
	20	13	

Función Objetivo: $f(x,y) = 800x + 600y$

$$\begin{cases} 7x + 2y \geq 20 \\ 2x + 3y \geq 13 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2,3)$, $(13/2,0)$ $(9,0)$, $(9,10)$ y $(0,10)$.

$$\begin{cases} f(2,3) = 3400 \text{ Mínimo} \\ f(13/2,0) = 5200 \\ f(9,0) = 7200 \\ f(9,10) = 13200 \\ f(0,10) = 6000 \end{cases}$$

El mínimo coste se produce cuando la máquina A trabaja 2 horas y 3 horas la B con un coste de 3400 euros.

2.16. Año 2015

2.16.1. Modelo

Opción A

Problema 2.16.1 *(2 puntos)* Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar más de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifíquense las respuestas.

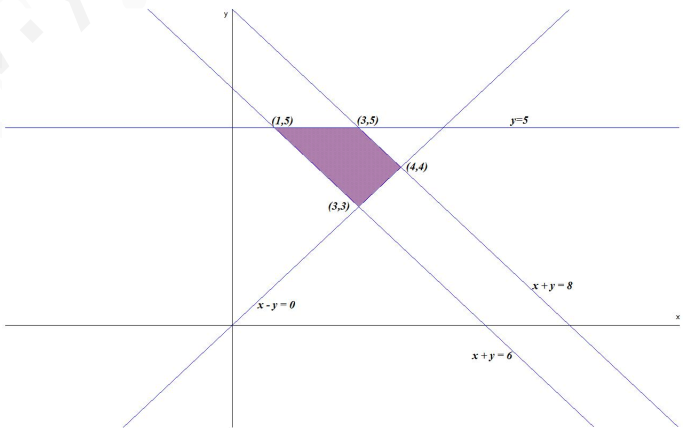
Solución:

Llamamos x : millones de bebida A e y millones de bebida B

$$z(x,y) = 2x + 0,5y$$

sujeto a

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x + y \leq 8 \\ y \geq x \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 6 \\ y \leq 5 \\ x + y \leq 8 \\ x - y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z(1,5) = 4,5 \text{ Mínimo} \\ z(3,5) = 8,5 \\ z(3,3) = 7,5 \\ z(4,4) = 10 \end{cases}$$

Hay que producir 1 millón de litros de la bebida A y 5 millones de la B con un coste de 4,5 millones de euros.

2.16.2. Ordinaria

Opción B

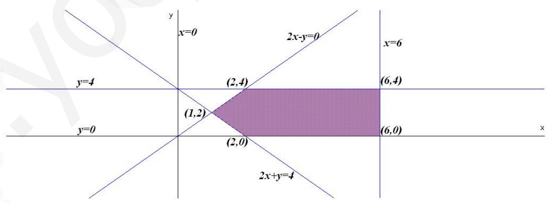
Problema 2.16.2 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

Solución:

Llamamos x : toneladas de pienso A e y : toneladas de pienso B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x,y) = 1000x + 2000y$ calculando su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x \le 6 \\ y \le 4 \\ y \le 2x \Longrightarrow 2x - y \ge 0 \\ 2x + y \ge 4 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(6,0)$, $(6,4)$, $(2,4)$ y $(1,2)$:

$$\begin{cases} z(2,0) = 2000 \text{ Mínimo} \\ z(6,0) = 6000 \\ z(6,4) = 14000 \\ z(2,4) = 10000 \\ z(1,2) = 5000 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 2000 euros y se alcanza produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna del tipo B.

2.16.3. Ordinaria-Coincidente

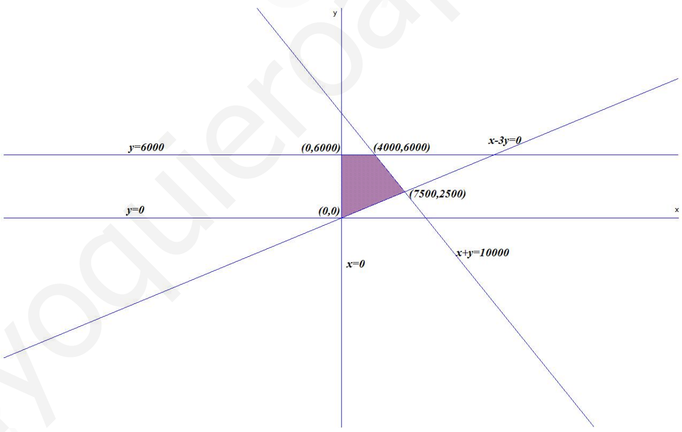
Opción B

Problema 2.16.3 *(2 puntos)* Un banco oferta dos productos financieros, A y B. El banco garantiza para el producto A un beneficio anual del 5 % de la cantidad invertida, y para el producto B un beneficio del 2 % anual de la cantidad invertida. Una persona desea invertir en ambos productos a lo sumo 10.000 euros, con la condición de que la cantidad invertida en el producto A no supere el triple de la cantidad invertida en el producto B y que la inversión en el producto B sea de 6.000 euros como máximo. Determínese qué cantidad debe invertir en cada producto para obtener, al cabo de un año, un beneficio máximo y obténgase este beneficio máximo.

Solución:
x: Cantidad de A e y: Cantidad de B.
Función objetivo: $z(x,y) = 0,05x + 0,02y$
Sujeto a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y \le 10000 \\ x \le 3y \\ y \le 6000 \\ x,y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y \le 10000 \\ x-3y \le 0 \\ y \le 6000 \\ x,y \ge 0 \end{array}\right.$$

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $O(0,0)$, $A(7500,2500)$ $B(4000,6000)$, y $C(0,6000)$.

b)

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \ \text{Mínimo} \\ f(7500,2500) = 425 \\ f(4000,6000) = 320 \\ f(0,6000) = 120 \end{array}\right.$$

El máximo beneficio sería de 425 euros invirtiendo 7500 euros en el producto A y 2500 euros en el producto B.

2.16.4. Extraordinaria

Opción A

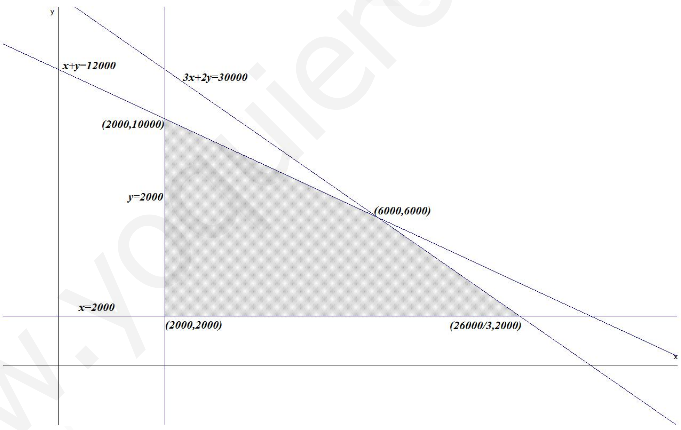
Problema 2.16.4 *(2 puntos)* Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Solución:

Llamamos x : litros de aceite A e y : litros de aceite B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x,y) = (0,25\cdot 3)x + (0,3\cdot 2)y = 0,75x + 0,6y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \le 12000 \\ x \ge 2000 \\ y \ge 2000 \\ 3x + 2y \le 30000 \end{cases}$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2000,2000)$, $(2000,10000)$, $(26000/3,2000)$ y $(6000,6000)$:

$$\begin{cases} z(2000,2000) = 2700 \\ z(2000,10000) = 7500 \\ z(26000/3,2000) = 7700 \\ z(6000,6000) = 8100 \;\text{ Máximo} \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 8100 euros y se alcanza comprando 6000 litros de aceite A y 6000 del tipo B.

2.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.16.5 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + 2x \geq 7; \quad y - 2x \geq -1; \quad y \leq 5;$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x - 5y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

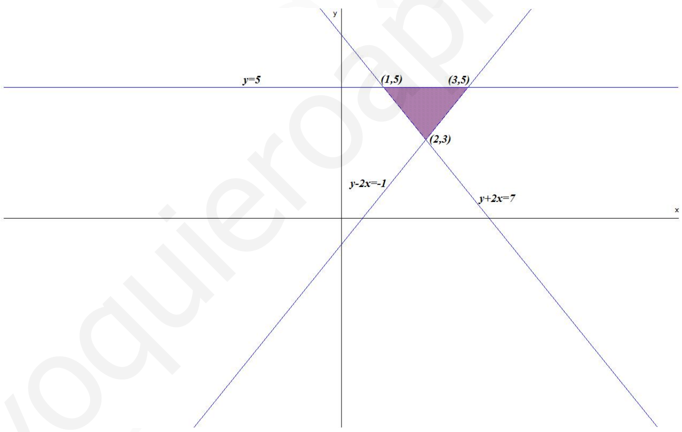
Solución:

a) Los vértices serían: $(1, 5)$, $(3, 5)$ y $(2, 3)$.

b) Función objetivo: $f(x, y) = -5x - 5y$

$$\begin{cases} f(1,5) = -30 \\ f(3,5) = -40 \text{ Mínimo} \\ f(2,3) = -25 \text{ Máximo} \end{cases}$$

La región S pedida será:



2.17. Año 2016

2.17.1. Ordinaria

Opción A

Problema 2.17.1 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad y - x \leq 3; \quad \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

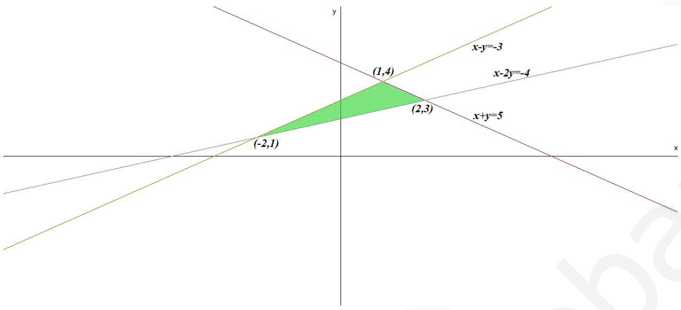
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \geq -3 \\ x - 2y \leq -4 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(-2, 1)$, $(1, 4)$, y $(2, 3)$:

b)

$$\begin{cases} z(-2, 1) = -3 \text{ Mínimo} \\ z(1, 4) = 6 \\ z(2, 3) = 7 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es -3 euros y se alcanza en el punto $(-2, 1)$ y el máximo es de 7 y se alcanza en el punto $(2, 3)$.

2.17.2. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.17.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad 2x - y \geq -2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 1$$

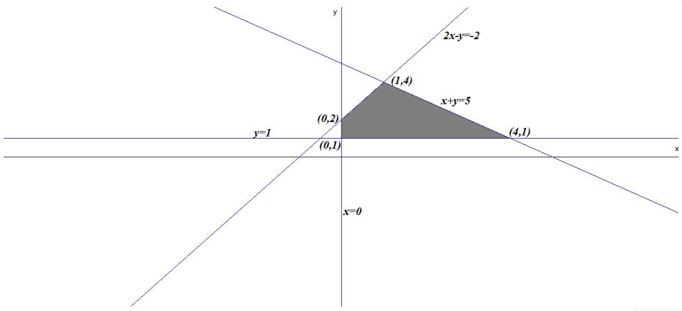
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x - 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y \geq -2 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,4)$, y $(4,1)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,1) = -3 \\ f(0,2) = -6 \\ f(1,4) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(4,1) = 5 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $(1,4)$ y el máximo es de 5 y se alcanza en el punto $(4,1)$.

2.17.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 2.17.3 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$2x - y > 1; \quad 2x - 3y < 6; \quad x + 2y > 3; \quad x + y < 8; \quad y < 3$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

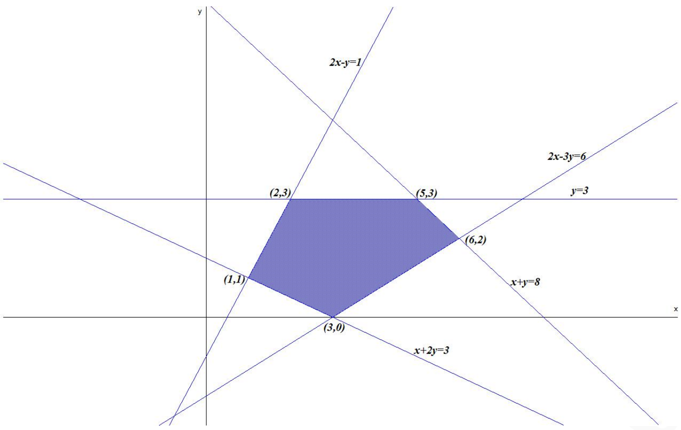
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} 2x - y > 1 \\ 2x - 3y < 6 \\ x + 2y > 3 \\ x + y < 8 \\ y < 3 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(3,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(5,3)$ y $(6,2)$:



b)

$$\begin{cases} f(3,0) = 6 \\ f(1,1) = 3 \text{ Mínimo} \\ f(2,3) = 7 \\ f(5,3) = 13 \\ f(6,2) = 14 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es 3 y se alcanza en el punto $(1,1)$ y el máximo es de 14 y se alcanza en el punto $(6,2)$.

2.18. Año 2017

2.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 2.18.1 *(2 puntos)* Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6; \quad 5x - 2y \geq -2; \quad x + 3y \leq 20; \quad 2x - y \leq 12\right\}$$

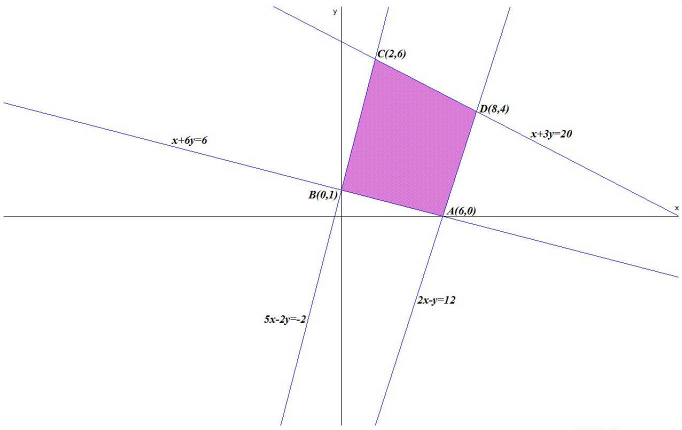
a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x,y)$ en dichos puntos.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 4x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + 6y \geq 6 \\ 5x - 2y \geq -2 \\ x + 3y \leq 20 \\ 2x - y \leq 12 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6,0)$, $B(0,1)$, $C(2,6)$, y $D(8,4)$:

b)

$$\begin{cases} f(6,0) = 24 \text{ Máximo} \\ f(0,1) = -3 \\ f(2,6) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(8,4) = 20 \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $C(2,6)$ y el máximo es de 24 y se alcanza en el punto $A(6,0)$.

2.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2; \quad 2x - y \leq 4; \quad 2y - x \leq 4; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

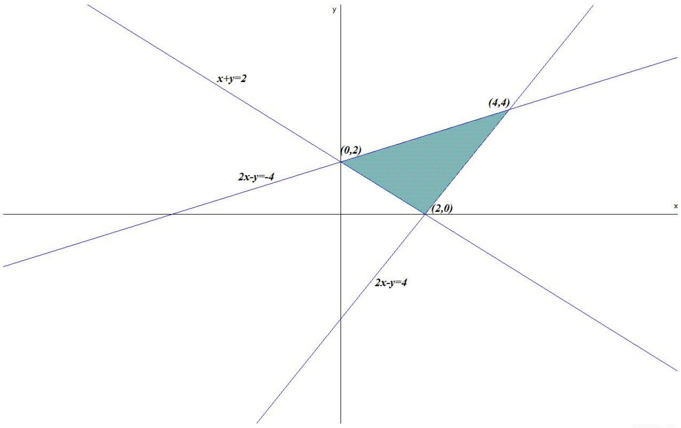
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = -5x + 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2y - x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ x - 2y \geq -4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(4,4)$, y $(0,2)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,2) = 6 \text{ Máximo} \\ f(2,0) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(4,4) = -8 \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $(2,0)$ y el máximo es de 6 y se alcanza en el punto $(0,2)$.

2.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.18.3 *(2 puntos)* Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \le x \le 5; \quad 2 \le y \le 6; \quad x - y \ge -4; \quad 3x - y \le 10.$$

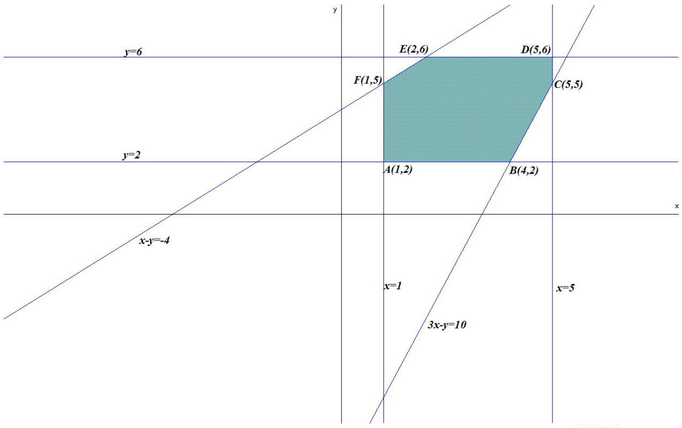
a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = -200x + 600y$ en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = -200x + 600y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 2 \le y \le 6 \\ x - y \ge -4 \\ 3x - y \le 10 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(1,2)$, $B(4,2)$, $C(5,5)$, $D(5,6)$, $E(2,6)$, $F(1,5)$:

b)

$$\begin{cases} f(1,2) = 1000 \\ f(4,2) = 400 \text{ Mínimo} \\ f(5,5) = 2000 \\ f(5,6) = 2600 \\ f(2,6) = 3200 \text{ Máximo} \\ f(1,5) = 2800 \end{cases}$$

El mínimo es 400 y se alcanza en el punto $B(4,2)$ y el máximo es de 3200 y se alcanza en el punto $E(2,6)$.

2.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.18.4 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16; \quad x + y \leq 11; \quad x + 2y \geq 6; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

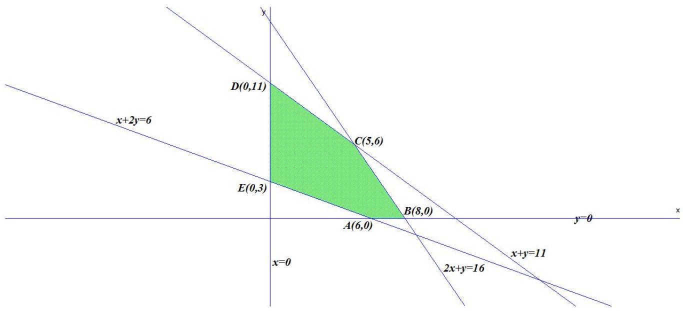
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4,4)$ a S?

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 3x + y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 3x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} 2x + y \leq 16 \\ x + y \leq 11 \\ x + 2y \geq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6,0)$, $B(8,0)$, $C(5,6)$, $D(0,11)$ y $E(0,3)$:
El punto $(4,4)$ está dentro de esta región, es decir, cumple todas las restricciones, $(4,4) \in S$.

b)

$$\begin{cases} f(6,0) = 18 \\ f(8,0) = 24 \text{ Máximo} \\ f(5,6) = 21 \\ f(0,11) = 11 \\ f(0,3) = 3 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo es 3 y se alcanza en el punto $E(0,3)$ y el máximo es de 24 y se alcanza en el punto $B(8,0)$.

2.19. Año 2018

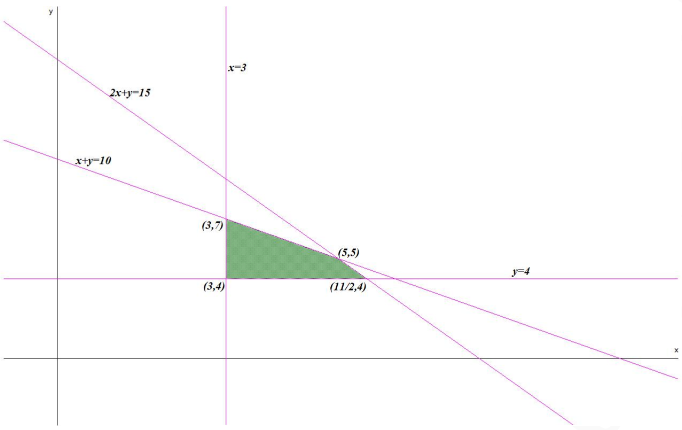
2.19.1. Modelo

Opción A

Problema 2.19.1 *(2 puntos)* Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público, el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros. Determínense los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.
Solución:
Sea x el precio del vino blanco e y el precio del tinto.

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 250x + 500y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(3,4)$, $(11/2,4)$, $(5,5)$, y $(3,7)$:

b)

$$\begin{cases} f(3,4) = 2750 \\ f(11/2,4) = 3375 \\ f(5,5) = 3750 \\ f(3,7) = 4250 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio es 4250 euros y se alcanza vendiendo la botella de vino blanco a 3 euros y la de tinto a 7 euros.

2.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.19.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

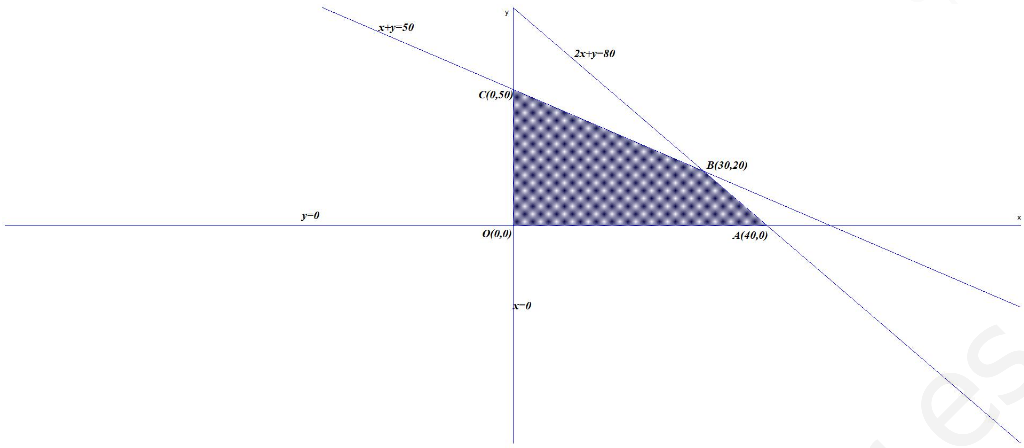
$$x + y \leq 50, \quad 2x + y \leq 80, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Solución:

a) $S : \begin{cases} x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(30,20)$, y $C(0,50)$



b) $f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 200 \\ f(30,20) = 230 \ \text{Máximo} \\ f(0,50) = 200 \end{cases}$$

El máximo es 230 y se alcanza en el punto $B(30,20)$.

2.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.19.3 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

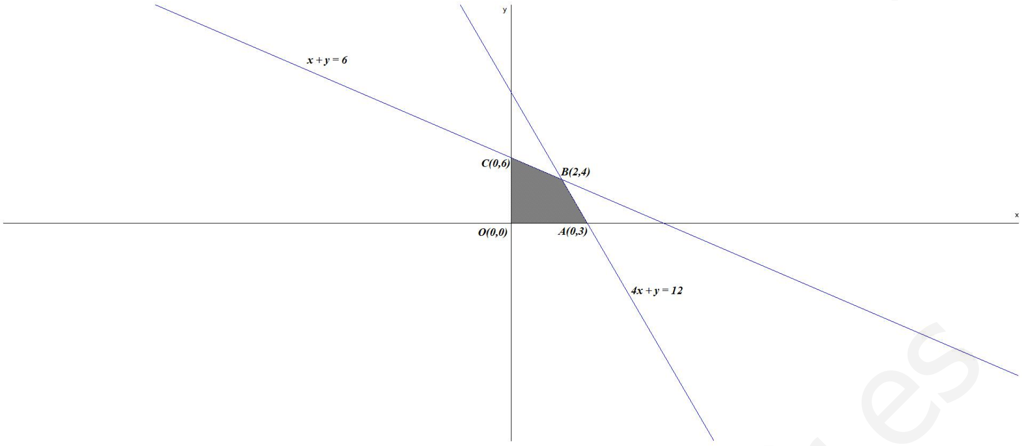
$$x + y \le 6, \quad 4x + y \le 12, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = \dfrac{8x+3y}{5}$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) $S: \begin{cases} x + y \le 6 \\ 4x + y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$



La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(2,4)$, y $C(0,6)$

b) $f(x,y) = \dfrac{8x+3y}{5}$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \ \text{Mínimo} \\ f(3,0) = 24/5 \\ f(2,4) = 28/5 \ \text{Máximo} \\ f(0,6) = 18/5 \end{cases}$$

El máximo es $28/5$ y se alcanza en el punto $B(2,4)$. El mínimo es 0 y se alcanza en el punto $O(0,0)$.

2.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.19.4 *(2 puntos)* Considérese la región del plano S definida por:

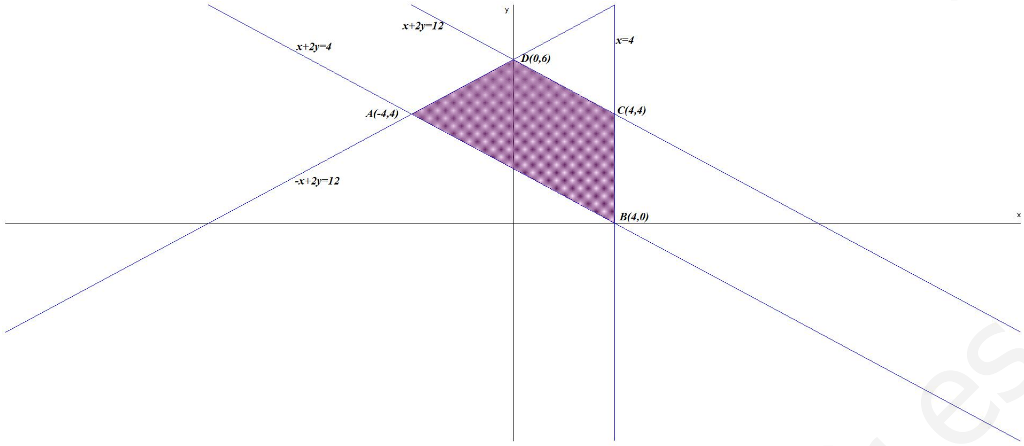
$$S = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ x + 2y \geq 4, \ x + 2y \leq 12, \ x \leq 4, \ -x + 2y \leq 12\right\}.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

Solución:

a) $S : \begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \leq 4 \\ -x + 2y \leq 12 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $A(-4,4)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, y $D(0,6)$



b) $f(x,y) = 3x - y$

$$\begin{cases} f(-4,4) = -16 \text{ Mínimo} \\ f(4,0) = 12 \text{ Máximo} \\ f(4,4) = 8 \\ f(0,6) = -6 \end{cases}$$

El máximo es 12 y se alcanza en el punto $B(4,0)$, mientras que el mínimo se alcanza en el punto $A(-4,4)$ con un valor de -16.

2.20. Año 2019

2.20.1. Modelo

Opción A

Problema 2.20.1 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$-2x + 3y \le 4; \quad 2x + y \ge 4; \quad 2x - y \le 4.$$

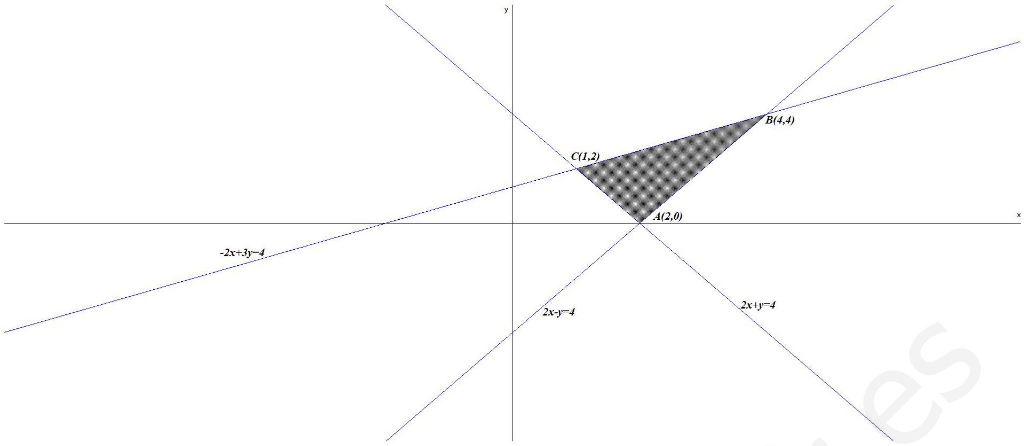
a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = 0,5x + \frac{1}{3}y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 0,5x + \frac{1}{3}y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} -2x + 3y \le 4 \\ 2x + y \ge 4 \\ 2x - y \le 4 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(2,0)$, $B(4,4)$ y $C(1,2)$:

b)
$$\begin{cases} f(2,0) = 1 \ \text{Mínimo} \\ f(4,4) = 10/3 \ \text{Máximo} \\ f(1,2) = 7/6 \end{cases}$$

El máximo es $10/3$ y se alcanza en el punto $B(4,4)$ mientras que el mínimo es de 1 y se alcanza en el punto $A(2,0)$.

2.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 2.20.2 *(2 puntos)* Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

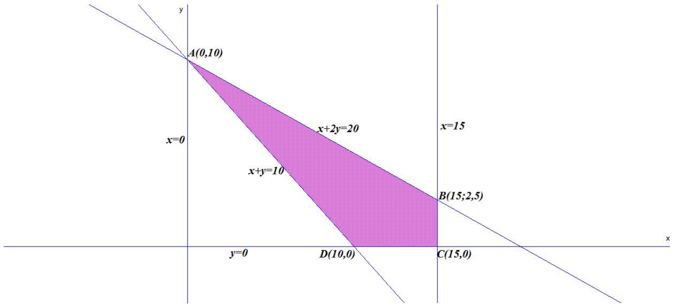
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución:

x: litros de helado e y litros de horchata.

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 25x + 12y$ calculando su máximo,, sujeto a las restricciones (Región factible):
$$S : \begin{cases} x + y \geq 10 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(0,10)$, $B(15;5/2)$, $C(15,0)$ y $D(10,0)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,10) = 120 \\ f(15;5/2) = 405 \ \text{Máximo} \\ f(15,0) = 375 \\ f(10,0) = 250 \end{cases}$$

El máximo es 405 euros y se alcanza en el punto $B(15;5/2))$ lo que supone preparar 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata.

2.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.20.3 *(2 puntos)* Para el mantenimiento de las piscinas de cierto hotel se quiere utilizar cloro de disolución lenta (CL) y cloro estabilizado (CE). El hotel quiere que la cantidad de cloro que se use en la temporada de verano, sea como mucho 500 kg y la cantidad de cloro de disolución lenta sea mayor que la cantidad de cloro estabilizado al menos en 100 kg. No podrán utilizarse más de 350 kg de cloro de disolución lenta ni menos de 100 kg de cloro estabilizado. Cada kg de cloro de disolución lenta cuesta 30 euros, mientras que cada kg de cloro estabilizado cuesta el doble.

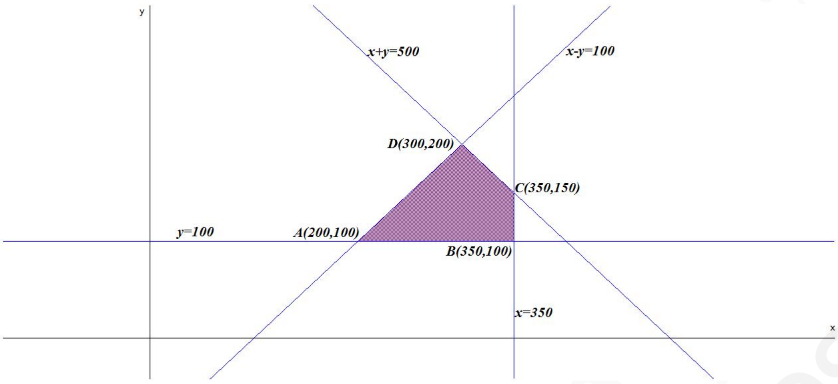
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Se desea que el gasto, respetando las características anteriores, sea el mínimo posible. Determínense las cantidades de cloro de cada tipo que deben usarse para minimizar los costes. Obténgase el valor del coste mínimo.

Solución:
x: Kg de cloro de disolución lenta (CL) e y kg de cloro estabilizado (CE).

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 30x + 60y$ calculando su mínimo,, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \le 500 \\ x \ge y + 100 \\ x \le 350 \\ y \ge 100 \\ x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 500 \\ x - y \ge 100 \\ x \le 350 \\ y \ge 100 \\ x \ge 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(200, 100)$, $B(350; 100)$, $C(350, 150)$ y $D(300, 200)$:

b)

$$\begin{cases} f(200, 100) = 12000 \text{ Mínimo} \\ f(350; 100) = 16500 \\ f(350, 150) = 19500 \\ f(300, 200) = 21000 \end{cases}$$

El mínimo gasto es de 12000 euros y se alcanza con el consumo de 200 kg de de disolución lenta (CL) y 100 kg de cloro estabilizado (CE).

2.20.4. Extraordinaria

Opción B

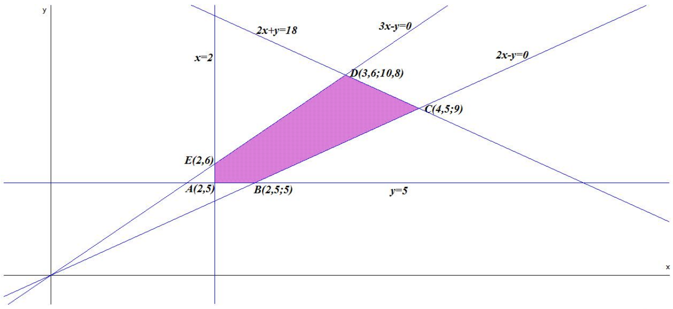
Problema 2.20.4 *(2 puntos)* Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Solución:
Sea x: ancho e y: largo.

$$\begin{cases} 1000x + 500y \le 9000 \\ y \ge 2x \\ y \le 3x \\ x \ge 2 \\ y \ge 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \le 18 \\ 2x - y \le 0 \\ 3x - y \ge 0 \\ x \ge 2 \\ y \ge 5 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(2,5)$, $B(2,5;5)$, $C(4,5;9)$, $D(3,6;10,8)$ y $E(2,6)$. El mayor ancho lo tiene el punto $C(4,5;9)$ con 4,5 m y un coste de $f(4,5;9) = 9000$ euros. ($f(x,y) = 1000x + 500y$)

2.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.20.5 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

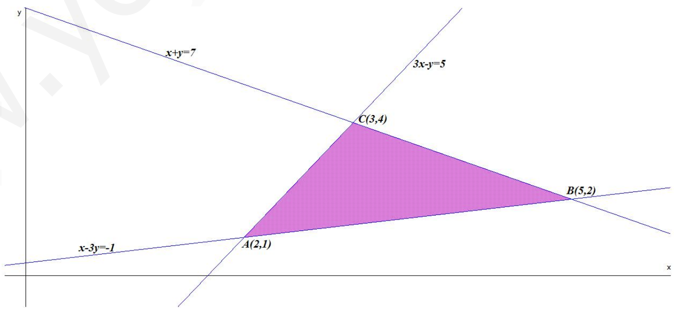
$$3x - y \geq 5, \quad 3y - x \geq 1, \quad y + x \leq 7$$

a) Represéntese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de la función $f(x,y) = x + 4y$ en S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $A(2,1)$, $B(5,2)$ y $C(3,4)$



b) $f(x,y) = x + 4y$ en S: $\left\{\begin{array}{l} f(2,1) = 6 \\ f(5,2) = 13 \\ f(3,4) = 19 \end{array}\right. \Longrightarrow$ El valor máximo será de 19 y se alcanza en el punto $C(3,4)$.

2.21. Año 2020

2.21.1. Ordinaria

Opción B

Problema 2.21.1 *(2 puntos)* La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \;\; 0 \leq y \leq 15, \;\; y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \;\; y - x \leq 10, \;\; y + 20 \geq 2x$$

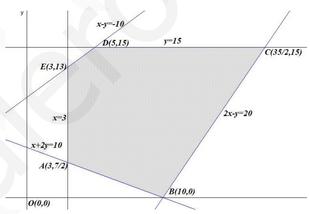
a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \\ y - x \leq 10 \\ y + 20 \geq 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$, $B(10, 0)$, $C\left(\frac{35}{2}, 15\right)$, $D(5, 15)$ y $E(3, 13)$.

b) La función objetivo $f(x, y) = x + y$ sobre los vértices da los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 6,5 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(10, 0) = 10 \\ f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = 32,5 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(5, 15) = 20 \\ f(3, 13) = 16 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C\left(\frac{35}{2}, 15\right)$ con un valor de 32,5 y el mínimo en el punto $A\left(3, \frac{7}{2}\right)$ con un valor de 6,5.

2.21.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 2.21.2 *(2 puntos)* Considere la región del plano S definida por

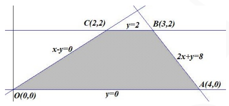
$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(2, 2)$



b) $f(x, y) = 4x - y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(4,0) = 16 \\ f(3,2) = 10 \\ f(2,2) = 6 \end{cases} \Longrightarrow$ El valor máximo será de 16 y se alcanza en el punto $A(4, 0)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

2.21.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.21.3 *(2 puntos)* Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x número de m^3 de tipo A e y número de m^3 de tipo B.

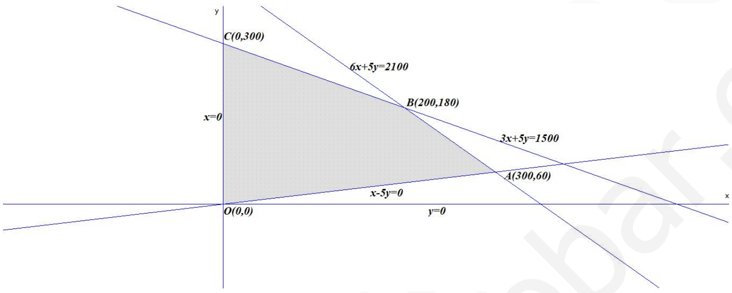
a) Podemos construir la siguiente tabla:

	tierra vegetal	horas de trabajo
A	60	30
B	50	50
Totales	≤ 21000	≤ 15000

La región factible será:

$$\begin{cases} 60x + 50y \leq 21000 \\ 30x + 50y \leq 15000 \\ x \leq 5y \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x + 5y \leq 2100 \\ 3x + 5y \leq 1500 \\ x - 5y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,60)$, $B(200,180)$ y $C(0,300)$



b) $f(x,y) = 50x + 60y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(300,60) = 18600 \\ f(200,180) = 20800 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,300) = 18000 \end{cases} \Longrightarrow$ El beneficio máximo será de 20800 € y se alcanza con 200 m^3 de A y 180 m^3 de B.

2.22. Año 2021

2.22.1. Modelo

Opción B

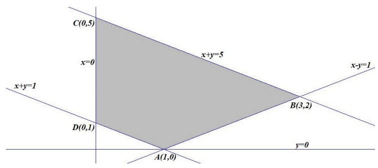
Problema 2.22.1 *(2 puntos)* Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.

La región factible es:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$

La función objetivo es $f(x,y) = 200x + 60y \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1,0)=200\\ f(3,2)=720\\ f(0,5)=300\\ f(0,1)=60 \end{array}\right. \Longrightarrow$$ El máximo beneficio será de 720 euros que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

2.22.2. Ordinaria

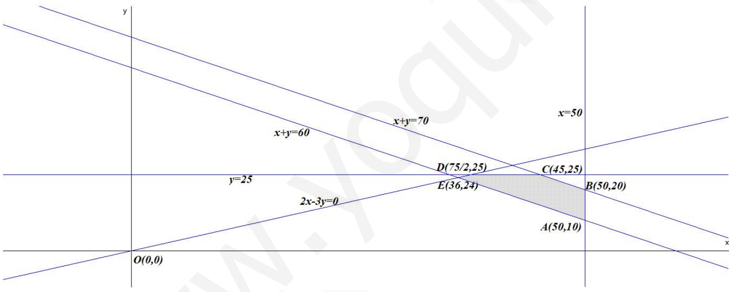
Opción B

Problema 2.22.2 *(2 puntos)* Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución:

Sea x : nº de kg de almendras e y : nº de kg de avellanas. La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x\geq 1,5y\\ x+y\geq 60\\ x+y\leq 70\\ x\leq 50\\ y\leq 25\\ x\geq 0\\ y\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3y\geq 0\\ x+y\geq 60\\ x+y\leq 70\\ x\leq 50\\ y\leq 25\\ x\geq 0\\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



- Los vértices a estudiar serán: $A(50,10)$, $B(50,20)$, $C(45,25)$, $D(75/2,25)$ y $E(36,24)$

- La función objetivo: $f(x,y)=x+2y$ en S:

$$\left\{\begin{array}{l} f(50,10)=70\\ f(50,20)=90\\ f(45,25)=95\ \text{Máximo}\\ f(75/2,25)=175/2\\ f(36,24)=84 \end{array}\right.$$

El máximo beneficio será de 95 € y se alcanza con 45 kg de almendras y 25 kg de avellanas.

2.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción B

Problema 2.22.3 *(2 puntos)* Se pide

a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

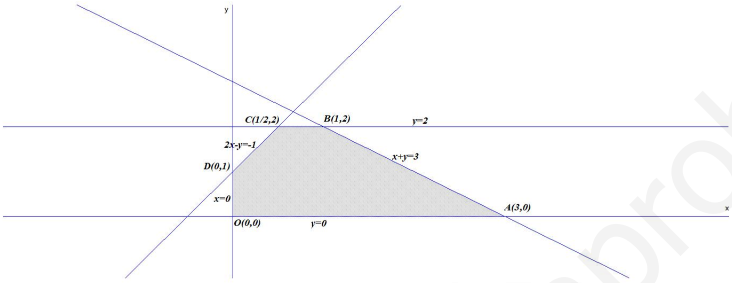
$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3 \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2)$, $C(1/2, 2)$ y $D(0, 1)$



b) $f(x, y) = x + y$ en S: $\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(3,0) = 3 \\ f(1,2) = 3 \\ f(1/2,2) = 5/2 \\ f(0,1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$

El valor máximo será de 3 y se alcanza en cualquier punto del segmento que une los puntos $A(3, 0)$ y $B(1, 2)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

2.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 2.22.4 *(2 puntos)* Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

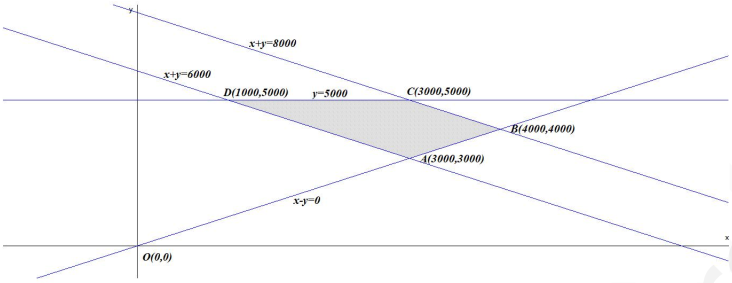
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Solución:
Sean x metros del modelo A2020 e y metros del modelo B2020.

a) Región factible:

$$\begin{cases} x+y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ x+y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6000 \leq x+y \leq 8000 \\ x-y \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 5000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(3000, 3000)$, $B(4000, 4000)$, $C(3000, 5000)$ y $D(1000, 5000)$



b) La función objetivo es $f(x, y) = 2x + 0,5y$ en S:

$$\begin{cases} f(3000, 3000) = 7500 \\ f(4000, 4000) = 10000 \\ f(3000, 5000) = 8500 \\ f(1000, 5000) = 4500 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor mínimo será de 4500€ y se alcanza fabricando 1000 metros del modelo A2020 y 5000 metros del modelo B2020.

2.23. Año 2022

2.23.1. Modelo

Opción A

Problema 2.23.1 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 3, \quad 2x + y \leq 8, \quad x + 2y \leq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

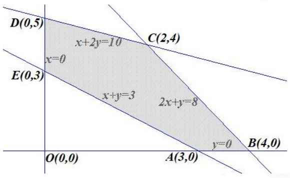
a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

Solución:

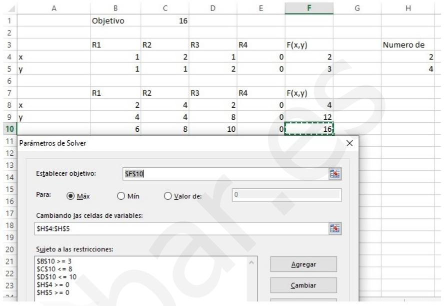
a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x+y\geq 3 \\ 2x+y\leq 8 \\ x+2y\leq 10 \\ x,y\geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,4)$, $D(0,5)$ y $E(0,3)$

Solución por solver



b) La función objetivo es $f(x,y)=2x+3y\Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(3,0)=6 \\ f(4,0)=8 \\ f(2,4)=16 \\ f(0,5)=15 \\ f(0,3)=9 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C(2,4)$ con un valor de 16.