Capítulo 3

Análisis

3.1. Año 2000

3.1.1. Modelo

Opción A

Problema 3.1.1 *(3 puntos)*

a) Calcúlense p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto $(-2, 1)$ y presente un mínimo en $x = -3$.

b) Hállese el área del recinto acotado delimitado por la curva $y = x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

Solución:

a) $f(x) = x^2 + px + q$ y $f'(x) = 2x + p$

$$\begin{cases} f(-2) = 1 \Longrightarrow 4 - 2p + q = 1 \\ f'(-3) = 0 \Longrightarrow -6 + p = 0 \end{cases} \begin{cases} q = 9 \\ p = 6 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) Calculamos las abscisas de los puntos de corte de la curvas:

$$x^2 + 4x + 5 = 5 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -4$$

Luego el área será:

$$S = \left| \int_{-4}^{0} (f(x) - g(x))dx \right| = |F(0) - F(-4)|$$

$$F(x) = \int (x^2 + 4x)dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2$$

$$S = |F(0) - F(-4)| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.1.2 *(3 puntos)* El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2}$$

donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.
Calcúlese:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población. ¿Cuál será el tamaño de ésta?

c) ¿Cuál será el tamaño de la población a largo plazo?

Solución:

a) Si $t = 0 \Longrightarrow P(0) = 15$ millones de individuos.

b)

$$P'(t) = \frac{2(t - 15)}{(t + 1)^3} = 0 \Longrightarrow t = 15$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 15)$	$(15, \infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$	$+$
$P(t)$	Creciente	Decreciente	Creciente

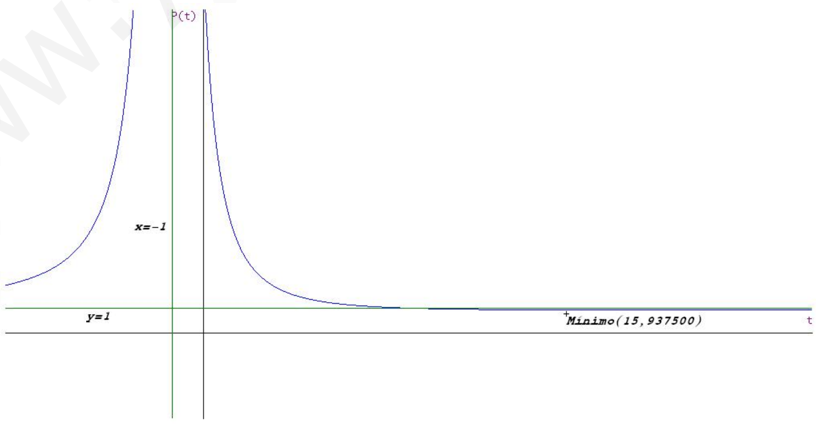
En el punto $t = -1$ no hay ni máximo ni mínimo por dos razones, en ese punto se anula el denominador (posible asíntota vertical), y además en ese punto no se anula la primera derivada. El único extremo está en el punto de abscisa $t = 15$, donde la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, se trata de un mínimo. Podemos asegurar que el mínimo de población se alcanza transcurridos 15 años. Esa cantidad mínima de individuos será

$$f(15) = 0,9375 \Longrightarrow 937500 \,\text{individuos}$$

c) Esta claro que, lo que nos piden analizar es si existe alguna asíntota horizontal:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{15 + t^2}{(t + 1)^2} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

A largo plazo la cantidad de población se estabilizará en torno a millón de individuos. Veamos una gráfica de la función:



3.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.1.3 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x\le 2\\[2ex] \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x=2$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=3$.

c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x+2}{x-1}=4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{3x^2-2x}{x+2}=2$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x=2$ (hay un salto).

b)

$$\text{Si } x=3\Longrightarrow f(x)=\frac{3x^2-2x}{x+2}\Longrightarrow f(3)=\frac{21}{5}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2}\Longrightarrow f'(3)=\frac{59}{25}$$

La recta tangente será:

$$y-\frac{21}{5}=\frac{59}{25}(x-3)$$

c) Cuando $x>2$: La ecuación es $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-2x}{x^2+2x}=3$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-8x}{x+2}=-8$$

Luego en esta rama la recta $y=3x-8$ es una asíntota oblicua.

Cuando $x\le 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$$

luego tiene una asíntota horizontal en $y=1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

Opción B

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Sea la función dependiente de los parámetros a y b.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si} \quad x \le 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ bx - 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Halla los valores de a y b para que la función sea continua en el conjunto R de los números reales.

b) Representa gráficamente para los valores $a = 0$ y $b = 3$.

c) Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, halla el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

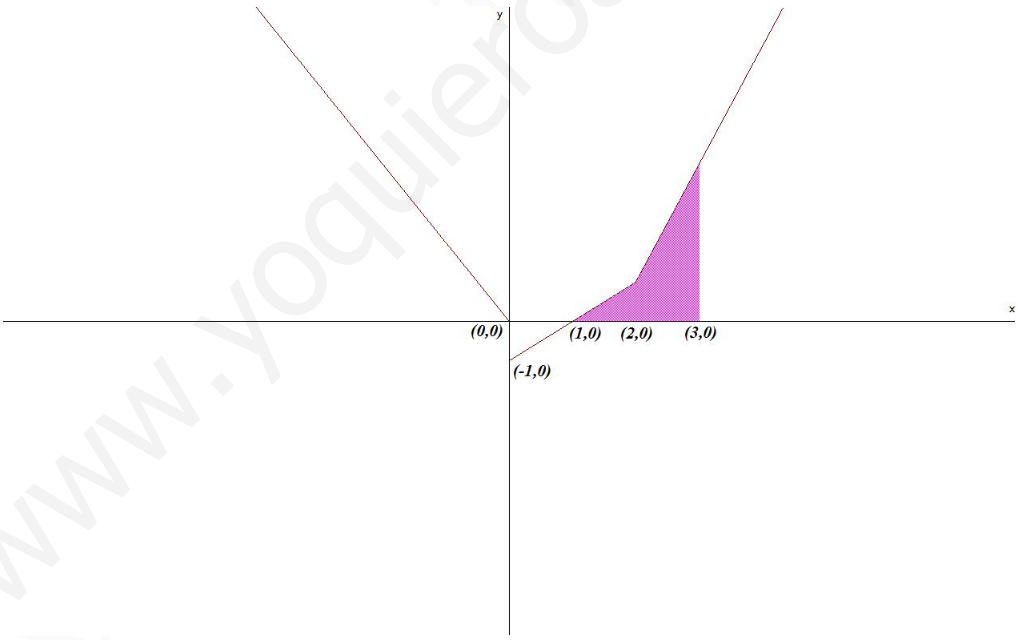
a)
- En $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (-2x - a) = -a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (x - 1) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 1$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (x - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} (bx - 5) = 2b - 5 \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3$$

b) La representación sería:



Para $a = 0$ y $b = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ 3x - 5 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

c)

$$S = \int_1^2 (x-1)\,dx + \int_2^3 (3x-5)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 5x\right]_2^3 = 3\ u^2$$

3.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.1.5 *(3 puntos)* Dada la función definida en los números reales salvo en $x = 0$

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

Calcular

a) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) El área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $f(x)$ y el semieje OX.

Solución:

a)

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

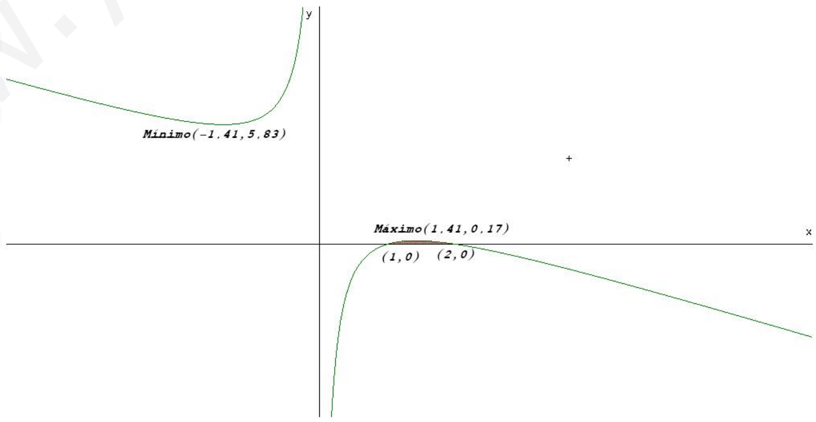
Luego en $(-\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ hay un mínimo y en $(-\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$ hay un máximo.

b) La función corta con el eje de abscisas en los puntos:

$$3 - x - \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad x = 2$$

Los límites de integración serán los extremos del intervalo $(1, 2)$.

$$S = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln|x|\right]_1^2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$$



Opción B

Problema 3.1.6 *(3 puntos)* Dada la función

$$s(t) = \frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2}$$

definida en los reales, salvo en $t = -2$

a) El valor positivo de t en el que se hace cero la función

b) El valor positivo de t en el que $s(t)$ se hace máximo.

c) Las asíntotas de $s(t)$.

Solución:

a)

$$\frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2} = 0 \Longrightarrow t = -1, \ \ t = 34$$

El valor pedido es $t = 34$.

b)

$$s'(t) = -\frac{10(t^2 + 4t - 32)}{(t + 2)^2} = 0 \Longrightarrow t = -8, \ \ t = 4$$

El valor positivo sería t=4, pero hay que comprobar si es máximo:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, 4)$	$(4, \infty)$
$s'(x)$	$-$	$+$	$-$
$s(x)$	decrece	crece	decrece

En el punto $t = 4$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, estamos ante un máximo.

c)

- Verticales en $t = -2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{t \longrightarrow -2^-} \frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2} = \left[\frac{-360}{0^-}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{t \longrightarrow -2^+} \frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2} = \left[\frac{-360}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales no hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2} = \infty$$

- Oblicuas $y = mt + n$

$$m = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{340 + 330t - 10t^2}{t^2 + 2t} = -10$$

$$n = \lim_{t \longrightarrow \infty} \left(\frac{340 + 330t - 10t^2}{t + 2} + 10t\right) = 350$$

$$y = -10t + 350$$

3.2. Año 2001

3.2.1. Modelo

Opción A

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de t horas viene dado por $N(t) = 2t(t-10)^2 + 50$.

a) Calcúlense la función derivada $N'(t)$.

b) Durante las 10 primeras horas, ¿en qué instantes se alcanzan la población máxima y mínima?

c) Esbócese la gráfica de $N(t)$ en el intervalo $[0, 10]$.

Solución:

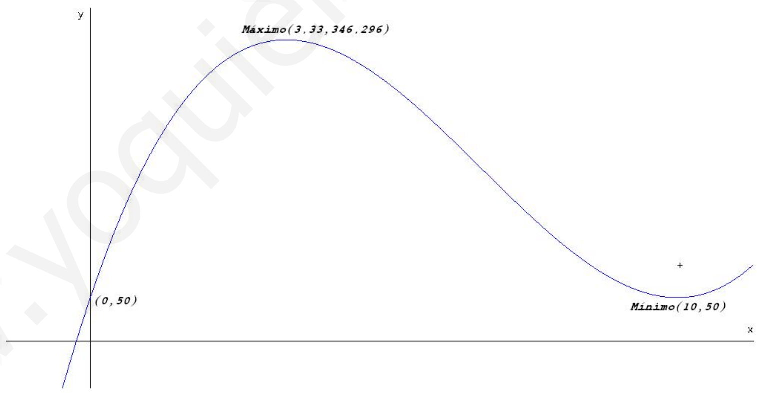
a) $N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100)$

b) $N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100) = 0 \Longrightarrow t = 10$ y $t = 10/3$:

	$(0, 10/3)$	$(10/3, 10)$	$(10, \infty)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	Crece	Decrece	Crece

Luego la función tiene un máximo en el punto $(3{,}33, 346{,}296)$ y un mínimo en el punto $(10, 50)$.

c) La representación gráfica es



Opción B

Problema 3.2.2 *(3 puntos)* La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes propiedades:

☛ Pasa por $(0, 0)$

☛ Tiene mínimo local en $(1, -1)$

a) Obténgase el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $g(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

Solución:

a) Tenemos $f(x) = ax^3 + bx + c$ y $f'(x) = 3ax^2 + b$

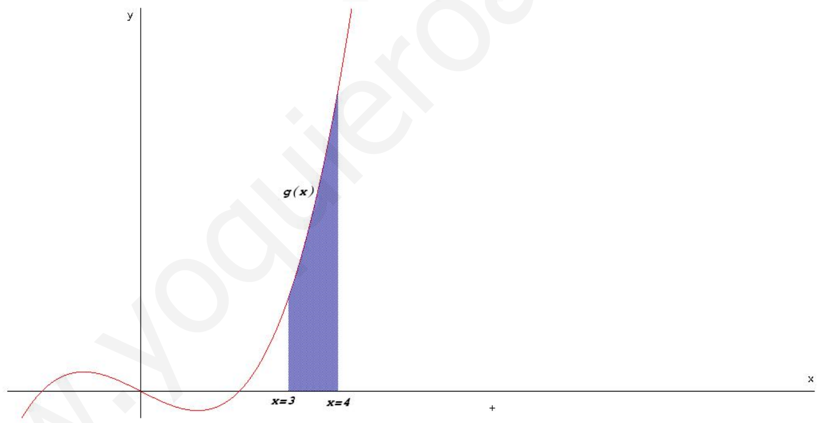
- Pasa por $(0, 0) \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$
- Tiene mínimo local en $(1, -1)$:
  - Pasa por $(1, -1) \Longrightarrow f(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c = -1$
  - Tiene mínimo local en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0$

Luego

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 1/2 \\ b = -3/2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

b) Primero encontramos los puntos de corte de g en el intervalo $[3, 4]$: $g(x) = x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = \pm 2 \Longrightarrow$ No hay ninguno. Luego

$$S = \left| \int_3^4 (x^3 - 4x)dx \right| = \left| \left. \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_3^4 \right| = \left| \frac{119}{4} \right| = \frac{119}{4}\, u^2$$

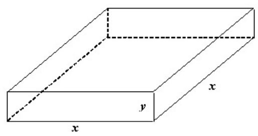


3.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen 500 cm^3, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

Solución:



$$V = x^2y = 500 \Longrightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$S(x, y) = x^2 + 4xy \Longrightarrow S(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 10$$

Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = 2 - \frac{4000}{x^3} \Longrightarrow S''(10) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 10$. Las cajas tendrán de dimensiones: $x = 10\,cm$ e $y = 5\,cm$.

Opción B

Problema 3.2.4 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

a) Determínense sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcúlense sus puntos de inflexión.

c) Esbócese su gráfica.

Solución:

a)

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -2$$

$$f''(x) = 2x + 1 \Longrightarrow \begin{cases} f''(1) = 3 > 0 \Longrightarrow \Longrightarrow \text{Mínimo } \left(1, -\frac{1}{6}\right) \\ \\ f''(-2) = -3 < 0 \Longrightarrow \Longrightarrow \text{Máximo } \left(-2, \frac{13}{3}\right) \end{cases}$$

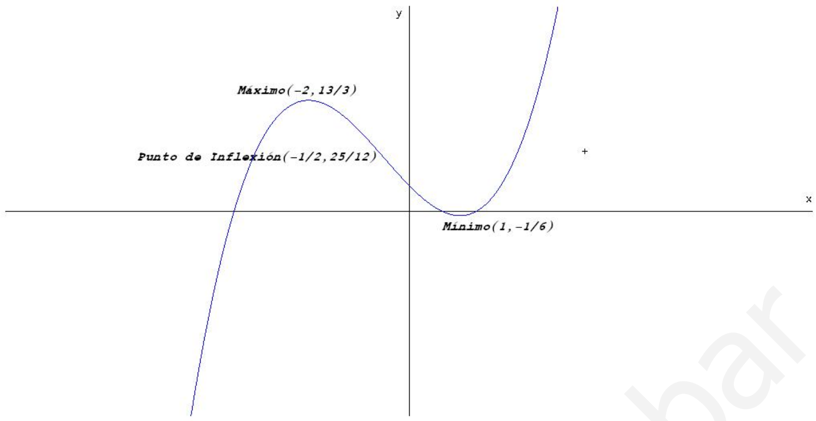
b)

$$f''(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = 2 \Longrightarrow f'''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$$

Luego la función tiene un punto de inflexión en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{12}\right)$

c) la gráfica es



3.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.2.5 *(3 puntos)* Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$.

a) Determínese a, b y c, sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2, -3)$ y $(1, 0)$.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto $(-2, -3)$.

c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) $f(-2) = -3 \Longrightarrow 4 - 2a + b = -3$, $f(1) = 0 \Longrightarrow 1 + a + b = 0$, de estas dos ecuaciones obtenemos que $a = 2$ y $b = -3$.

$g(1) = 0 \Longrightarrow -1 + c = 0 \Longrightarrow c = 1$

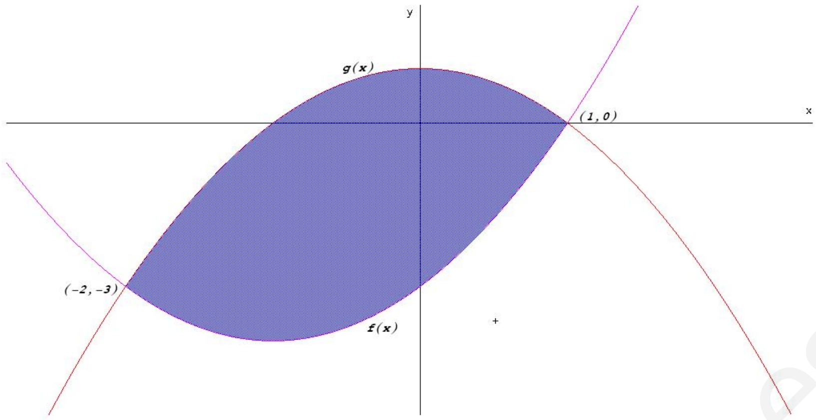
Las funciones son

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = -x^2 + 1$$

b) $g'(x) = -2x \Longrightarrow m = g'(-2) = 4$, $g(-2) = -3$. Luego:

$$y + 3 = 4(x + 2) \text{ Recta Tangente}$$

c) Los puntos de corte están en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$, que serán los límites de integración:



$$S = \left| \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$\int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x - 3 + x^2 - 1)\, dx = \int_{-2}^{1} (2x^2 + 2x - 4)\, dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x \right]_{-2}^{1} = -9$$

$$S = |-9| = 9\ u^2$$

El motivo por el que sale negativa la integral es porque la gráfica de la función g está por encima de la de f.

Opción B

Problema 3.2.6 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Calcúlese

a) Los intervalos donde es creciente y decreciente.

b) Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

c) El valor de x para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

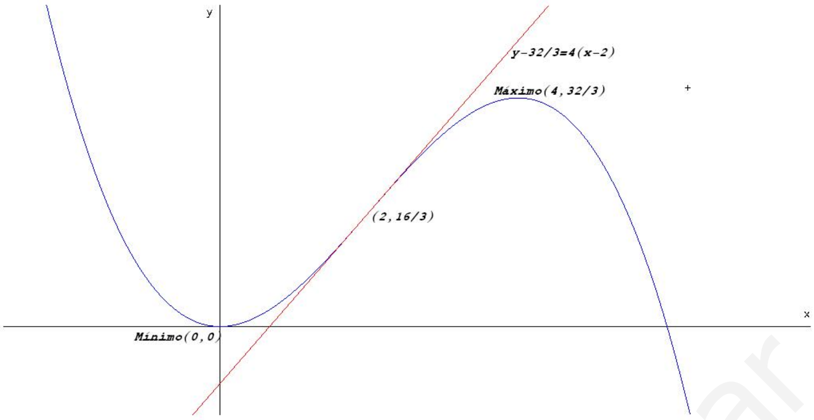
a)

$$f'(x) = 4x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente

b) Tiene un Mínimo en el punto $(0, 0)$ y un Máximo en el punto $(4, 32/3)$.

c) La representación gráfica sería



Llamamos función pendiente a $m(x) = 4x - x^2 \Longrightarrow m'(x) = 4 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$$m''(x) = -2 \Longrightarrow m''(2) = -2 < 0$$

Luego en $x = 2$ la función pendiente es máxima, que corresponde al punto $(2, 16/3)$.

3.3. Año 2002

3.3.1. Modelo

Opción B

Problema 3.3.1 *(3 puntos)*

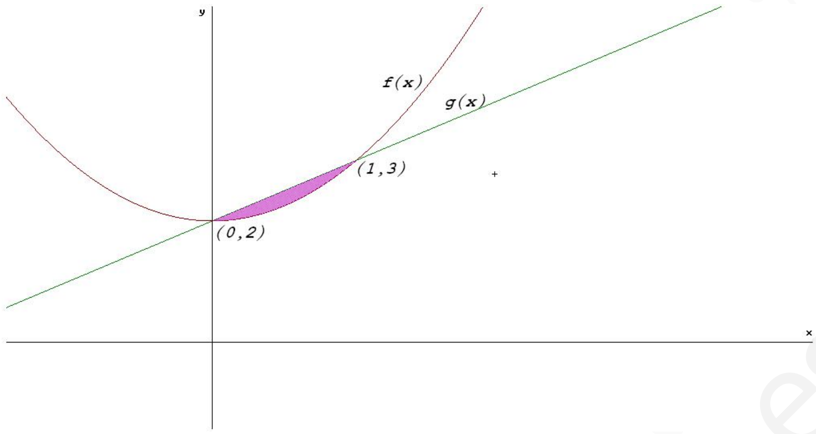
a) Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las siguientes curvas:

$$\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2 \\ g(x) = x + 2 \\ \text{siendo } 0 \le x \le 2 \end{array}$$

b) Calcular el área de dicho reciento anterior.

Solución:

a) El recinto es el siguiente:



b) El área está encerrada en el intervalo $[0, 1]$:

$$S = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx \right| = \left| \int_0^1 (x^2 - x)\,dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}\ u^2$$

3.3.2. Ordinaria

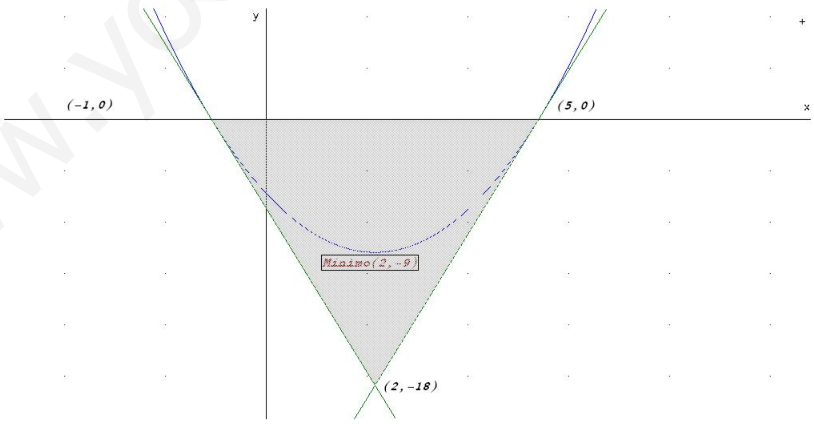
Opción A

Problema 3.3.2 *(3 puntos)*

a) Hallar las coordenadas del mínimo de la curva $y = x^2 - 4x - 5$.

b) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva dada en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

Solución:



a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$, como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0$ luego en $x = 2$ hay un mínimo.

b) Los puntos de corte de la curva con el eje OX son:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 5 \Longrightarrow (-1, 0), \ (5, 0)$$

Calculamos las rectas tangentes a la curva en esos puntos:

En el punto $(-1, 0)$:

$$m = f'(-1) = -6 \Longrightarrow y = -6(x + 1)$$

$$m = f'(5) = 6 \Longrightarrow y = 6(x - 5)$$

Estas dos rectas se cortan en el punto

$$\begin{cases} y = -6(x+1) \\ y = 6(x-5) \end{cases} \Longrightarrow (2, -18)$$

La base del triángulo mide 6 y la altura 18, luego su área será

$$\acute{A}rea = \frac{6 \cdot 18}{2} = 54 \ u^2$$

Opción B

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación

$$y = x^3 - 4x$$

a) Hallar las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Representar gráficamente la curva.

c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje OX.

Solución:

a) Puntos de corte con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \ \ x = \pm 2$.

Puntos de corte con el eje OY, hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 0$.

Los puntos de corte son: (0,0), (-2,0) y (2,0).

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

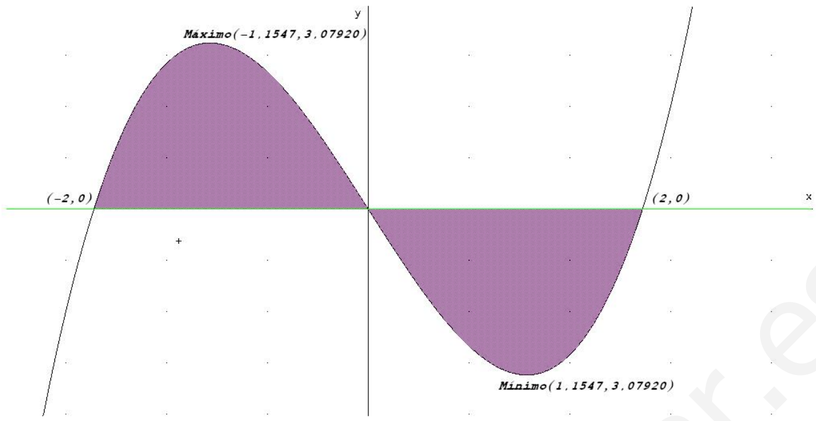
.

	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

En $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego es un máximo.

En $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego es un mínimo.

b) Representación gráfica:



c) Como la curva es simétrica

$$\acute{A}rea = 2\left|\int_0^2 (x^3-4x)\,dx\right| = 2\left|\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right]_0^2\Bigg| = 2|-4| = 8\,u^2$$

3.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = \frac{3x^2-ax}{x+2}$$

a) Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x=2$.

b) Hallar las asíntotas de la curva $y=f(x)$ para $a=3$

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2+12x-2a}{(x+2)^2}$, como $f'(2)=0 \Longrightarrow a=18 \Longrightarrow f''(2)=96/64>0 \Longrightarrow$ hay un mínimo.

b) Con $a=3$ tenemos

$$f(x) = \frac{3x^2-3x}{x+2}$$

Verticales: En $x=-2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{3x^2-3x}{x+2} = \left[\frac{18}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{3x^2-3x}{x+2} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-3x}{x+2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + 2x} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{3x^2 - 3x}{x + 2} - 3x\right) = -9$$

$$y = 3x - 9$$

Opción B

Problema 3.3.5 *(3 puntos)* Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a$

b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3$

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = a \Longrightarrow a = 2\ln 2$

b) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1}\,dx = 3 \Longrightarrow \ln(a+1) = 3 \Longrightarrow a = e^3 - 1$

c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+a}\,dx = 5 \Longrightarrow \ln\left(\frac{a+3}{a}\right) = 5 \Longrightarrow a = \frac{3}{e^5 - 1}$

3.4. Año 2003

3.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 3.4.1 *(3 puntos)* Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^2 - x - 6$.
Calcular:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Los extremos relativos de $g(x)$, si existen.

c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$

b) $g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ $g''(x) = 2$ luego $g''(1/2) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $(1/2, -25/4)$ la función tiene un mínimo.

c) El área sería

$$\acute{A}rea = \int_3^6 (x^2 - 9)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^6 = 36\ u^2$$

Opción B

Problema 3.4.2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

Solución:

a) La función es creciente en todo el dominio de f, es decir, en $R - \{-1, 1\}$.

b) Verticales:
En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = \infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x}{1 - x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Oblicuas: No hay

c) $f(0) = 0$, $m = f'(0) = 1 \Longrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Longrightarrow y = x$

3.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{x^2}$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

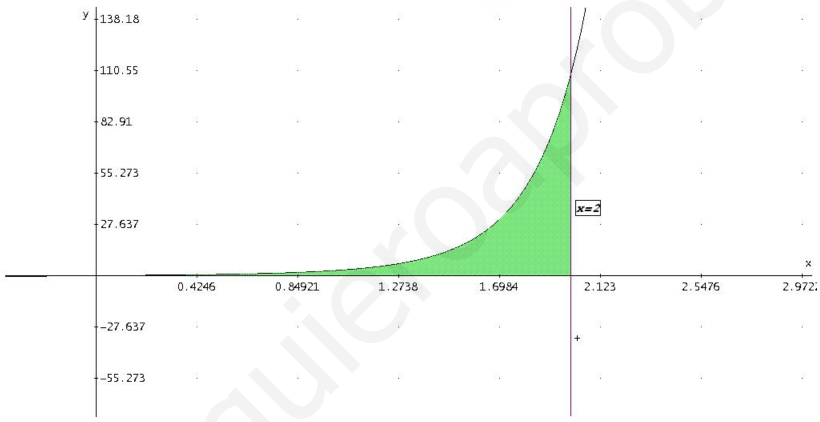
b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

Solución:

a) $f(1) = e$, $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} \Longrightarrow f'(1) = 3e$

$$y - e = 3e(x - 1)$$

b) El dibujo sería



$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}$$

Opción B

Problema 3.4.4 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{2x^2 + 2x - 12}$
Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas si las hubiera.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{-3, 2\}$

b) En $x = -3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty$$

Discontinua inevitable, hay un salto, es una asíntota. En $x = 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} -x^2+12x^2+2x-12 = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

Discontinua inevitable, hay un salto, es una asíntota. La función es continua en el todo el dominio de f, es decir, en $R - \{-3, 2\}$.

c) Verticales: Por el apartado anterior, hay dos asíntotas en $x = 2$ y en $x = -3$.

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Oblicuas: No hay

3.5. Año 2004

3.5.1. Modelo

Opción A

Problema 3.5.1 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

a) Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Esbozar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$Dom(f) = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Luego la función decrece en el intervalo $(-1,0) \cup (0,1)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1,-2)$ y tiene un mínimo en el punto $(1,2)$.

b)

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

Como $f''(x) \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

c) Para dibujar la gráfica vamos a calcular las asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

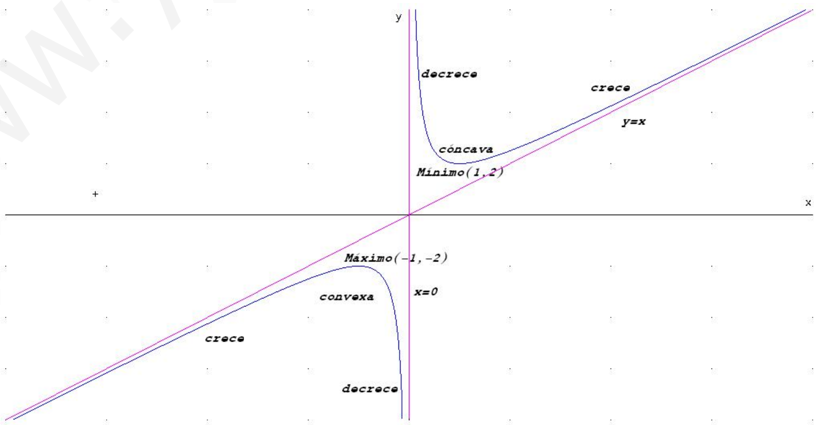
- Oblicuas: $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = 0$$

La ecuación de la asíntota es $y = x$

d) Representación gráfica:



Opción B

Problema 3.5.2 *(3 puntos)* Para cada valor de a se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln x$$

a) Calcular el valor del parámetro real a sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$. Clasificar el extremo.

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $a = 3$.

c) Hallar las asíntotas.

Observación: La notación ln representa logaritmo neperiano.

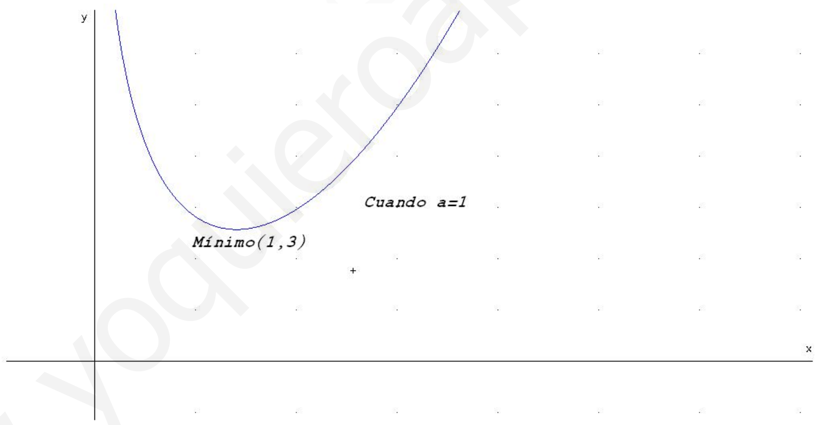
Solución:

a)

$$f'(x) = 2 + 2ax - \frac{4}{x}, \quad \text{como } f'(1) = 0 \Longrightarrow 2 + 2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

$$f'(x) = 2 + 2x - \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = -2$$

Como $x = -2$ no pertenece al $Dom(f)$ no es extremo. En $x = 1$:



	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(1,\infty)$).
Luego la función decrece en el intervalo $(0,1)$.
La función tiene un mínimo en el punto $(1,3)$.

b) Si $a = 3 \Longrightarrow f(x) = 2x + 3x^2 - 4\ln x$

$$f'(x) = 2 + 6x - \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = \frac{2}{3}$$

Como $x = -1$ no pertenece al $Dom(f)$ no es extremo. En $x = 2/3$:

	$(0, 2/3)$	$(2/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego la función crece en el intervalo $(2/3, \infty))$.
Luego la función decrece en el intervalo $(0, 2/3)$.

c) Ásíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \text{No existe}$$

- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}(2x + 3x^2 - 4\ln x) = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

- Oblicuas: $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{2x + 3x^2 - 4\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty$$

No hay asíntotas oblicuas.

3.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Calcular la integral definida

$$\int_{-1}^{1}(|x| + x + 1)\,dx$$

Nota.- La notación $|x|$ representa el valor absoluto de x.
Solución:

$$\int_{-1}^{1}(|x| + x + 1)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x + x + 1)\,dx + \int_{0}^{1}(x + x + 1)\,dx =$$

$$\int_{-1}^{0}dx + \int_{0}^{1}(2x + 1)\,dx = x\big]_{-1}^{0} + x^2 + x\big]_{0}^{1} = 1 + 2 = 3$$

Opción B

Problema 3.5.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

a) Determinar su dominio de definición.

b) Obtener sus asíntotas.

Solución:

a) Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Dom f = (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [2,\infty)$

b) **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right] = +\infty \Longrightarrow x = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right] = +\infty \Longrightarrow x = -1$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

3.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.5.5 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0$$

a) Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.

b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{a} - 2ax + 5 \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 3, \;\; a = -\dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 6x + 5 \Longrightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 5, \;\; x = 1$

$$f''(x) = 2x - 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(5) = 4 > 0 \Longrightarrow \left(5, \dfrac{5}{3}\right) \text{ Mínimo} \\ f''(1) = -4 < 0 \Longrightarrow \left(1, \dfrac{37}{3}\right) \text{ Máximo} \end{cases}$$

Opción B

Problema 3.5.6 *(3 puntos)* Sean las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x - 8; \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$$

a) Calcular

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)}$$

b) Calcular el recinto acotado limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{-\frac{x^2}{2} + x + 4} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{2(x^2 - 2x - 8)}{-x^2 + 2x + 8} = -2$$

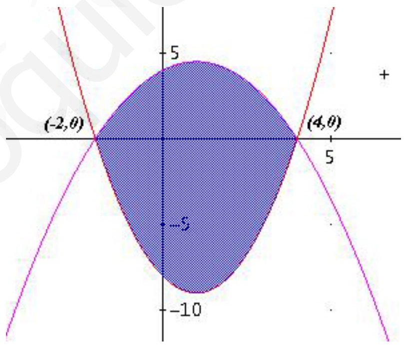
b)

$$x^2 - 2x - 8 = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \Longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4, \quad x = -2$$

$$\int_{-2}^{4} \left[x^2 - 2x - 8 - \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4\right)\right] dx = \int_{-2}^{4} \frac{3(x^2 - 2x - 8)}{2} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right)\Big]_{-2}^{4} = -54$$

$$S = |-54| = 54\, u^2$$



3.6. Año 2005

3.6.1. Modelo

Opción A

Problema 3.6.1 *(3 puntos)* Sea la función: $f(x) = x^3 - 3x$

a) Calcular sus extremos y sus puntos de inflexión.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$.

Solución:

a)

$$f'(x)=3x^2-3=0 \Longrightarrow x=-1,\ \ x=1$$

$$f''(x)=6x \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(-1)=-6<0 \Longrightarrow \text{Máximo en } x=-1 \\ f''(1)=6>0 \Longrightarrow \text{Mínimo en } x=1 \end{array}\right.$$

$$f''(x)=6x=0 \Longrightarrow x=0$$

Como $f'''(x)=6 \Longrightarrow f''(0)=6\neq 0 \Longrightarrow$ hay un punto de inflexión en $x=0$

b)

$$x^3-3x=0 \Longrightarrow x=0,\ \ x=-\sqrt{3},\ \ x=\sqrt{3}$$

$$I_1=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{4}$$

$$I_2=\int_{0}^{1/2}(x^3-3x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1/2}=-\frac{23}{64}$$

$$S=|I_1|+|I_2|=\frac{5}{4}+\frac{23}{64}=\frac{103}{64}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.6.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2x^2-3x+1 & \text{si} & x\leq 1 \\ \ln x & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=1$.

b) Esbozar su gráfica.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en $x=1$.

Solución:

a)

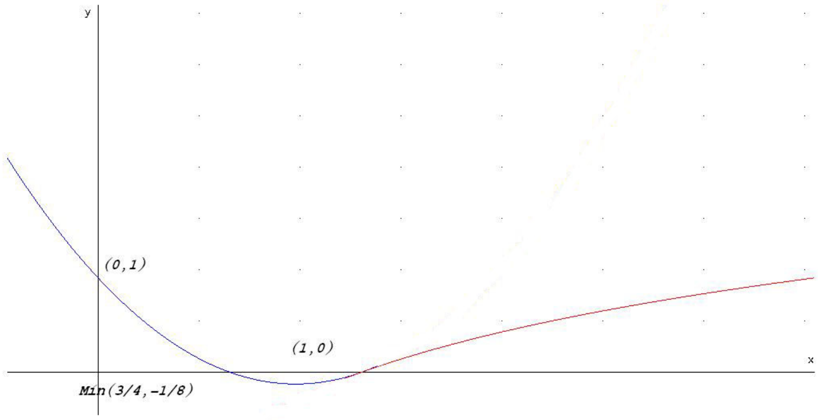
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2x^2-3x+1)=0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\ln x=0 \\ \\ f(1)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

b)

$$f'(x)=4x-3=0 \Longrightarrow x=\frac{3}{4}$$

$$f''(x)=4 \Longrightarrow f''(3/4)=4>0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Luego hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$



Hay puntos de corte en:

Con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1,0)$ y $(1/2,0)$.
Con el eje OX, hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,1)$.

c) En $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0$.

$$f'(x) = 4x - 3 \Longrightarrow m = f'(1) = -3$$

$$y = -3(x - 1) \Longrightarrow 3x + y - 3 = 0$$

3.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* La función:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

Solución:
Calculamos la primera derivada para obtener los puntos extremos

$$B'(x) = \frac{16 - x^2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 4$$

Calculamos la segunda derivada para decidir que valor es máximo o mínimo

$$B''(x) = -\frac{32}{x^3} \Longrightarrow \begin{cases} B''(4) = -\dfrac{32}{4^3} < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ \\ B''(-4) = -\dfrac{32}{(-4)^3} > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

En $x = 4$ hay un máximo que nos determina un beneficio

$$B(4) = \frac{-4^2 + 9 \cdot 4 - 16}{4} = 1$$

El máximo serían 4 artículos con un beneficio de 1.000 euros.

Opción B

Problema 3.6.4 *(3 puntos)*

a) Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 4$.

Solución:

a) Primero calculamos el punto de corte con el eje OY (de ordenadas), y para eso hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = e^2 \Longrightarrow (0, e^2)$.
Ahora calculamos la pendiente de la recta

$$f'(x) = -e^{2-x}, \quad m = f'(0) = -e^2$$

La recta será

$$y - e^2 = -e^2 x \Longrightarrow e^2 x + y - e^2 = 0$$

b) Primero tenemos que comprobar si la gráfica de esta función corta al eje de abscisas en el itervalo $[-1, 4]$, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 4$. Esto quiere decir que, tenemos un punto de corte en ese intervalo en $x = 0$. Calculamos:

$$\int_{-1}^{0} (x^2 - 4x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{7}{3}$$

$$\int_{0}^{4} (x^2 - 4x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{0}^{4} = -\frac{32}{3}$$

El área pedida será:

$$S = \left|\frac{7}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3}\right| = 13u^2$$

3.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.6.5 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Hallar las asíntotas de la curva.

Solución:

a)

$$y' = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow y - \frac{1}{2} = 1(x-1) \Longrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$$

b) Verticales no tiene, el denominador no se anula nunca.

Horizontales tampoco

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = 0$$

La asíntota es $y = x$.

Opción B

Problema 3.6.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$$

a) Hallar sus asíntotas.

b) Calcular sus máximos y sus mínimos relativos, si existen.

Solución:

a) Verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty \end{array} \right\} \Longrightarrow x = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty \end{array} \right\} \Longrightarrow x = -3$$

Las asíntotas verticales son $x = 3$, y $x = -3$.

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = 1$$

La asíntota horizontal es $y = 1$

Oblicuas: No hay por tener horizontales.

b)
$$f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

En el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, es un máximo.

3.7. Año 2006

3.7.1. Modelo

Opción A

Problema 3.7.1 *(3 puntos)* Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función
$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$
y el eje OX.

Solución:
$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = -4,\ x = -2,\ x = 1$$
$$S = \left|\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right|$$
$$\int f(x)\,dx = \int (x^3 + 5x^2 + 2x - 8)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + x^2 - 8x + C$$
$$\left|\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx\right| = \left|\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3}$$
$$\left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|-\frac{63}{4}\right| = \frac{63}{4}$$
$$Área = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$$

Opción B

Problema 3.7.2 *(3 puntos)* Calcular el valor de $a > 0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $y = x^3$, $y = ax$, sea igual a 4.

Solución:
$$x^3 = ax \Longrightarrow x = 0,\ \ x = -\sqrt{a},\ \ x = \sqrt{a}$$
$$S = \left|\int_{-\sqrt{a}}^{0} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\sqrt{a}} (f(x) - g(x))\,dx\right|$$
$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - ax)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} + C$$

$$\left|\int_{-\sqrt{a}}^{0}(f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|\frac{a^2}{4}\right| = \frac{a^2}{4}$$

$$\left|\int_{0}^{\sqrt{a}}(f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|-\frac{a^2}{4}\right| = \frac{a^2}{4}$$

$$\acute{A}rea = \frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = 4 \Longrightarrow a^2 = 8 \Longrightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

Como $a > 0$ la solución válida es $a = 2\sqrt{2}$.

3.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.7.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{3},\ \ x = \sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

En el punto $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ hay un Máximo.

En el punto $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ hay un Mínimo.

b)

$$x^3 - 9x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 3,\ x = -3$$

$$\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = \frac{81}{4}$$

$$\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3} = -\frac{81}{4}$$

$$\acute{A}rea = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.7.4 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2 + 8x$$

Se pide:

a) Calcular las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta
$$y = 2x$$

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación cartesiana
$$y = x + 8$$

Solución:

a)
$$f'(x) = 2x + 8 \Longrightarrow f'(a) = 2a + 8 = 2 \Longrightarrow a = -3, \ \ f(-3) = -15 \Longrightarrow$$
$$(-3, -15)$$

b)
$$x^2 + 8x = x + 8 \Longrightarrow x = 1, \ x = -8$$
$$\int_{-8}^{1} (x^2 + 7x - 8)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 8x\right]_{-8}^{1} = -\frac{243}{2}$$
$$Área = \frac{243}{2}\ u^2$$

3.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.7.5 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

Se pide:

a) Encontrar las asíntotas de la función.

b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$ y $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^-}\right] = +\infty \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^+}\right] = -\infty \quad \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2-16}{x^2-4} = \left[\frac{-12}{0^-}\right] = +\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-16}{x^2-4} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) Signo de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es positiva en $(-\infty,-4)\cup(-2,2)\cup(4,\infty)$

La función es negativa en $(-4,-2)\cup(2,4)$

Opción B

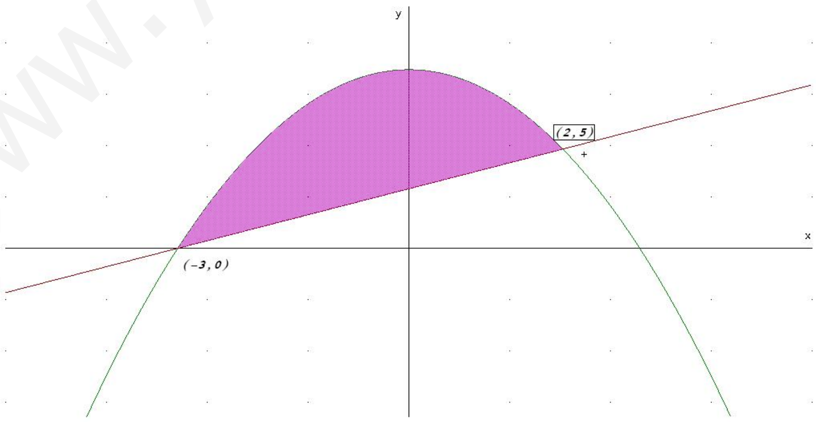
Problema 3.7.6 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2, \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

Solución:



Los puntos de corte de las dos gráficas son:

$$9 - x^2 = 3 + x \Longrightarrow x = -3, \quad x = 2$$

$$\left| \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\, dx \right| = \left| 6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{2} \right| = \frac{125}{6}$$

3.8. Año 2007

3.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

3.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.8.1 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

a) Determinar las asíntotas de la función.

b) Calcular sus máximos y sus mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{36}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{36}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2+3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-9x+9}{x+3} = -9$$

$$y = x - 9$$

b)

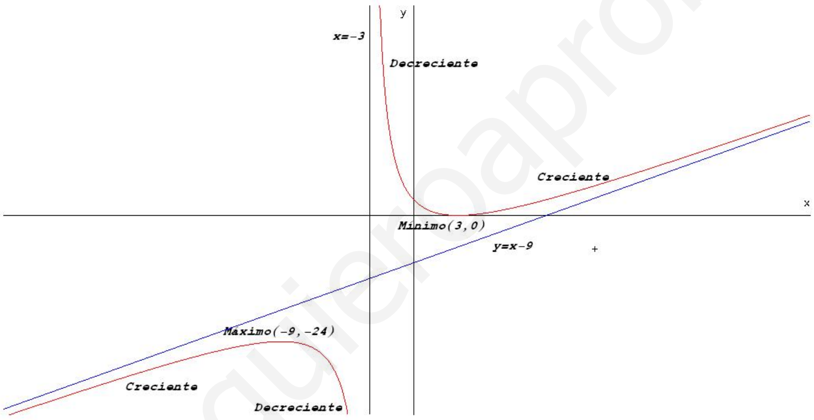
$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3, \;\; x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

Presenta un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en $(3, 0)$



Opción B

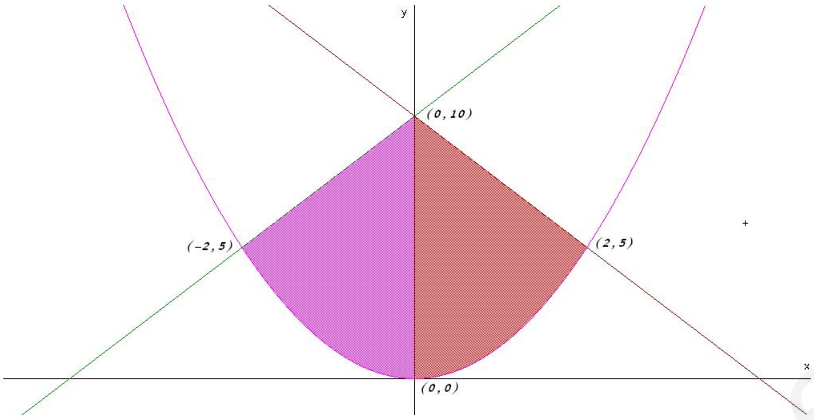
Problema 3.8.2 *(3 puntos)* Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2, \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20), \quad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

y obtener su área.

Solución:

Dibujamos las gráficas de f que es una parábola con vértice en el punto $(0, 0)$ y de las rectas g y h:



Igualando funciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) = h(x)$ obtenemos los límites de integración. Por observación del recinto vemos que es simétrico, bastaría calcular el área encerrada entre $x = 0$ y $x = 2$ y multiplicarla por 2:

$$\int_0^2 (h(x) - f(x))\, dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(-5x + 20) - \frac{5}{4}x^2 \right) dx =$$

$$= \left[-5\frac{x^3}{12} + 5\frac{x^2}{4} + 10x \right]_0^2 = \frac{65}{3} \Longrightarrow S = \frac{130}{3}\ u^2$$

3.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.8.3 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

a) Especificar el dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas si las hubiera.

Solución:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ x = 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{1, 2\}$

b) En $x = 1$:
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -1$$
Pero $f(1)$ no existe y por tanto se trata de una discontinuidad evitable. (La función tiene un agujero)

En $x = 2$:
$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty$$

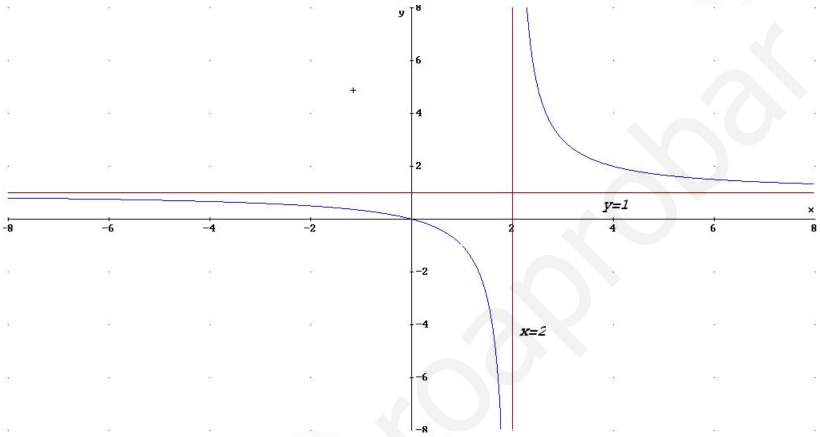
La discontinuidad en este caso es inevitable. (La función pega un salto)

c) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 2$ por lo visto anteriormente
- ☛ Horizontales: En $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales



Opción B

Problema 3.8.4 *(3 puntos)* La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- ☛ Pasa por el punto $(0, 0)$.
- ☛ Tiene un máximo local en el punto $(1, 2)$.

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.

Solución:

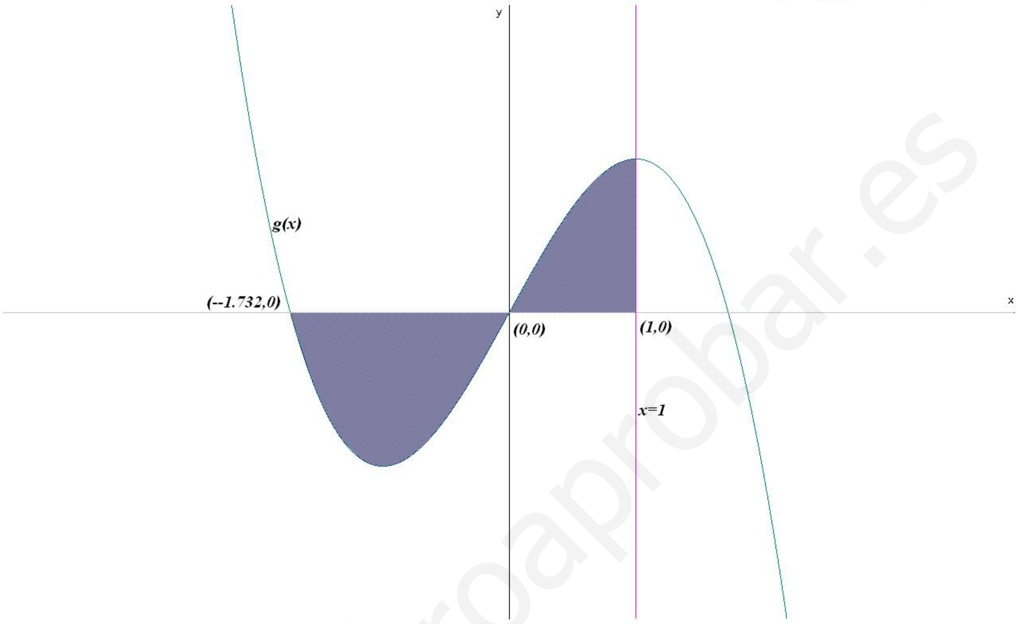
a) Tenemos:

- ☞ Pasa por el punto $(0, 0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
- ☞ Tiene un máximo local en el punto $(1, 2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \\ c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{cases} \Longrightarrow f(x)=-4x^3+6x^2$$

b) El recinto sería:



Calculamos los puntos de corte de la función g con el eje $OX \Longrightarrow -x^3+3x=0 \Longrightarrow x=0$, $x=-\sqrt{3}$ y $x=\sqrt{3}$. Luego los límites de integración serían los intervalos $[-\sqrt{3},0]$ donde la función es negativa y $[0,1]$ donde es positiva:

$$F(x)=\int(-x^3+3x)\,dx=-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}$$

$$S=|F(0)-F(-\sqrt{3})|+|F(1)-F(0)|=\left|-\frac{9}{4}\right|+\left|\frac{5}{4}\right|=\frac{7}{2}\ u^2$$

3.9. Año 2008

3.9.1. Modelo

Opción A

Problema 3.9.1 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$$

a) Calcular sus asíntotas y esbozar su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: Las únicas posibles son $x = \pm 2$

  En $x = 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$

  En $x = -2$:

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{3x^2}{x^2-4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

- ☛ Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = 3 \Longrightarrow y = 3$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontalesa

Para representar la función calculamos:

- ☛ Puntos de Corte: $(0, 0)$
- ☛ Monotonía:

$$f'(x) = -\frac{24x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

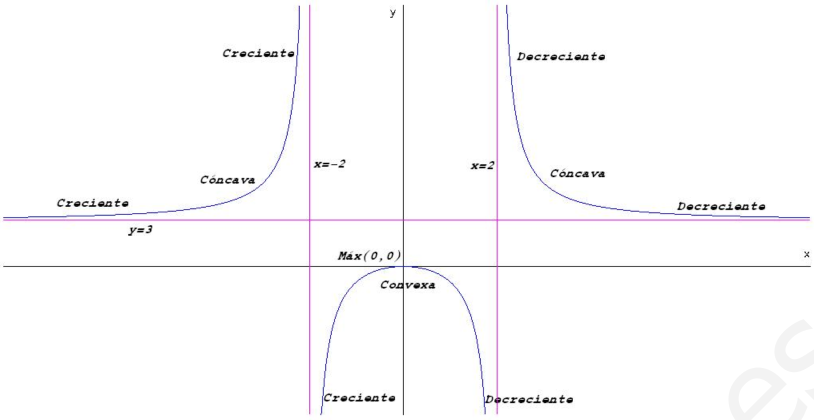
  Luego la función presenta un máximo en el punto $(0, 0)$.

- ☛ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{24(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- ☛ Representación gráfica:



b) El punto de tangencia es el $(0, 0)$ donde la función presenta un máximo y, por tanto, la tangente coincide con el eje de abscisas $y = 0$.

Opción B

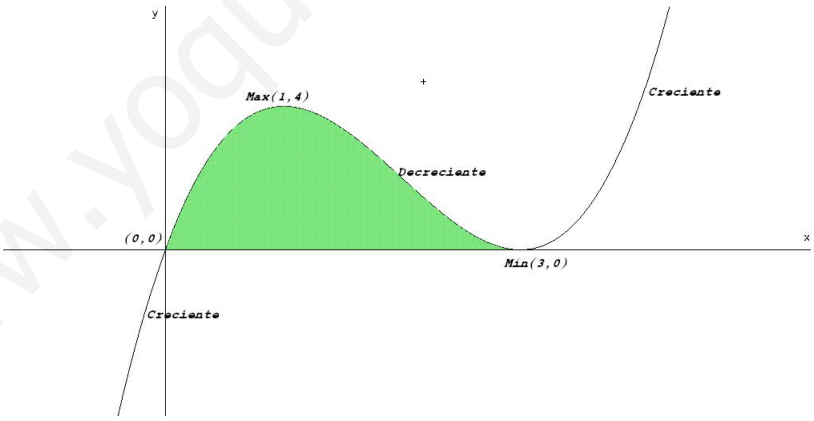
Problema 3.9.2 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por $f(x) = x^3-6x^2+9x$, se pide determinar:

a) Los puntos en los que la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

Solución:



a) Puntos de Corte:

- Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3 \Longrightarrow$ los puntos son $(0, 0)$ y $(3, 0)$.
- Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow$ el punto es el $(0, 0)$.

b) Monotonía:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función tiene un máximo en $(1, 4)$ y un mínimo en $(3, 0)$

c) El área encerrada se encuentra entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$:

$$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{4}\ u^2$$

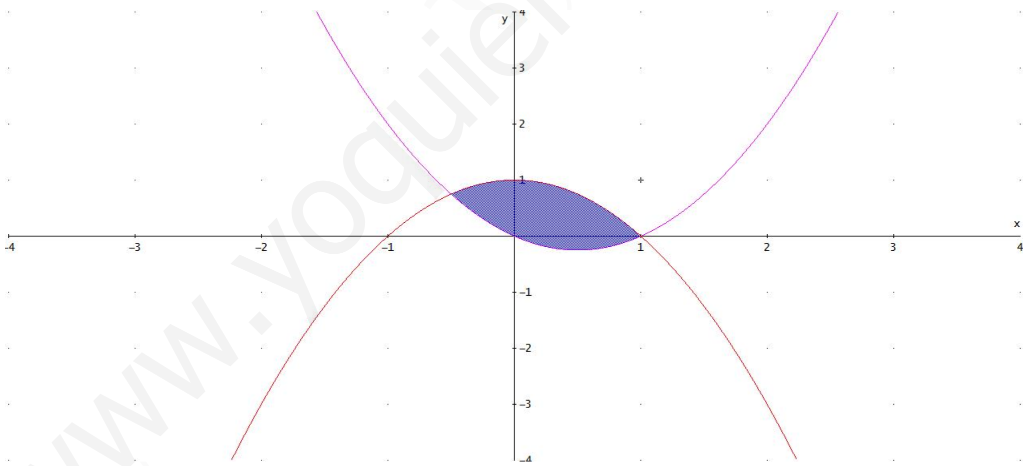
3.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.9.3 *(3 puntos)* Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 1 - x^2$$

Solución:



Buscamos los puntos de corte entre ambas gráficas

$$x^2 - x = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad x = 1$$

$$S = \left| \int_{-1/2}^{1} (2x^2 - x - 1)\, dx \right| = \left| \left. \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1/2}^{1} \right| = \frac{9}{8}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.9.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}, \quad x \neq 0$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + 2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No Hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 2}{x} = \infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x + 2}{x} = 1$$

$$y = x + 1$$

b)

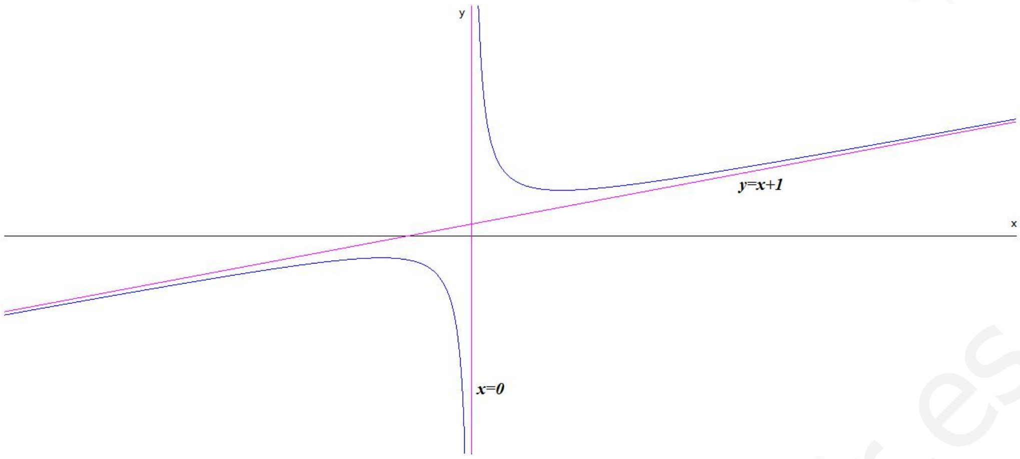
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{2}, \ \ x = \sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

Presenta un máximo en el punto $(-\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$ y un mínimo en $(\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$



c)

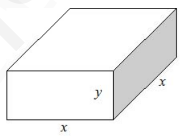
$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\,dx = 2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + x\Big]_1^2 = \frac{5}{2} + 2\ln 2$$

3.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.9.5 *(3 puntos)* Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

Solución:



$$V = x^2 y = 500 \Longrightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{2000}{x^2}$$

$$S(x) = x^2 + \frac{2000}{x^2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 10$$

	$(-\infty, 10)$	$(10, \infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decrece	crece

Las dimensiones son $x = 10$ dm e $y = 5$ dm.

Opción B

Problema 3.9.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}, \quad x \neq 2$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida $\int_3^5 (x^2-4)f(x)\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 2$ y $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontalesa

b)

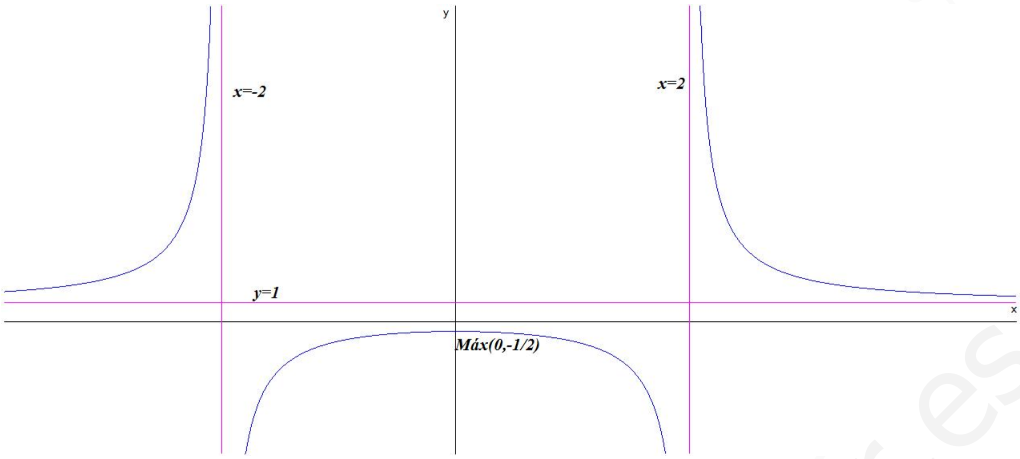
$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, 0)$

La función decrece en el intervalo: $(0, +\infty)$

Presenta un máximo en el punto $(0, -1/2)$



c)

$$\int_3^5 (x^2-4)f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2+2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}+2x\right]_3^5 = \frac{110}{3}$$

3.10. Año 2009

3.10.1. Modelo

Opción A

Problema 3.10.1 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx; \quad a, b \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a y b para que f tenga un máximo relativo en el punto $P(1,4)$?

b) Para $a = -2$, $b = -8$, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y determínense los puntos de inflexión de dicha gráfica.

c) Para $a = -2$, $b = -8$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ para que f tenga un máximo relativo en $P(1,4)$ tiene que ocurrir:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a+b+3=0 \\ f(1) = 4 \Longrightarrow a+b-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-6 \\ b=9 \end{array}\right.$$

La función es: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) Si $a = -2$ y $b = -8 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

☛ Puntos de corte:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0) \\ f(x) = 0 \Longrightarrow x^3-2x^2-8x=0 \Longrightarrow (0,0),\ (4,0),\ (-2,0) \end{array}\right.$$

☛ Puntos de Inflexión:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 8, \quad f''(x) = 6x - 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Como $f''(x) = 6 \Longrightarrow f''(2/3) = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ el punto$(2/3, -160/27)$ es un punto de inflexión. Otra manera de comprobarlo es:

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

En el punto de abscisa $x = 2/3$ la función pasa de ser convexa a ser cóncava y además hay continuidad en ese punto, lo que quiere decir que, se trata de un punto de Inflexión.

c) Si $a = -2$ y $b = -8 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

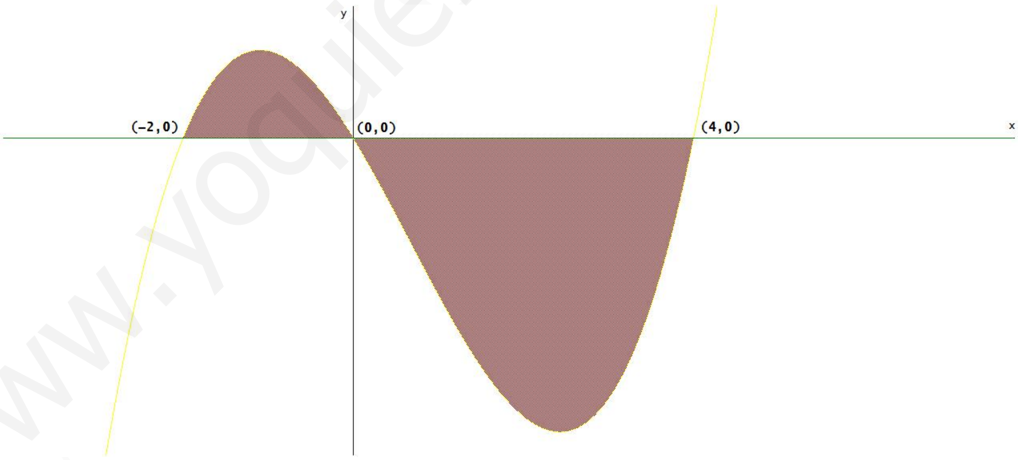
$$x^3 - 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = -2, \;\; x = 0, \;\; x = 4$$

Los límites de integración serán de $x = -2$ a $x = 0$ y de $x = 0$ a $x = 4$.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x^2 - 8x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \frac{20}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{4} (x^3 - 2x^2 - 8x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{4} = -\frac{128}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{148}{3}\, u^2$$



Opción B

Problema 3.10.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + a & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ -x^2 + 5x + b & \text{si} \quad x > 5 \end{cases} \qquad (a, b \in R)$$

a) Calcúlense los valores de a y b para que la f se continua en $x = 2$ y en $x = 5$.

b) Para $a = 1$ y $b = 6$, calcúlense las derivadas $f'(1)$ y $f'(7)$.

c) Para $a = 1$ y $b = 6$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_3^6 f(x)dx$

Solución:

a) ☛ En $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} (x + a) = 2 + a$$

Luego $4 = 2 + a \Longrightarrow a = 2$.

☛ En $x = 5$

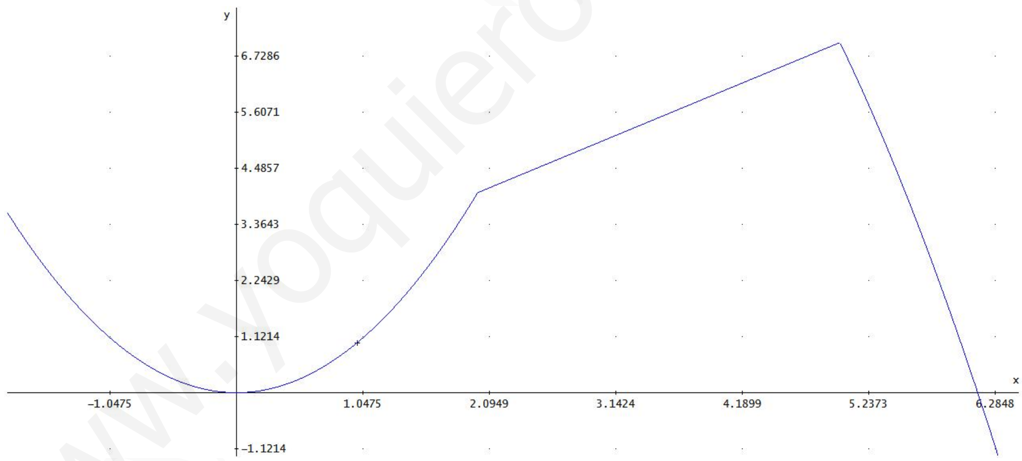
$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5} (x + a) = 5 + a$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 5} (-x^2 + 5x + b) = b$$

Luego $5 + a = b \Longrightarrow a - b = -5$.

☛

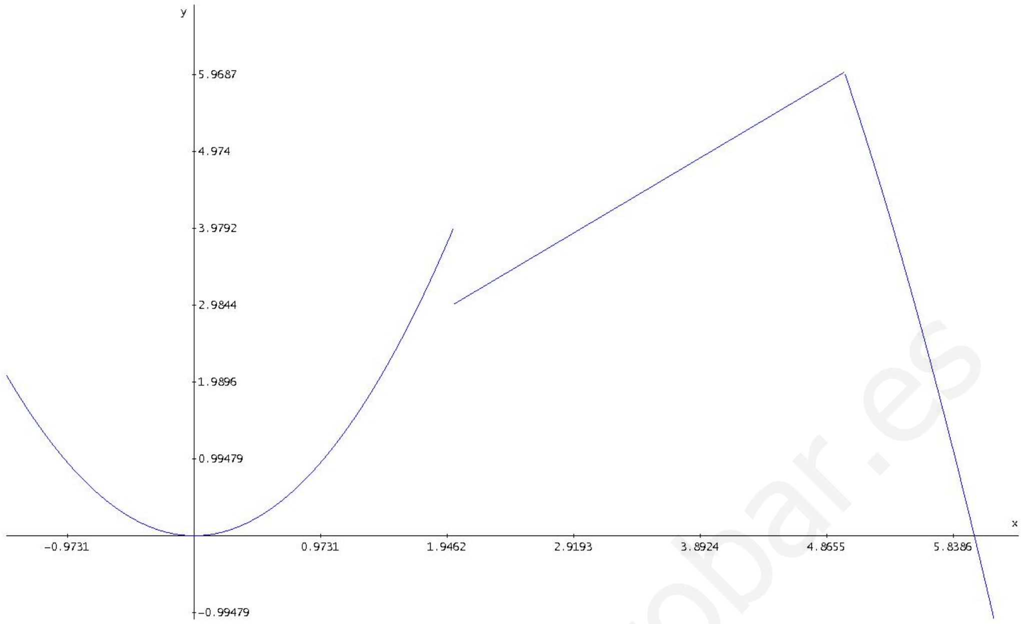
$$\begin{cases} a = 2 \\ a - b = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}$$



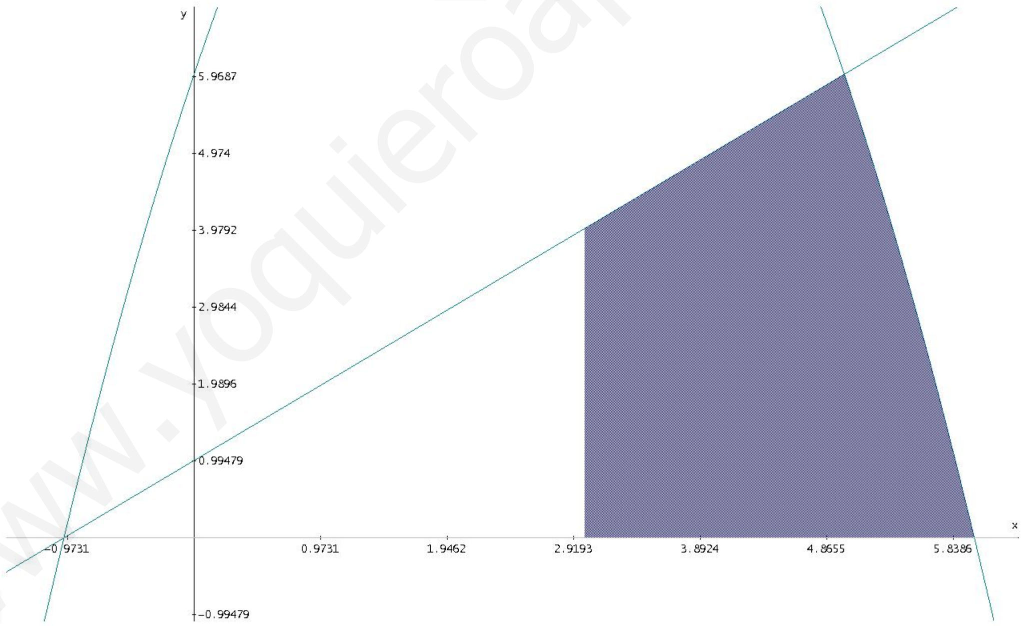
b) Si $a = 1$ y $b = 6$ tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ -x^2 + 5x + 6 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 5 \\ -2x + 5 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f'(7) = -9 \end{cases}$$



c) Si $a = 1$ y $b = 6$



$$\int_3^6 f(x) = \int_3^5 f(x) + \int_5^6 f(x) = \int_3^5 (x-1)\,dx + \int_5^6 (-x^2+5x+6)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^2}{2} - x\right]_3^5 + \left.\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_5^6 = \frac{55}{6}$$

3.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.10.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

a) Determínense los extremos relativos de f.

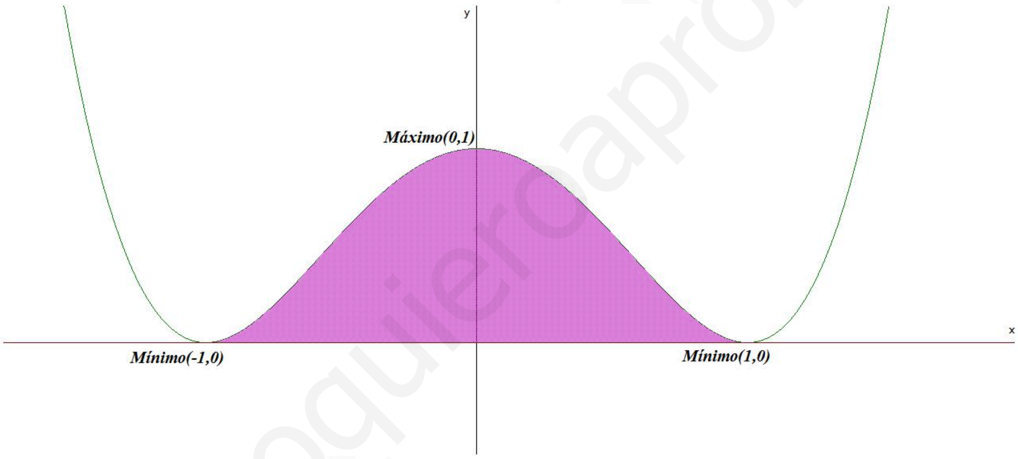
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



La función es creciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(0, 1)$ y dos mínimos en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) $a = 3 \Longrightarrow f(3) = 64$, $m = f'(3) = 96$. La ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 64 = 96(x - 3) \Longrightarrow 96x - y - 224 = 0$$

☛

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\ u^2$$

☛

$$S = |S_1| = \frac{16}{15}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.10.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x)\,dx = 0$

Solución:

a) Para que f tenga asíntotas verticales $x^2 - x - a = 0 \Longrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

- Si $a = -1/4$ la única asíntota vertical que hay es $x = \dfrac{1}{2}$
- Si $a < -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a < 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas verticales.
- Si $a > -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a > 0 \Longrightarrow$ hay dos asíntotas verticales:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$$

b)

$$\int_0^b \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \ln|x^2-x+1|\,]_0^b = \ln(b^2-b+1) = 0 \Longrightarrow$$

$$b^2 - b + 1 = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

3.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.10.5 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x + 24 & \text{si} & x \le -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} & -3 < x \le 2 \\ -x + 15 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$

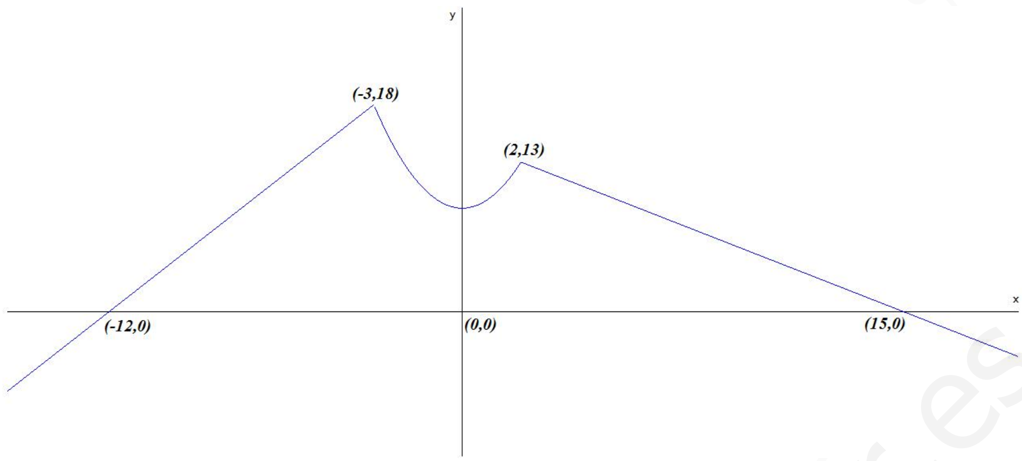
a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) La representación gráfica es:



b) En $x = 1$ la función es $f(x) = x^2 + 9 \Longrightarrow f'(x) = 2x$ tenemos $f(1) = 10$ y $m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 10 = 2(x - 1) \Longrightarrow y = 2x + 8$

c) Cálculo del área:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 + \int_{-3}^{2} (x^2 + 9)\, dx + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13 = 81 + \left[\frac{x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{2} + \frac{169}{2} = \frac{1333}{6}\, u^2$$

Opción B

Problema 3.10.6 *(3 puntos)* El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).

Solución:

a) para ello calculamos:

☞ Puntos de corte:

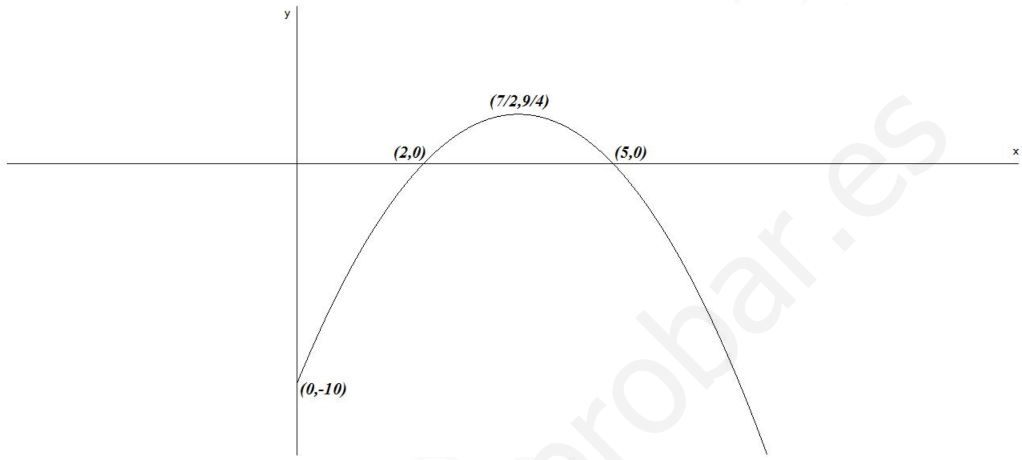
Con el eje de abscisas hacemos $x = 0 \Longrightarrow B(0) = -10 \Longrightarrow (0, -10)$

Con el eje de ordenadas hacemos $B(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5 \Longrightarrow (2, 0)$ y $(5, 0)$

☞ Máximos y mínimos:

$$B'(x) = -2x + 7 = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \Longrightarrow \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(7/2) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo}$$



b) El beneficio máximo es $B(7/2) = 9/4 \Longrightarrow$ 2250 euros con una producción de 7/2 hectolitros.

c) La producción debe de estar comprendida entre 2 y 5 hectolitros semanales.

3.11. Año 2010

3.11.1. Modelo

Opción A

Problema 3.11.1 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2$$

a) Calcúlense las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva propuesta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto $P(1, 1)$ y el eje OX.

Solución:

a) $y = x \Longrightarrow m = 1$:

$$y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

El punto es el $(a, f(a)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

b) Calculamos la recta tangente a la curva en el punto $(a, b) = (1, 1)$:

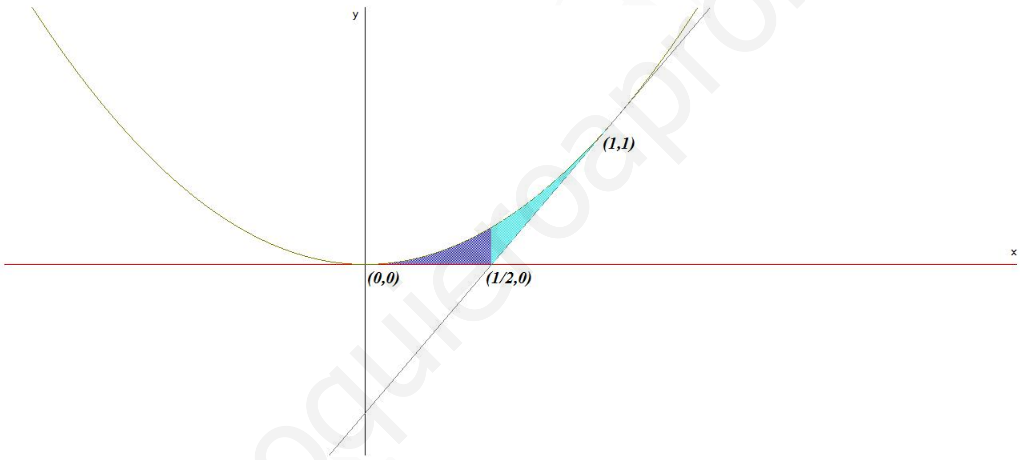
$$m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Como se puede apreciar en la figura el área buscada consta de dos partes, por un lado será el área entre la función y el eje de abscisas en el intervalo $(0, 1/2)$ y por otra parte el área encerrada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - 1$ en el intervalo $(1/2, 1)$

✌
$$S_1 = \int_0^{1/2} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}\ u^2$$

✌
$$S_1 = \int_{1/2}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}\ u^2$$

✌
$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{12}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.11.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

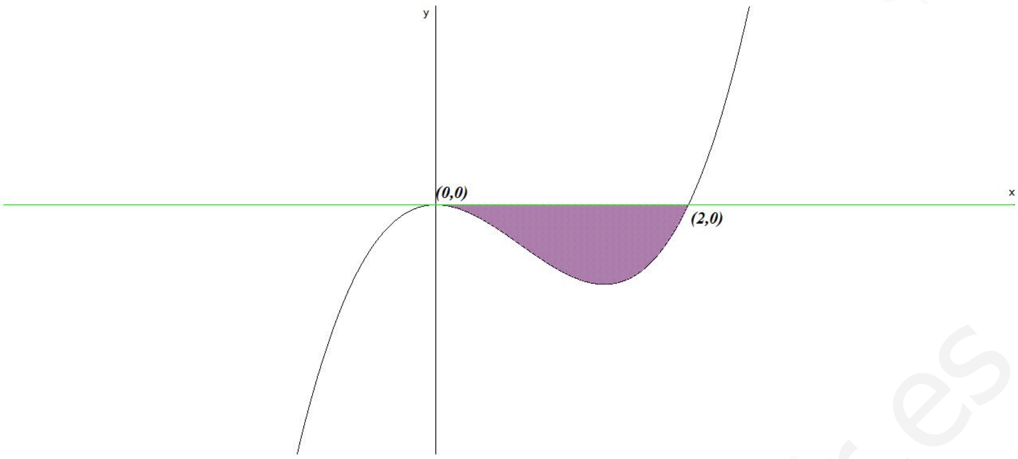
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a, b y c para que la gráfica de f pase por el punto $(0, 0)$ y además tenga un máximo relativo en el punto $(1, 2)$?

b) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, determínense los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

Solución:



a) Tenemos:

- ☛ Pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
- ☛ Tiene un máximo relativo en el punto $(1,2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ 3a+2b=0 \\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-4 \\ b=6 \\ c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

b) Tenemos que $f(x) = x^3 - 2x^2$

Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow (0,0),\ \ (2,0)$.

Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0,\ \ (0,0)$

c) Luego los límites de integración serían los intervalos $[0,2]$:

$$F(x) = \int (x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3}$$

$$S = |F(2) - F(0)| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}\ u^2$$

3.11.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.11.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) Determínense su asíntotas.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las rectas verticales $x = 2$, $x = 3$, la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x + 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: La única posible es $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

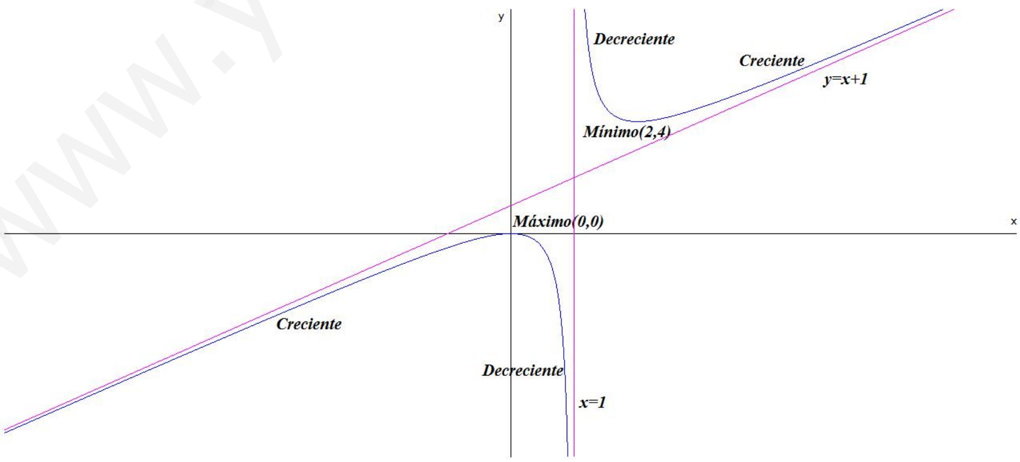
$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

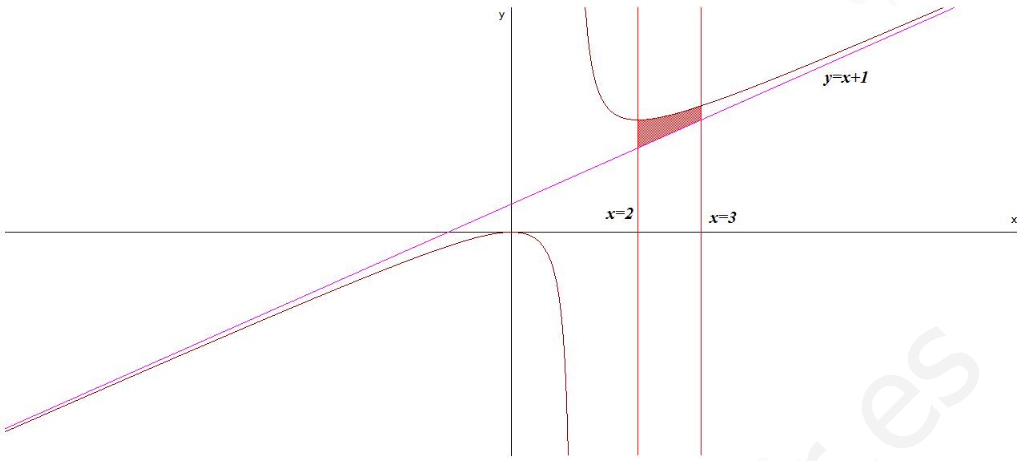
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$

b)

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 2$$





	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 0)$ y un Mínimo en el punto $(2, 4)$.

c)

$$S = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1 \right) dx = \int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\, dx = \ln|x-1|]_2^3 = \ln 2\ u^2$$

Opción B

Problema 3.11.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{3}{bx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de a, b, para que f sea continua y derivable en todos los puntos.

b) Para $a = 6$, $b = 3/4$, determínense los puntos de corte de la gráfica f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 6$, $b = 3/4$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta vertical $x = 2$.

Solución:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Tenemos:

- ☛ Continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -2 + a, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{b} \Longrightarrow$$

$$-2 + a = \frac{3}{b} \Longrightarrow -2b + ab = 3$$

- ☛ Derivable en $x = 1$:

$$f'(1^-) = -3, \quad f'(1^+) = -\frac{3}{b} \Longrightarrow -3 = -\frac{3}{b} \Longrightarrow b = 1$$

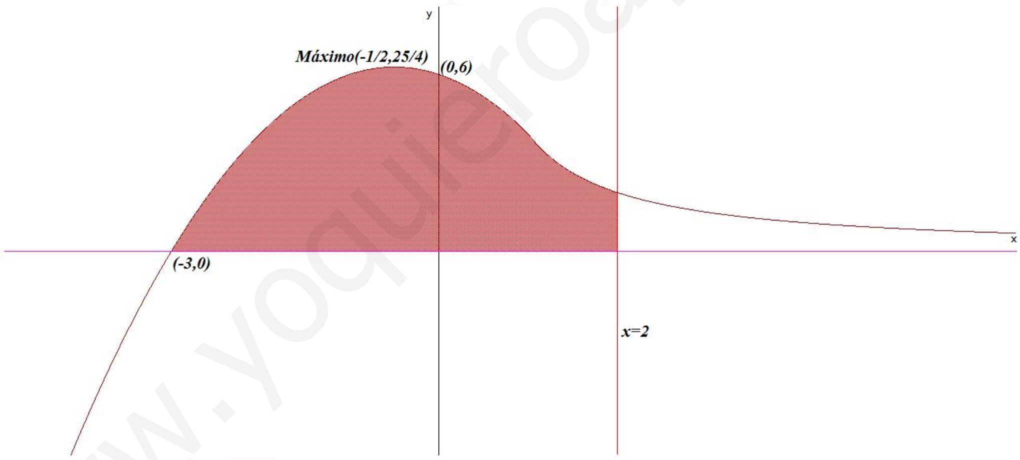
- ☛ Continua y derivable en $x = 1$:

$$\begin{cases} -2b + ab = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$$

b) Si $a = 6$, $b = 3/4$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 6 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- ☛ Corte con el eje OY: hacemos $x = 0$, que estaría en la primera rama y tendríamos el punto $(0, 6)$.
- ☛ Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0$ y tendríamos en la primera rama $-x^2 - x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$ pero esta última solución no es válida al no estar en la primera rama. Tendríamos el punto $(-3, 0)$



Para dibujar la gráfica observamos que cuando $x \longrightarrow +\infty$: $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0 \Longrightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal. Si, por el contrario, cuando $x \longrightarrow -\infty$: $\lim_{x \longrightarrow -\infty} (-x^2 - x + 6) = \infty$ no habría asíntotas. Para calcular los extremos, observamos que la derivada de la segunda rama no puede ser nula y, por el contrario, la derivada de la primera rama se anularía en el punto $x = -1/2$ donde presentaría un máximo.

c)

$$S = \int_{-3}^{1} (-x^2 - x + 6)\, dx + \int_{1}^{2} \frac{4}{x}\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \Big]_{-3}^{1} + 4 \ln x]_1^2 = \frac{56}{3} + 4 \ln 2 \; u^2$$

3.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.11.5 *(3 puntos)* El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.
Solución:
Llamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{x}, \;\; p(x,y) = 2x + 2y$$

$$C(x,y) = 50(x + 2y) \Longrightarrow C(x) = 50\left(x + \frac{4}{x}\right) = \frac{50(x^2+4)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{50(x^2-4)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \quad x = -2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $x = 2$, es decir, el coste mínimo sería de 200 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.

Opción B

Problema 3.11.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & \text{si} \quad x \le -1 \\ -3x^2 + b & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a, b, para que f sea continua en todos los puntos.

b) Para $a = 0$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

c) Para $a = 0$, $b = 3$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Nota.- La notación log representa logaritmo neperiano.

Solución:

a) En $x = -1$:

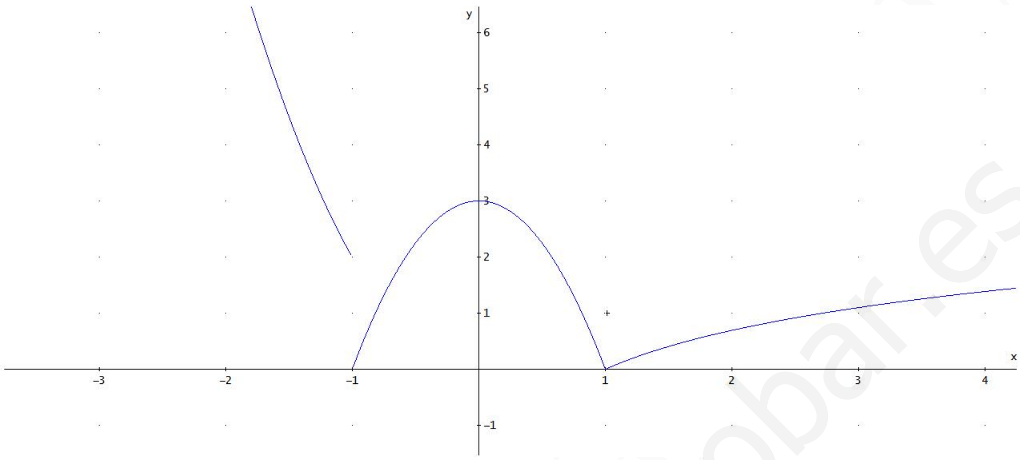
$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}(2x^2 - a) = 2 - a, \quad \lim_{x\longrightarrow -1^+}(-3x^2 + b) = -3 + b \Longrightarrow a + b = 5$$

En $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}(-3x^2 + b) = -3 + b, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}(\log x + a) = a \Longrightarrow a - b = -3$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

b) Tenemos:
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} & x \le -1 \\ -3x^2+3 & \text{si} & -1 < x < 1 \\ \log x & \text{si} & x \ge 1 \end{cases}$$



c)
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2+3)\,dx = -x^3+3x\Big]_{-1}^{1} = 4$$
.

3.12. Año 2011

3.12.1. Modelo

Opción A

Problema 3.12.1 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:
$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

a) Calcúlense a y b para que la función f tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$

b) Para $a = b = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y = 8x - 6$.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

f tenga un máximo relativo en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = -6$

f tenga un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 0 \Longrightarrow 4a + b = -24$

$$\begin{cases} 2a+b=-6 \\ 4a+b=-24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=12 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

b) $a = b = 0 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 6$ y $g(x) = 8x - 6$:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^3 - 6 = 8x - 6 \Longrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 2$$

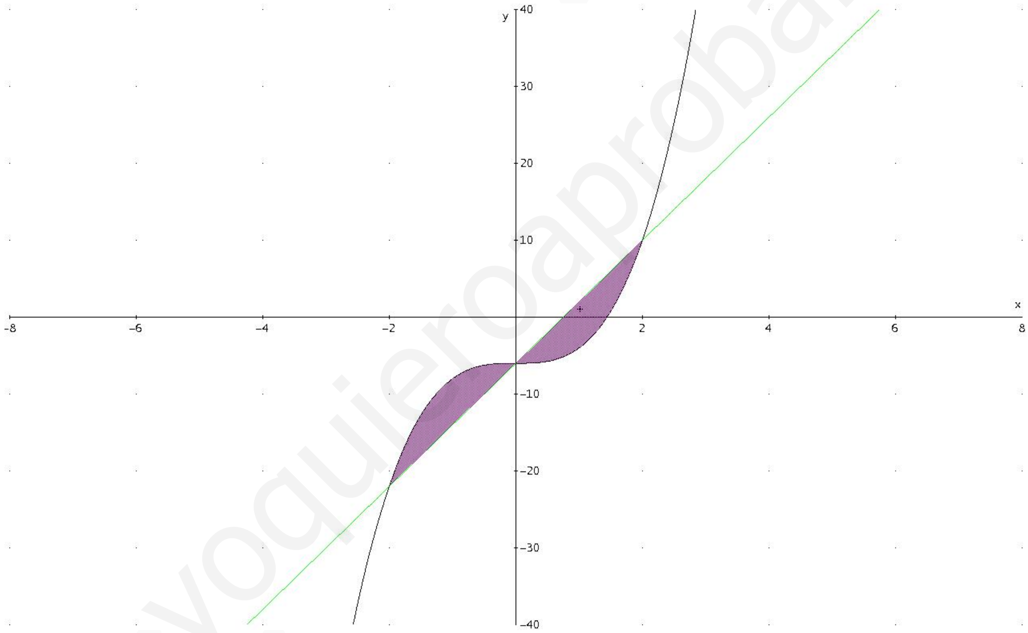
Límites de integración: $[-2, 0]$, $[0, 2]$

$$F(x) = \int (2x^3 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{2} - 4x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\, dx = F(0) - F(-2) = 8$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\, dx = F(2) - F(0) = -8$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 16 \; u^2$$



Opción B

Problema 3.12.2 *(3 puntos)* Una empresa produce cable de fibra óptica, que vende a un precio de x euros por metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$D(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

a) Obténgase la función $I(x)$ que determina los ingresos diarios de la empresa en función del precio x.

b) Calcúlese el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcúlese dicho ingreso máximo.

c) Determínense las asíntotas de $I(x)$ y esbócese la gráfica de la función $I(x)$.

Solución:

a)

$$I(x) = \frac{6000x}{x^2+1}$$

b)

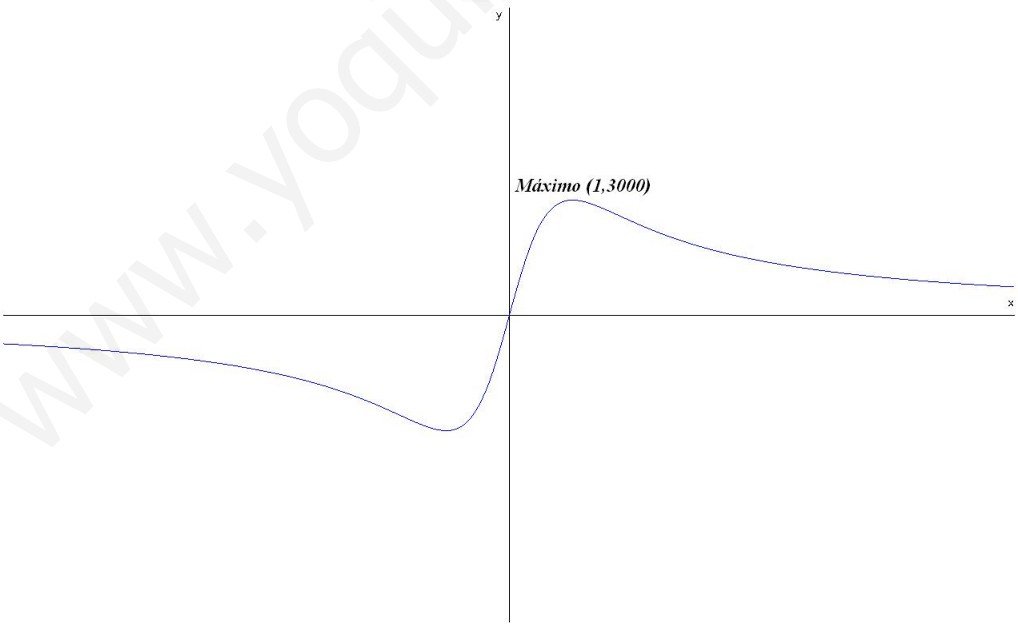
$$I'(x) = \frac{6000(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$I'(x)$	$-$	$+$	$-$
$I(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función presenta un máximo en el punto de abscisa $x = 1$ lo que supone un ingreso máximo: $I(1) = 3000$ euros.

c) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{6000x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontalesa



3.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.12.3 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{\pm\sqrt{2}\}$y el único punto de corte es $(0, 0)$.

Asíntotas:

☛ Verticales: $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

$$\lim_{x\longrightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow \sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x}{x^2-2} = 0$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f(1) = -3$ $f'(x) = -\dfrac{3(x^2+2)}{(x^2-2)^2} \Longrightarrow f'(1) = -9$

$$y + 3 = -9(x-1) \Longrightarrow 9x + y - 6 = 0$$

c)

$$\int_2^3 \frac{3x}{x^2-2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2|\Big]_2^3 = \frac{3}{2}\ln\frac{7}{2} = 1,879$$

Opción B

Problema 3.12.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a, b para que f sea continua y derivable en $x = -1$

b) Para $a = 1$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el valor b para que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 6$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{x^2-b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Por la continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{a}{x} = -a$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2-b}{4} = \frac{1-b}{4}$$

$$-a = \frac{1-b}{4} \Longrightarrow 4a - b = -1$$

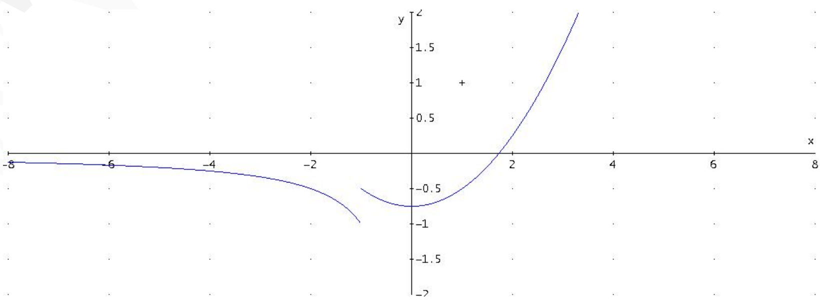
Por la derivabilidad en $x = -1$:

$$f'(-1^-) = -a, \quad f'(-1^+) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Luego $b = 3$ y $a = 1/2$.

b) Para $a = 1$, $b = 3$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{x^2-3}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$



c)

$$\int_0^3 \frac{x^2-b}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - bx\right)\Bigg]_0^3 = \frac{1}{4}(9-3b) = 6 \Longrightarrow b = -5$$

3.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.12.5 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta horizontal $y = 1$, la recta vertical $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$:

- ✌ Asíntotas verticales no hay ya que el denominador no se anula nunca. Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

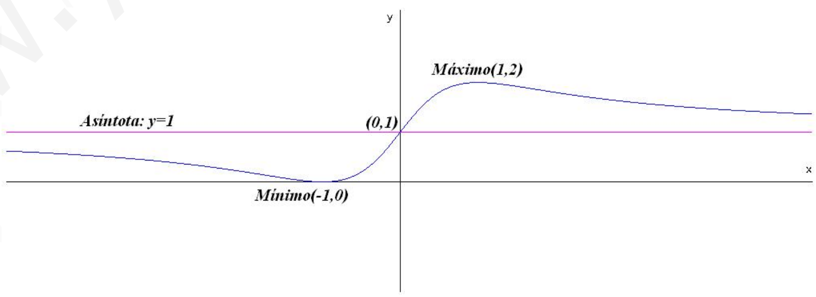
Oblicuas no hay por haber horizontalesa

- ✌ $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

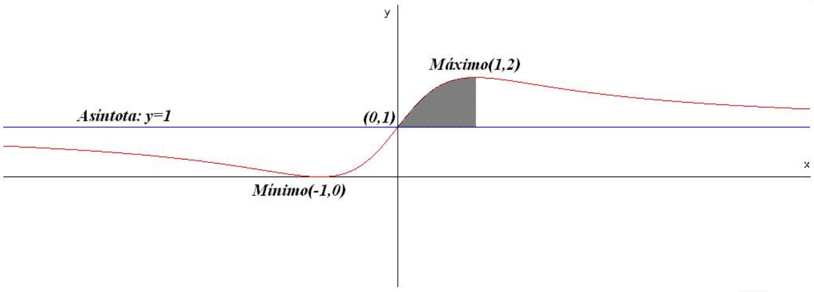
La función presenta un mínimo en el punto $(-1, 0)$ y un máximo en el punto $(1, 2)$.

b) La función tiene un punto de corte con los ejes en $(0, 1)$:



c)

$$S = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1\right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1|\Big]_0^1 = \ln 2 \;\; u^2$$



Opción B

Problema 3.12.6 *(3 puntos).* Se considera un rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2 , calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Solución:

a) El perímetro $2x + 2y = 12 \Longrightarrow x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Hay que optimizar la función $S(x, y) = x \cdot y \Longrightarrow S(x) = x(6 - x) = -x^2 + 6x$:

$$S'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego la función presenta un máximo en $x = 3\,m$, luego $y = 3\,m$ lo que corresponde a un área de $9\,m^2$.

b) Ahora sabemos que $R = x \cdot y = 36 \Longrightarrow y = 36/x$ y queremos optimizar el perímetro $P(x, y) = 2x + 2y \Longrightarrow P(x) = 2x + 72/x$:

$$P(x) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Longrightarrow P'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 6$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego la función presenta un mínimo en $x = 6\,m$ y, por tanto, $y = 6\,m$.

3.12.4. Reserva

Opción A

Problema 3.12.7 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = 2(x - 1)^2(x + 3)$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcúlense sus extremos relativos.

b) Calcúlense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a)

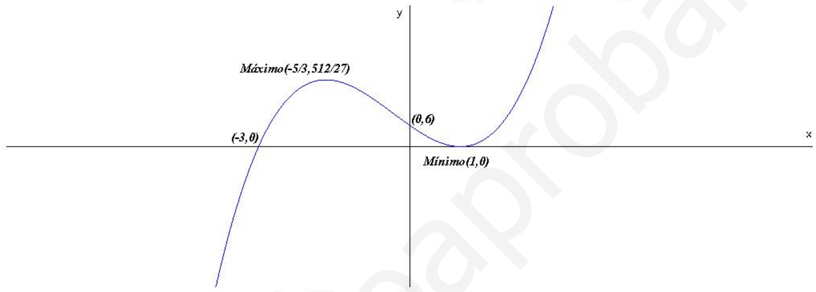
$$f'(x) = 2(x-1)(3x+5) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -5/3$$

	$(-\infty,-5/3)$	$(-5/3,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-5/3)\cup(1,\infty)$ y es decreciente en $(-5/3,1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(-5/3, 512/27)$ y un mínimo en $(1,0)$.

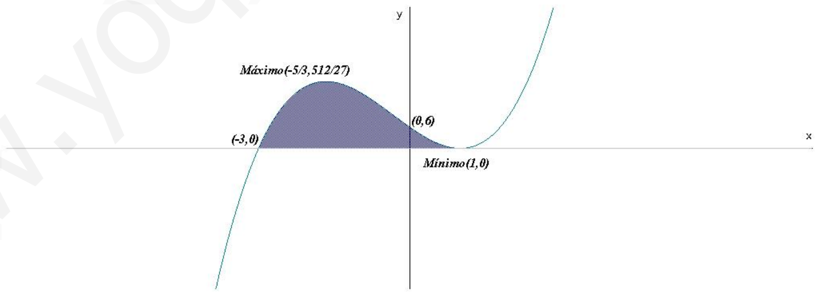
b) Para $x=0 \Longrightarrow (0,6)$ y para $f(x)=0 \Longrightarrow (1,0), \;\; (-3,0)$



c)

$$\int_{-3}^{1} 2(x-1)^2(x+3)\,dx = \int_{-3}^{1}(2x^3+2x^2-10x+6)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-5x^2+6x\right]_{-3}^{1} = \frac{128}{3}\,u^2$$



Opción B

Problema 3.12.8 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x \le 1/2 \\ bx+c & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

Calcúlense los valores de a, b, c para que f satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $a > 0$
- La función f es continua y derivable en $x = 1/2$.
- El valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -2$, $x = 0$, es igual a $32/3$.

Solución:

- Por la continuidad en $x = 1/2$:

$$\lim_{x\longrightarrow (1/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (1/2)^-} ax^2 = \frac{a}{4}$$

$$\lim_{x\longrightarrow (1/2)^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (1/2)^+} (bx+c) = \frac{b}{2}+c$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} + c \Longrightarrow a - 2b - 4c = 0$$

- Por la derivabilidad en $x = 1/2$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2ax & \text{si} & x \le 1/2 \\ b & \text{si} & x > 1/2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'((1/2)^-) = a \\ f'((1/2)^+) = b \end{array} \right. \Longrightarrow a = b$$

- Por el área:

$$\int_{-2}^{0} ax^2\,dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8a}{3} = \frac{32}{3} \Longrightarrow a = 4$$

Luego $a = 4$, $b = 4$ y $c = -1$.

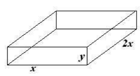
3.13. Año 2012

3.13.1. Modelo

Opción A

Problema 3.13.1 *(3 puntos)* Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm^3 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

Solución:



$$V = 2x^2y = 9000 \Longrightarrow y = \frac{4500}{x^2}$$

$$S(x,y) = 4x^2 + 6xy \Longrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{27000}{x} = \frac{4x^3 + 27000}{x}$$

$$S'(x) = \frac{8x^3 - 27000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 15$$

Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{8(x^3 + 6750)}{x^3} \Longrightarrow S''(15) = 24 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 15$. Las cajas tendrán de dimensiones: $15\,cm$ de ancho, $30\,cm$ de largo y $20\,cm$ de alto.

Opción B

Problema 3.13.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcr} 2x+2 & \text{si} & x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} & 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$$

a) Calcúlense a, b y c, para que la función f sea continua en todos los puntos y derivable en $x = 0$.

b) Para $a = 0$, calcúlense b, c, para que la función f sea continua en todos los puntos y calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

c) Para $a = b = 1$, $c = 2$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

Solución:

a) f continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

f continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 9a + 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 9a + 3b + c = 0$$

f derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{rcr} 2 & \text{si} & x < 0 \\ 2ax + b & \text{si} & 0 \le x \le 3 \\ -1 & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$$

$$f'(0^-) = 2, \; f'(0^+) = b \Longrightarrow b = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -8/9 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

b) Si $a = 0$:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcr} 2x+2 & \text{si} & x < 0 \\ bx + c & \text{si} & 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$$

f continua en $x = 0$:

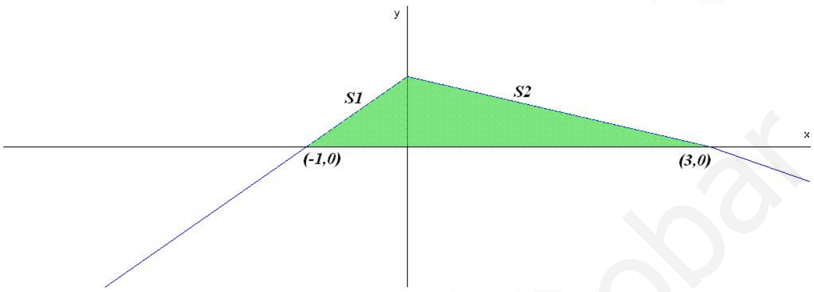
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

f continua en $x = 3$:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = 3b + c, \quad \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 3b + c = 0$$

Luego $b = -2/3$ y $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2/3x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



$$S_1 = \int_{-1}^{0} (2x+2)\,dx = x^2 + 2x\Big]_{-1}^{0} = 1$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (-\frac{2}{3}x+2)\,dx = -\frac{x^2}{3} + 2x\Big]_{0}^{3} = 3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$

c) Si $a = b = 1$, $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2+x+2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (2x+2)\,dx + \int_{0}^{3} (x^2+x+2)\,dx =$$

$$x^2 + 2x\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{0}^{3} = 1 + \frac{39}{2} = \frac{41}{2}$$

3.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.13.3 *(3 puntos)* Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Solución:

x: Nº de copas que debemos añadir. La producción vendrá dada por la siguiente función:

$$f(x) = (16 - 0,01x)(1200 + x) = -0,01x^2 + 4x + 19200$$

$$f'(x) = -0,02x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 200$$

$$f''(x) = -0,02 \Longrightarrow f''(200) < 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 200 \text{ hay un máximo}$$

Luego hay que añadir 200 cepas.

Opción B

Problema 3.13.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY, y la recta $x = 2$.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

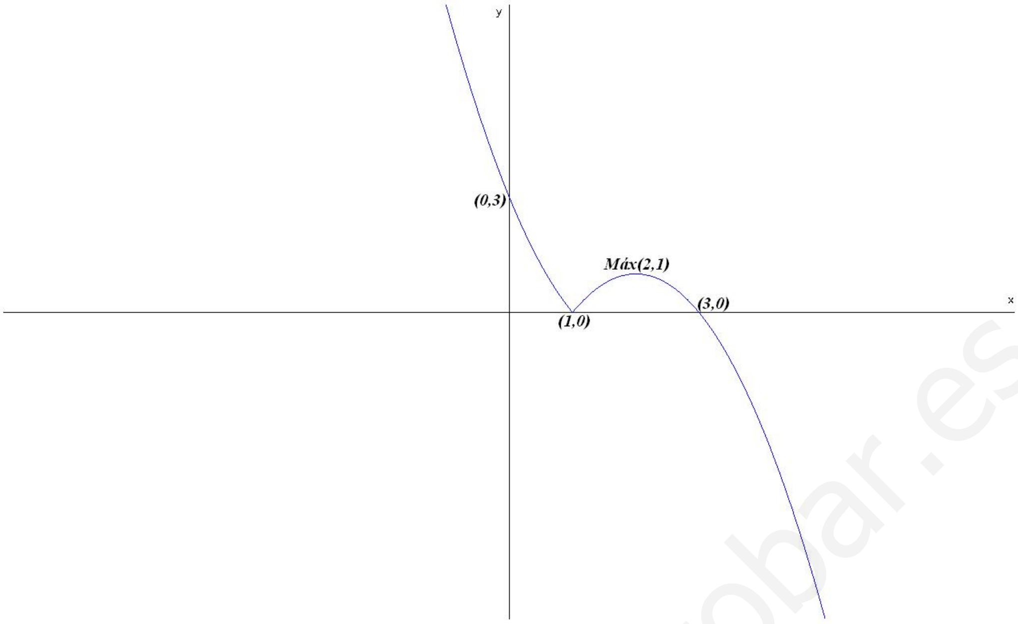
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(0) = 0$$

f no es derivable en $x = 1$:

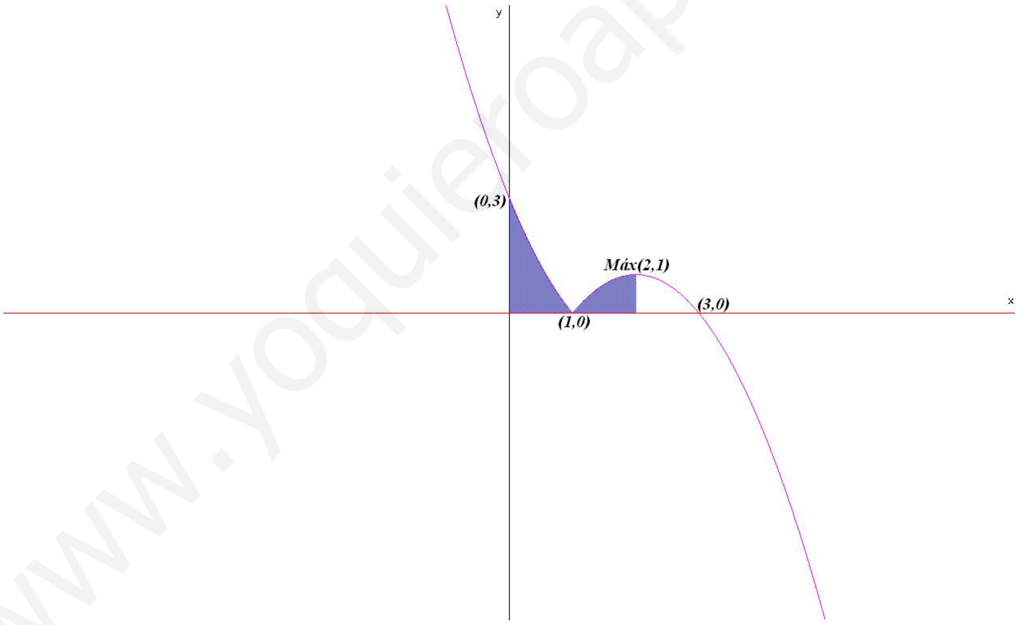
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego f no es derivable en $x = 1$.

b) Representación:



c) Área:



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \left. -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2\ u^2$$

3.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.13.5 *(3 puntos)*) Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{4-2x}{x^2}$.

a) Determínense los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Hállense los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de f.

c) Determínense las asíntotas y los puntos de corte con los ejes. Esbócese la gráfica de f.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 4$$

	$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(0,4)$.

Hoy un mínimo local en el punto $(4,-1)$.

b)

$$f''(x) = \frac{24-4x}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 6$$

	$(-\infty,0)$	$(0,6)$	$(6,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	convexa	cóncava

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty,0)\cup(0,6)$ y es cóncava en el intervalo $(6,\infty)$.

Hay un punto de inflexión en el punto $(6,-2/9)$.

c)
- ☛ Puntos de corte: Con el eje de ordenadas no hay y con el eje de abscisas $4-2x=0 \Longrightarrow x=2$, se trata del punto $(2,0)$.
- ☛ Asíntotas:
  - *a*) Verticales: $x=0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{4-2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

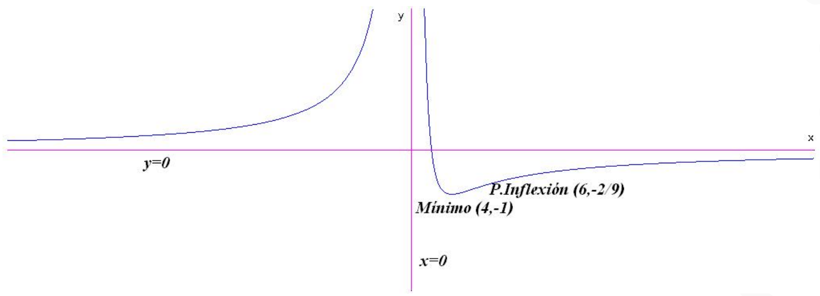
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{4-2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

  - *b*) Verticales: $y=0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{4-2x}{x^2} = 0$$

  - *c*) Oblicuas no hay por haber horizontales.

d) Representación gráfica:



Opción B

Problema 3.13.6 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}$$

a) Hállense los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tenga como ecuación $y = 3x - 2$.

b) Hállense los valores de a y b para que la función f tenga en (1,0) un punto de inflexión.

c) Hállense los valores de a y b de manera que f no tenga asíntotas y $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}, \quad f'(x) = 2ax + \frac{b}{x^2}, \quad f''(x) = 2a - \frac{2b}{x^3}$$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a - b = 1 \\ f'(1) = 3 \Longrightarrow 2a + b = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4/3 \\ b = 1/3 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 2a - 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow a = b$$

c) Para que no tenga asíntotas: $b = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ax^2dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{3} = 1 \Longrightarrow a = 3$$

3.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.13.7 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x(2x-1)}{x-1}$.

a) Determínense las asíntotas de f . Calcúlense los extremos relativos de f .

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{x(2x-1)}{x-1} - 2x\right) = 1$$

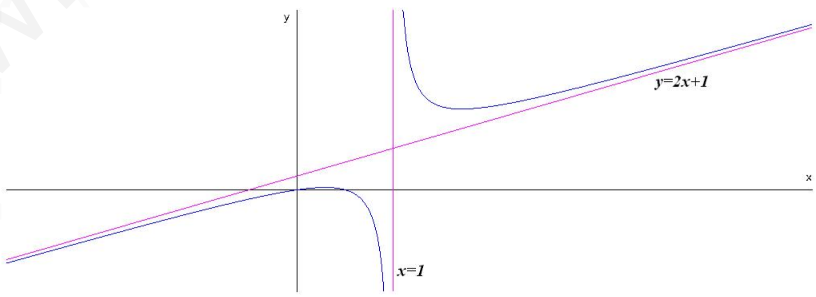
$$y = 2x + 1$$

Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(x_1) > 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un mínimo} \\ f''(x_2) < 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un máximo} \end{cases}$$

b) Representación gráfica:



c) $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x|\big]_2^5 = \ln 10.$

Opción B

Problema 3.13.8 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de a y b para los que la función f es continua y derivable.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y - 8x = 1$.

c) Sea g la función real de variable real definida por $g(x) = 1-2x^2$. Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y la gráfica de g.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x^3 - x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \Longrightarrow a+b = 1$$

f no es derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = a \\ f'(1^+) = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

Luego $a = 1$ y $b = 0$.

b) $y - 8x = 1 \Longrightarrow y = 8x - 1 \Longrightarrow m = 8$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

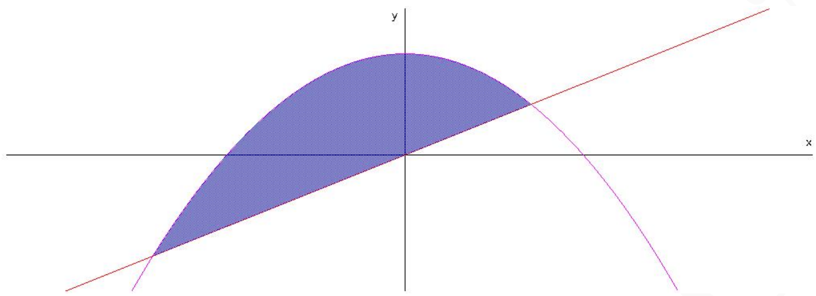
Las soluciones estarán cuando $x > 1 \Longrightarrow 3x^2 - 2x = 8 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -4/3$, esta última solución no es válida, y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 5)$. La ecuación de la recta tangente a la función f es $y - 5 = 8(x - 2)$.

c)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^3 - x^2 + 1 = 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^3 + x^2 = 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1, \ x = 1/2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x = 0, \ x = -1 & \text{si} \quad x > 1 \text{ No valen} \end{cases}$$



d)

$$S=\int_{-1}^{1/2}(-2x^2-x+1)dx)\,dx=-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\bigg]_{-1}^{1/2}=\frac{9}{8}\;u^2$$

3.14. Año 2013

3.14.1. Modelo

Opción A

Problema 3.14.1 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x+1}$

a) Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

b) Hállense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) ☛ Verticales: $x=-1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{3x^2-5}{x+1}=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{3x^2-5}{x+1}=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{3x^2-5}{x+1}=+\infty$$

☛ Oblicuas: $y=mx-n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-5}{x^2+x}=3$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2-5}{x+1}-3x\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-3x-5}{x+1}=-3$$

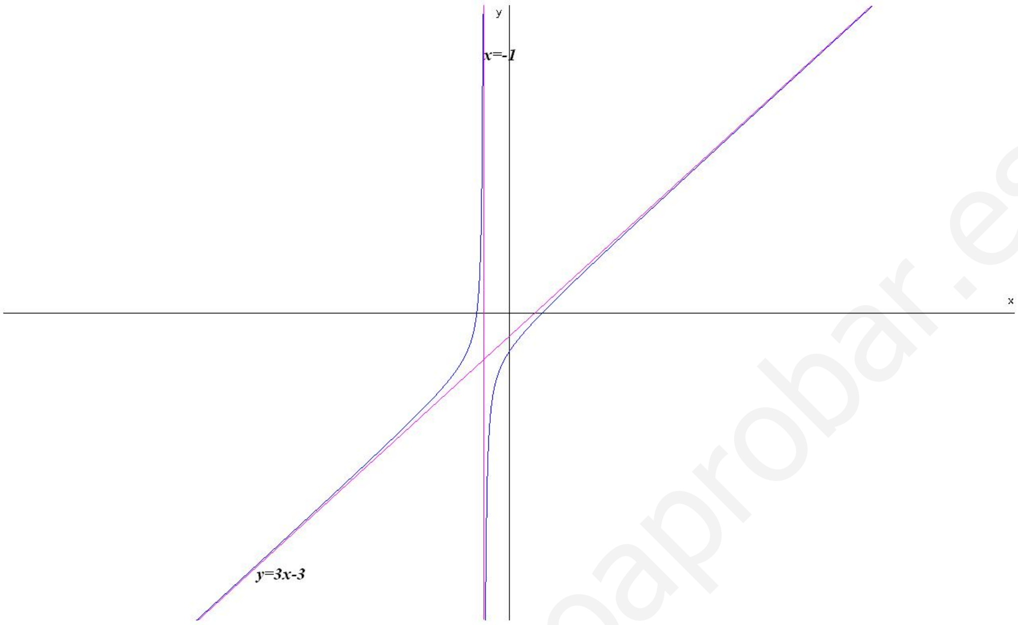
$$y=3x-3$$

b) ☛ Puntos de corte:
Con el eje OY: hacemos $x=0\Longrightarrow (0,-5)$
Con el eje OX: hacemos $f(x)=0\Longrightarrow (-\sqrt{5/3},0)$ y $(\sqrt{5/3},0)$

☛ Curvatura:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 5(x+1)^2 \neq 0 \Longrightarrow \text{no hay extremos}$$

Como $f'(x) > 0$ siempre podemos asegurar que la función es creciente en todo el dominio $R - \{0\}$.



Problema 3.14.2 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de la función en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (-x^2 - 3x + 5) = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} x^2 = 1$$

Luego la función es continua en $x = 1$ por ser iguales los límites laterales y además $f(1) = 1$.

b)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2 - 3x + 5)\,dx + \int_1^2 x^2\,dx =$$

$$\left.\frac{-x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^1 + \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{19}{6} + \frac{7}{3} = \frac{11}{2}$$

Opción B

Problema 3.14.3 *(2 puntos)* El coste de fabricación de una serie de hornos microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$; donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

a) Determínese la función de beneficios.

b) ¿Cuántos microondas deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos? ¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

Solución:

a) Si llamamos x al número de hornos vendidos la función beneficio será:

$$B(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30000) = -x^2 + 450x - 30000$$

b)

$$B'(x) = -2x + 450 = 0 \Longrightarrow x = 225$$

$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(225) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 225$ hay un máximo. El beneficio máximo se obtiene al venderse 225 hornos y sería de $B(225) = 20625$ euros.

3.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.14.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$

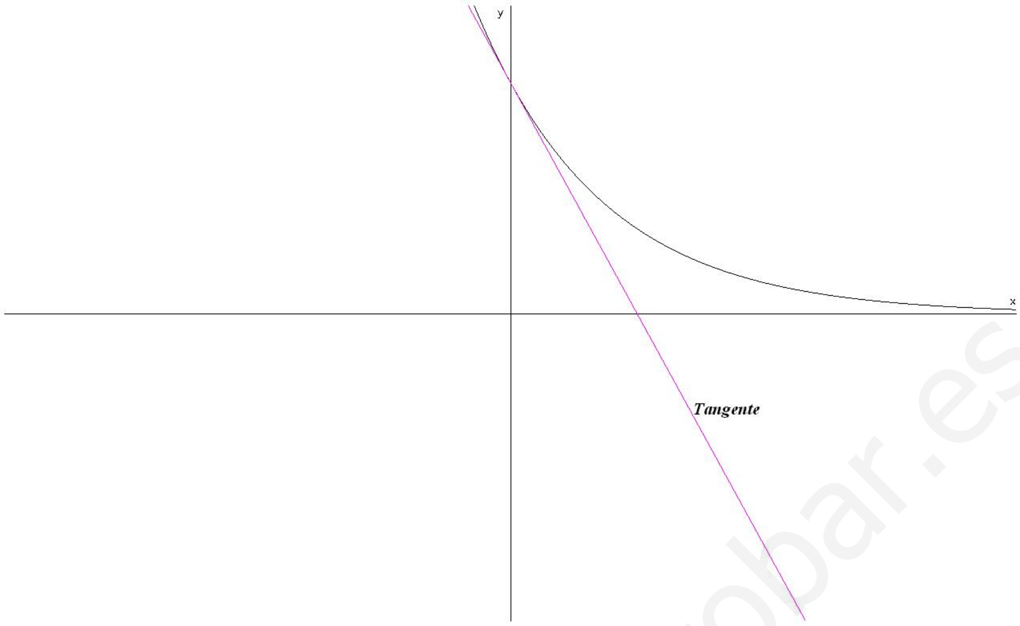
a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$

b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 0,5$ y el eje de abscisas.

Solución:

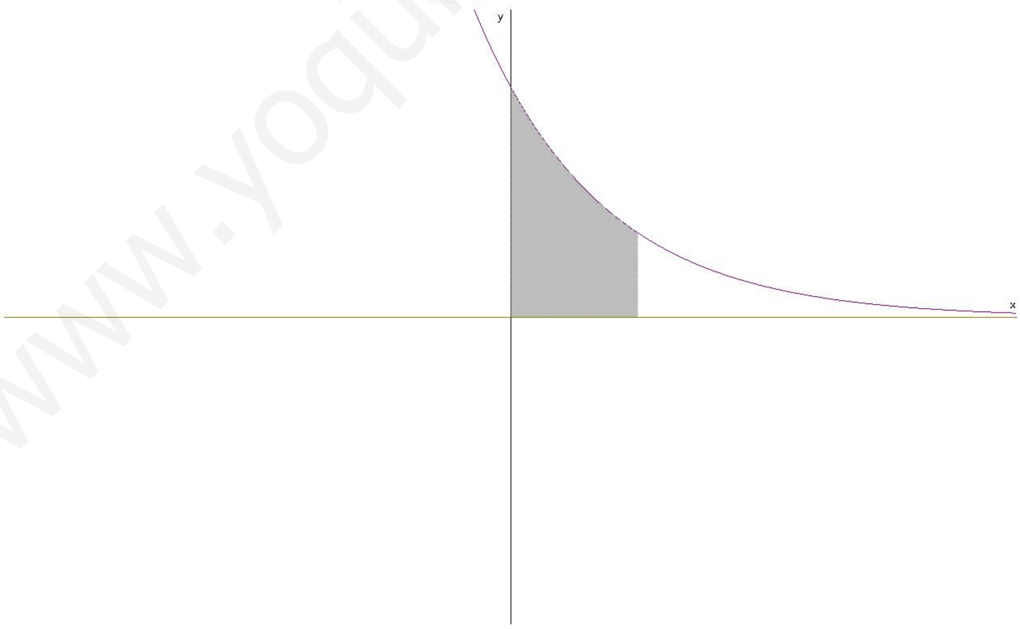
a) $f'(x) = -6e^{-2x} \Longrightarrow f'(0) = -6$ y $f(0) = 3 \Longrightarrow$

$$y - 3 = -6x \Longrightarrow 6x + y - 3 = 0$$



b)

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} (3e^{-2x}\,dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}\Big]_0^{1/2} = \frac{3(e-1)}{2e} = 0,948\,u^2$$



Opción B

Problema 3.14.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a.

b) Determínense las asíntotas de la función.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{3}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ si $a/3 = 1 \Longrightarrow a = 3$.
Si $a \neq 3$ hay una discontinuidad no evitable:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$$

b) Asíntotas:
Si $x < 0$:

- ☛ Verticales: No hay
- ☛ Horizontales: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^x = 0 \Longrightarrow y = 0$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

Si $x \geq 0$:

- ☛ Verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$
  - $x = 1$: pueden ocurrir que $a = -3$ o $a \neq -3$.
    - $a = -3$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-3+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$

    - $a \neq -3$: Si hay asíntota

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$

  - Si $x = 3$ pueden ocurrir que $a = -9$ o $a \neq -9$.
    - Si $a = -9$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{-9+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$

- Si $a \neq -9$: Si hay asíntota:

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{a+3x}{x^2-4x+3}=\pm\infty$$

☛ Horizontales: $\lim_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{a+3x}{x^2-4x+3}=0\Longrightarrow y=0$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales

Problema 3.14.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=x(5-x)^2$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Solución:

a) $f'(x)=(x-5)(3x-5)=0\Longrightarrow x=5,\ x=\dfrac{5}{3}$

	$(-\infty,5/3)$	$(5/3,5)$	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

f es creciente en el intervalo $(-\infty,5/3)\cup(5,+\infty)$ y decreciente en $(5/3,5)$. Presenta un máximo en $x=5/3$ y un mínimo en $x=5$.

b) $f''(x)=6x-20=0\Longrightarrow x=10/3$

	$(-\infty,10/3)$	$(10/3,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

f es convexa en el intervalo $(-\infty,10/3)$ y cóncava en $(5,+\infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x=10/3$.

3.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.7 *(2 puntos)* Calcúlese la derivada de cada una de las funciones siguientes ($\ln x$ denota al logaritmo neperiano de x):

a) $f(x)=(x^3+2x)\cdot\ln x$

b) $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}\cdot e^{x^2}$

Solución:

a) $f'(x)=(3x^2+2)\ln x+\dfrac{x^3+2x}{x}=(3x^2+2)\ln x+x^2+2$

b) $g'(x)=\dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}\cdot e^{x^2}+\dfrac{2x}{x-1}\cdot e^{x^2}\cdot 2x=\dfrac{2e^{x^2}(2x^3-2x^2-1)}{(x-1)^2}$

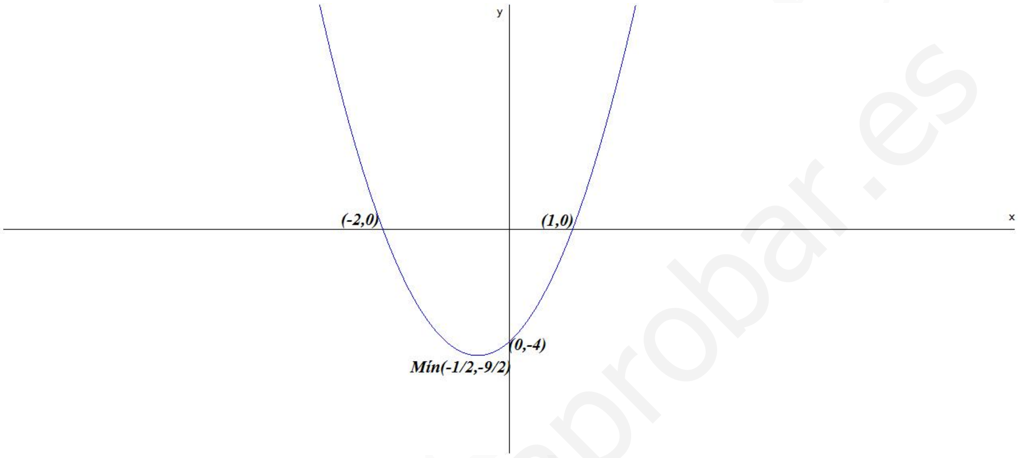
Problema 3.14.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

a) Represéntense gráficamente f.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) Puntos de corte: $(0,-4)$, $(1,0)$ y $(-2,0)$; $f'(x) = 4x+2 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$, $f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(-1/2) = 4 > 0 \Longrightarrow (-1/2, -9/2)$ es un mínimo. Su gráfica:



b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x^2+2x-4)\,dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(-2) = -9$$

$$S = |S_1| = 9\ u^2$$

Opción B

Problema 3.14.9 *(2 puntos)* Supongamos que el consumo eléctrico de un país (expresado en gigavatios) entre las 0 y las 8 horas viene dado por la función $c(x) = 10x - x^2 + 16$, con $0 \le x \le 8$.

a) Determínese cuáles son el consumo máximo y el mínimo en ese intervalo de tiempo, y los instantes en los que se alcanzan.

b) Calcúlese $\frac{\int_0^8 c(x)\,dx}{8}$ (que representa el consumo medio a lo largo de esas 8 horas).

Solución:

a) $c'(x) = -2x + 10 = 0 \Longrightarrow x = 5$ como $c''(x) = -2 \Longrightarrow c''(5) = -2 < 0 \Longrightarrow (5, 41)$ es un máximo local. A partir de este punto la función empieza a decrecer hasta llegar al punto de corte de la función $c(x)$ con la recta $x = 8$ sería $(8, 32)$ y con la recta $x = 0$ sería $(0, 16)$. El consumo mínimo es a las 0 horas con 16 gigavatios y el máximo a las 5 horas con 41 gigavatios.

b) $\displaystyle \frac{1}{8}\int_0^8 c(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^8 (10x - x^2 + 16)dx = \frac{1}{8}\left(5x^2 - \frac{x^3}{3} + 16x\right)\Big]_0^8 = \frac{104}{3}$

3.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.14.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

a) Hállense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:

$$x = 3 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^-}\right] = -\infty$$

$$x = -3 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x^3-9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = 0$$

b)

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{13}{32}; \;\; f(1) = -\frac{1}{8}$$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente es:

$$y + \frac{1}{8} = -\frac{13}{32}(x-1)$$

Opción B

Problema 3.14.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \ln(2x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a para que la función f sea continua en todo R:

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a = 3$.

Nota: lnx denota al logaritmo neperiano del número x.

Solución:

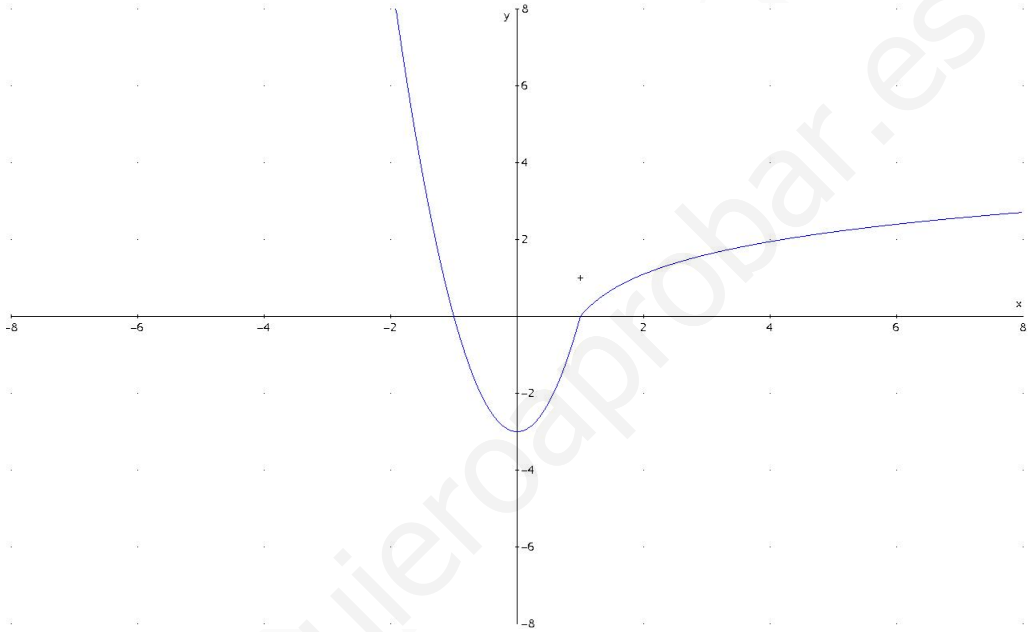
a)

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-}(ax^2-3) = a-3$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}\ln(2x-1) = 0$$

Luego la función es continua en $x=1$ si $a-3=0 \Longrightarrow a=3$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2-3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \ln(2x-1) & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$



Problema 3.14.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

a) Determínense los extremos relativos de f.

b) Calcúlese la integral definida $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x=\pm 2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

f es decreciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y creciente en $(-2,2)$. Presenta un máximo en $(2,1/4)$ y un mínimo en $(-2,-1/4)$.

b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\sqrt{\frac{5}{4}}$$

3.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.14.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

a) Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.

b) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas

- Verticales: $x = -1$
$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x+1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$; $\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x+1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$
- Horizontales: No hay. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \infty$
- Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x - 1$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+3}{x+1} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x+3}{x+1} = -1$$

b) Los puntos de corte con eje OX no hay y con el OY es el $(0, 3)$.

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-3, -1) \cup (-1, 1)$. La función tiene un máximo local en $x = -3$ y un mínimo local en $x = 1$.

Problema 3.14.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 30 & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x^2 + 2x + b & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Determínese el valor de b para que la función sea continua en R.

b) Para $b = 0$, calcúlese $\int_0^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow 2^-} (4x^3 - 30) = 2$; $\lim_{x\longrightarrow 2^+} (3x^2 + 2x + b) = 16 + b \Longrightarrow b = -14$

b)

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 (4x^3 - 30)\,dx + \int_2^3 (3x^2 + 2x)\,dx =$$

$$x^4 - 30x\Big]_0^2 + x^3 + x^2\Big]_2^3 = -20$$

Opción B

Problema 3.14.15 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como sus límites cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y sus mínimos locales.

Solución:

a) El único punto de corte es el (0,0).

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(2x^3 - 9x^2 + 12x) = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(2x^3 - 9x^2 + 12x) = \infty$$

b) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ x = 2$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en $(1, 2)$. La función tiene un máximo local en $(1, 5)$ y un mínimo local en $(2, 4)$.

3.15. Año 2014

3.15.1. Modelo

Opción A

Problema 3.15.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{x+2} - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\[2ex] \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

Solución:

a) Asíntotas:

- Si $x \le 0$: En $x = -2$ hay una vertical

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

En $y = -1$ hay una horizontal

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{-x-6}{x+2} = -1$$

- Si $x > 0$: No hay una verticales y en $y = 0$ hay una horizontal

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Puntos de Corte:

- Si $x \leq 0 \Longrightarrow (0, -3)\ \ (-6, 0)$
- Si $x > 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte

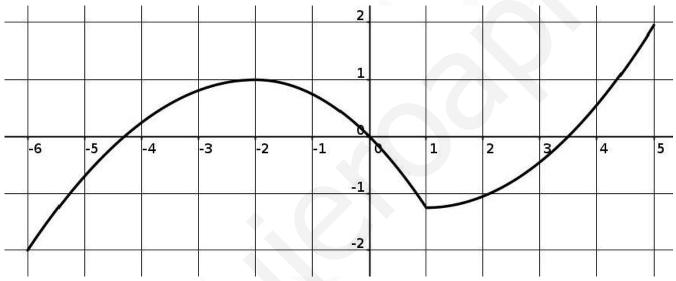
b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-4}{x+2} - 1 \right) dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\, dx =$$

$$-4 \ln|x+2| - x]_{-1}^{0} + \ln|x+1|]_{0}^{1} = -1 - 3\ln 2$$

Opción B

Problema 3.15.2 *(2 puntos)* La figura representa la gráfica de una función $f : [-6; 5] \longrightarrow \mathbb{R}$. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.



a) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

b) ¿En qué puntos del intervalo $[-6, 5]$ f alcanza sus extremos relativos?

c) ¿Cuál es el signo de $\int_2^4 f(x)dx$?

d) ¿En qué valores de $(-6; 5)$ f no es derivable?

Solución:

a) $f'(x) > 0$ en $(-6, -2) \cup (1, 5)$.

b) En $x = -2$ hay un máximo relativo, en $x = 1$ hay un mínimo relativo, en $x = -6$ hay un mínimo absoluto y en $x = 5$ hay un máximo absoluto.

c) Es claramente negativo: El área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre $x = 2$ y $x \simeq 3,5$ es mayor que el área encerrada por la curva y el eje de abscisas entre $x \simeq 3,5$ y $x = 4$.

d) La función f no es derivable en $x = 1$, en este punto la función hace un pico, y en él se podrían trazar infinitas tangentes. Las derivadas laterales no coincidirían.

Problema 3.15.3 *(2 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (2x^2 - ax + 1) = 3 - a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 3x - b) = 2 - b \end{array} \right. \Longrightarrow a - b = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) - b = \frac{1}{4} \Longrightarrow b = 2$$

Luego $a = 3$ y $b = 2$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 3x - 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Tenemos $f(3) = -4$, el punto de tangencia es $(3, -4)$. La pendiente de la recta tangente en este punto es $m = f'(3) = -3$. La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y + 4 = -3(x - 3)$$

3.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.15.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si} & x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} & 1 \le x \le 3 \\ x + b & \text{si} & x > 3 \end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1$$

$$1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Para que f sea continua en $x = 3$:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7$$
$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b$$
$$7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b)
$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2 - 2\right)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Opción B

Problema 3.15.5 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x - 2$:
$$b = f(1) = -1, \quad m = f'(1) = 4, \Longrightarrow \; y + 1 = 4(x - 1)$$

.

b) $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (4x^3 - 3x^2 - 2x)dx = \left. x^4 - x^3 - x^2\right]_2^3 = 41$

Problema 3.15.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por
$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$
$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x + 2$
$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = 2$$

b) $Dom(f) = R - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(4, 8)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

3.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

a) Hállense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si es que existen.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

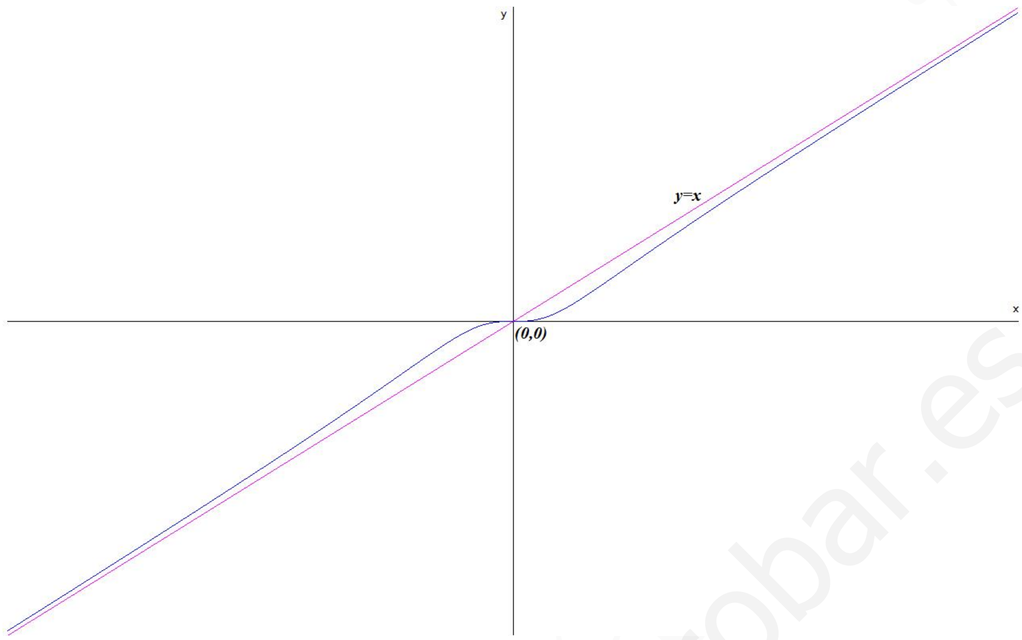
a) Asíntotas:

- ☛ Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- ☛ Horizontales: No hay, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty$
- ☛ Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$, pero en este punto no hay un extremo dado que $f'(x) > 0$ en el dominio de la función y, por tanto, es creciente en R y no tiene extremos.



Opción B

Problema 3.15.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{mx-6}{x-3} & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) Calcúlese la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

Solución:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{mx-6}{x-3} = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^2+2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Longrightarrow f$ continua en $x = 0$ independientemente del valor que tome el parámetro real m.

b) En $x = 5$ $b = f(5) = 27 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es el $(5, 27)$. $f'(x) = 2x \Longrightarrow$ la pendiente de la recta es $m = f'(5) = 10$. La recta tangente es: $y - 27 = 10(x - 5)$ en su ecuación punto pendiente.

Problema 3.15.9 *(2 puntos)* Para la función real de variable real $f(x) = \dfrac{(5x+7)^{10}}{2}$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Calcúlese $\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 25(5x+7)^9$

b) $\displaystyle\int \frac{(5x+7)^{10}}{2}\,dx = \frac{(5x+7)^{11}}{110} + C$

3.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.15.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Estúdiese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = 1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(2x-3)}{(x^2(x-2)^2)} = 0 \Longrightarrow x = 3/2,\ \ x = 3$$

	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en un entorno de $x = 4$.
Otra manera sería: f es creciente en un entorno $U(x)$ de un punto x si $\forall x_1, x_2 \in U(x)/x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Elegimos dos puntos próximos a $x = 4$ sean $x_1 = 3,9$ por la izquierda y $x_2 = 4,1$ por la derecha. Calculamos $f(x_1) = 0,1093117408$ y $f(x_2) = 0,1405342624$. Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.

Problema 3.15.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

a) Esbócese la gráfica de la función f.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

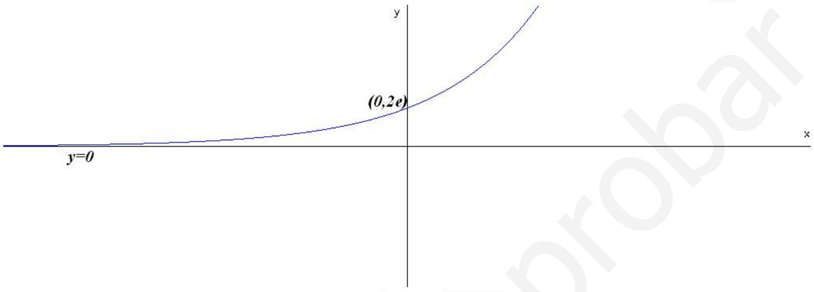
Solución:

a) A grandes rasgos, el único punto de corte es $(0, 2e)$ y no tiene asíntotas verticales y si tiene una asíntota horizontal en $y = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} 2e^{x+1} = 0$$

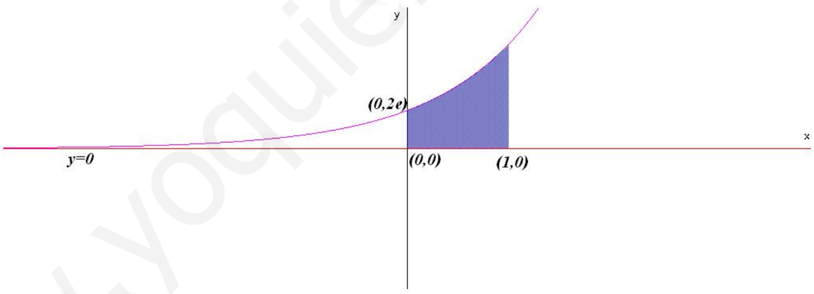
.

$$f'(x) = 2e^{x+1} > 0 \Longrightarrow f \text{ siempre creciente}$$



b)

$$S = \int_0^1 2e^{x+1}\, dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e(e-1)\ u^2$$



Opción B

Problema 3.15.12 *(2 puntos)* función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) Calcúlese $\int_0^2 f(x)\, dx$ para $\lambda = 1$.

Solución:

a)
$$f'(x) = \frac{a(4-x^2)}{(x^2+4)^2}; \quad f'(-1) = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{50}{3}$$

b)
$$\int_0^2 \frac{x}{4+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln|4+x^2|\Big]_0^2 = \frac{\ln 2}{2}$$

3.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.15.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-1)^3 + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determínese el valor de la constante a para que sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 0$, calcúlese el valor de la integral $\int_1^5 f(x)\, dx$.

Solución:

a)
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} = 4$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} (x-1)^3 + a = a$$

Luego $a = 4$

b) con $a = 0$
$$\int_1^5 f(x)\, dx = \int_1^5 (x-1)^3\, dx = \frac{(x-1)^4}{4}\Big]_1^5 = 64$$

Opción B

Problema 3.15.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$,contéstese razonadamente a las preguntas:

a) Calcúlense su dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense las asíntotas, si las tuviere, y esbócese la gráfica de la función f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$, los puntos de corte serán $(0, -1/2)$ con el eje de ordenadas y $(-1, 0)$ con el de abscisas.
$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos. Por otra parte el numerador es siempre negativo y el denominador es siempre positivo, luego $f'(x) < 0$ en todo el dominio de la función y, por tanto, f es decreciente en $R - \{2\}$.

b) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 2$

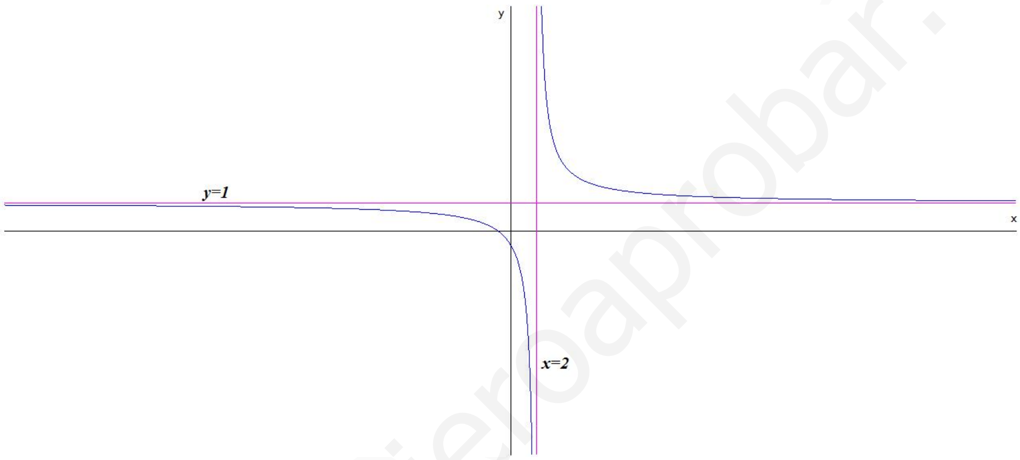
$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.



Problema 3.15.15 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 - ax + 1$

a) Determínese el valor de a para que la función tenga un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

b) Para el caso en el que $a = 48$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.

Solución:

a) Si $f'(x) = 3x^2 - a \Longrightarrow f'(2) = 12 - a = 0 \Longrightarrow a = 12$
$f(x) = x^3 - 12x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$

b) $a = 48 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 48x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 48$:
$b = f(5) = -114$ y $m = f'(5) = 27 \Longrightarrow y + 114 = 27(x - 5)$

3.16. Año 2015

3.16.1. Modelo

Opción A

Problema 3.16.1 *(2 puntos)*

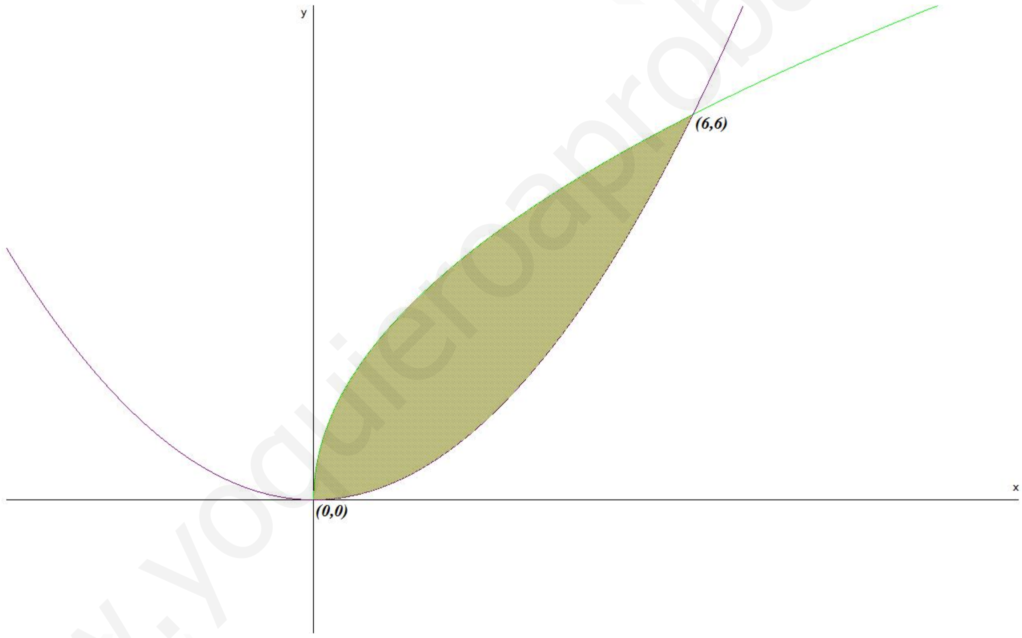
a) Dibújese, de manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas

$$y = \sqrt{6x}; \quad y = \frac{x^2}{6}$$

b) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) $\sqrt{6x} = \dfrac{x^2}{6} \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 6$



b) $\displaystyle\int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left.\frac{12x\sqrt{6x} - x^3}{18}\right]_0^6 = 12 \; u^2$

Opción B

Problema 3.16.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = 4$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(1, 4)$.

b) En $x = 1$ hay un máximo relativo, en $x = 4$ hay un mínimo relativo.
$f''(x) = 12x - 30 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$ y $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = 5/2$.

Problema 3.16.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1,5$.

Solución:

a) Asíntotas

- Verticales: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ó $x = 3$
Si $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

Si $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{27}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{27}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = 3$$

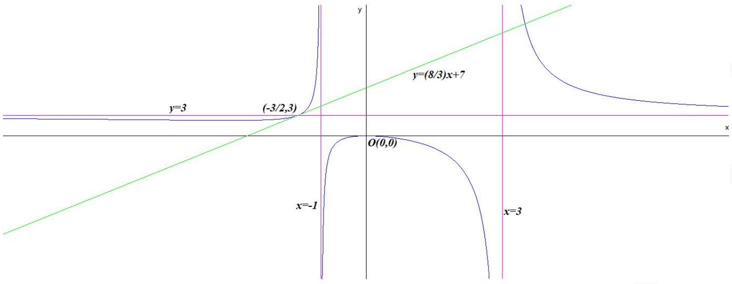
- Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f(-1,5) = 3$ y $m = f'(-1,5) = 8/3$

$$f'(x) = -\frac{6x(x+3)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y - 3 = 8/3(x + 3/2) \Longrightarrow y = \frac{8}{3}x + 7$$



3.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.16.4 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.

Solución:

a) $f(x) = \int (3x^2 + 2x)\, dx = x^3 + x^2 + C$:

$$f(1) = 4 \Longrightarrow 2 + C = 4 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

b)

$$b = f(1) = 4, \quad m = f'(1) = 5, \Longrightarrow y - 4 = 5(x - 1)$$

.

Problema 3.16.5 *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

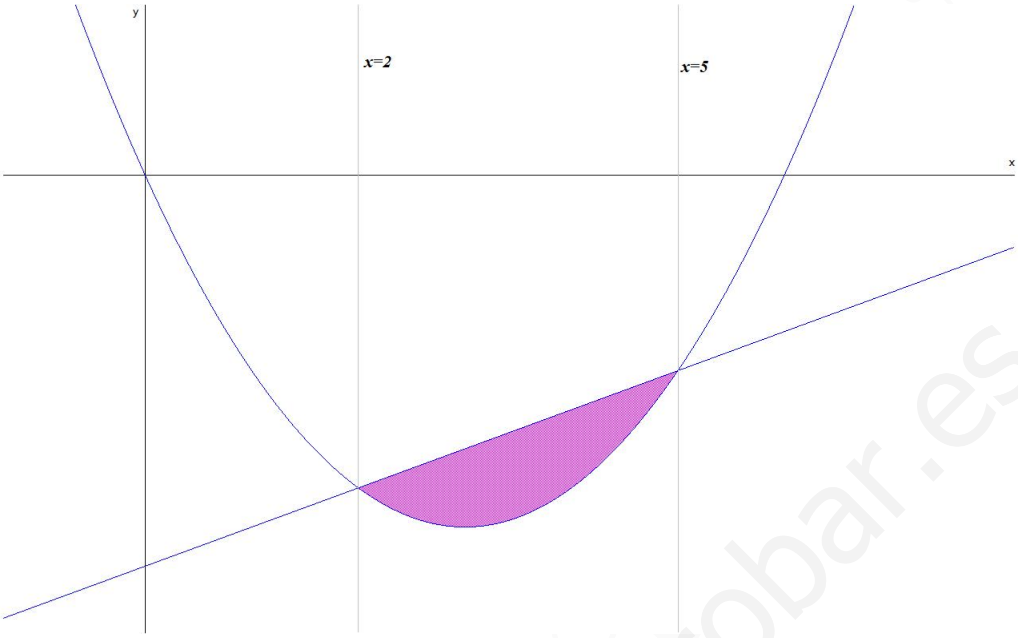
$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Solución:

a) Gráfica:



b) $x^2-6x=x-10 \Longrightarrow x=2$ y $x=5$.

$$F(x)=\int (f(x)-g(x))\,dx=\int (x^2-7x+10)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+10x$$

$$S_1=\int_2^5 (f(x)-g(x))\,dx=F(5)-F(2)=-\frac{9}{2}$$

$$S=|S_1|=\left|-\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.16.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si} \quad x<2 \\ 3x+m & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x=2$.

b) Calcúlese $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=-4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^+}(3x+m)=6+m$$

$$6+m=-4 \Longrightarrow m=-10$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} (x+m) = \infty$$

ubsectionOrdinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2+a}{x-1}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a, sabiendo que la función alcanza un extremo relativo en $x = -1$. Compruébese que se trata de un máximo.

b) Para $a = 1$, calcúlese $\int_{-1}^{0} (x-1)f(x)dx$.

Solución:

a)

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-a}{(x-1)^2}$, $f'(-1) = 0 \Longrightarrow a = 3$:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en $x = -1$ hay un máximo.

c) con $a = 1$:

$$\int_{-1}^{0} (x^2+1)\, dx = \frac{x^2}{2} + x\Big]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

Problema 3.16.8 *(2 puntos)* Se sabe que la derivada de cierta función real de variable real f es $f'(x) = x^2(x^2-2x-15)$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Determínense los extremos relativos de f, indicando si se trata de máximos o mínimos relativos.

Solución:

a) $x^2(x^2-2x-15)=0 \Longrightarrow x=0,\ \ x=-3,\ \ x=5$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

En $x=0$ $f'(x)$ no cambia de signo y pasa de decrecer a decrecer.
La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,-3)\cup(5,\infty)$ y decreciente en $(-3,5)$.

b) La función presenta un máximo en $x=-3$ y un mínimo en $x=5$.

Opción B

Problema 3.16.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida como

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+a & \text{si} \quad 0<x<2 \\ bx+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que f sea continua en toda la recta real.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

Solución:

a) $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(x^2+a)=a \end{array}\right. \Longrightarrow a=-1.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-}(x^2+a)=4+a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+}(bx+1)=2b+1 \end{array}\right. \Longrightarrow 4+a=2b+1 \Longrightarrow a-2b=-3.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ a-2b=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \end{array}\right. .$$

b) En $x=-1$ $b=f(-1)=0 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es el $(-1,0)$. $f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^2} \Longrightarrow$ la pendiente de la recta es $m=f'(-1)=-1/2$. La recta tangente es: $y=-\frac{1}{2}(x+1)$ en su ecuación punto pendiente.

3.16.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.16.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=4x^3-ax^2-ax+2$, $a\in R$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x=1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) Para $a=2$, calcúlese el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 2ax - a$:
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - a - a = 0 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$
$f''(x) = 24x^2 - 2a = 24x - 3$:
$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 3 = 9 > 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ Mínimo}$$

b)
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x^2 - 2x + 2)\,dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Opción B

Problema 3.16.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real
$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.

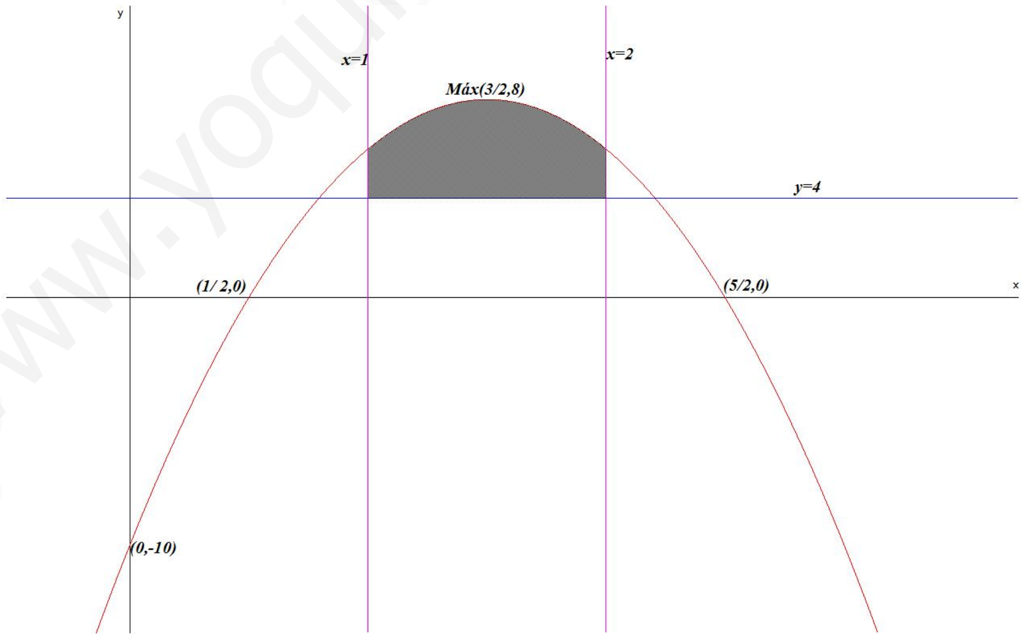
b) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = -16x + 24 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -16 \Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -16 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo en el punto $\left(\dfrac{3}{2}, 8\right)$.

Hay un punto de corte con OY en $(0, -10)$ y dos con OX en $(1/2, 0)$ y $(5/2, 0)$.



b) $g(x) = 4$.

$$S = \int_1^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^2 (-8x^2 + 24x - 14)\,dx = -\frac{8x^3}{3} + 12x^2 - 14x\Big]_1^2 = \frac{10}{3}\ u^2$$

Problema 3.16.12 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de esta función.

b) Determínense las asíntotas de esta función.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (e^x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego la función es continua en $R - \{2\}$

b) En la rama $x < 0$: $f(x) = e^x$ La función no tiene verticales pero si tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$ y, por tanto, no hay oblicuas.

En la rama $x \geq 0$: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2}$

Tiene una asíntota vertical en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

No tiene horizontales $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ Si tiene oblicuas $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = 5$$

$$y = x + 5$$

3.16.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.16.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real: $f(x) = e^{x^2}$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Determínense sus intervalos de concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$).

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$,

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Luego en $x = 0$ hay un mínimo. La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el $(0, \infty)$.

b) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2) > 0 \Longrightarrow$ la función es cóncava $\cup$ en todo el dominio de la función, es decir, en R.

Opción B

Problema 3.16.14 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \ln(x + 1) + m & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Nota: ln denota el logaritmo neperiano.

a) Determínese para qué valores del parámetro m la función f es continua en $x = 0$.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$.

Solución:

a) $$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 + 6) = 6 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (\ln(x + 1) + m) = m \end{array} \right. \Longrightarrow m = 6.$$

b) En $x = -2$ la función es $f(x) = x^2 + 6$ y $f'(x) = 2x$). La ecuación punto pendiente de la recta es $y - b = m(x - a)$ donde $a = -2$, $b = f(a) = f(-2) = 10$ y $m = f'(a) = f'(-2) = -4 \Longrightarrow y - 10 = -4(x + 2)$ es la recta tangente buscada.

Problema 3.16.15 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = (2x + 3)^5 + e^{2x}$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Calcúlese $\int f(x)\, dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 10(2x + 3)^4 + 2e^{2x}$

b) $$\int ((2x + 3)^5 + e^{2x})\, dx = \int (2x + 3)^5\, dx + \int e^{2x}\, dx = \frac{(2x + 3)^6}{12} + \frac{e^{2x}}{2} + C$$

3.17. Año 2016

3.17.1. Modelo

Opción A

Problema 3.17.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Estudíense y determínense sus asíntotas.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
  Si $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

  Si $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = 0$$

$$y = -x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(3-x^2)}{1-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\nearrow$	creciente $\searrow$	decreciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Opción B

Problema 3.17.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

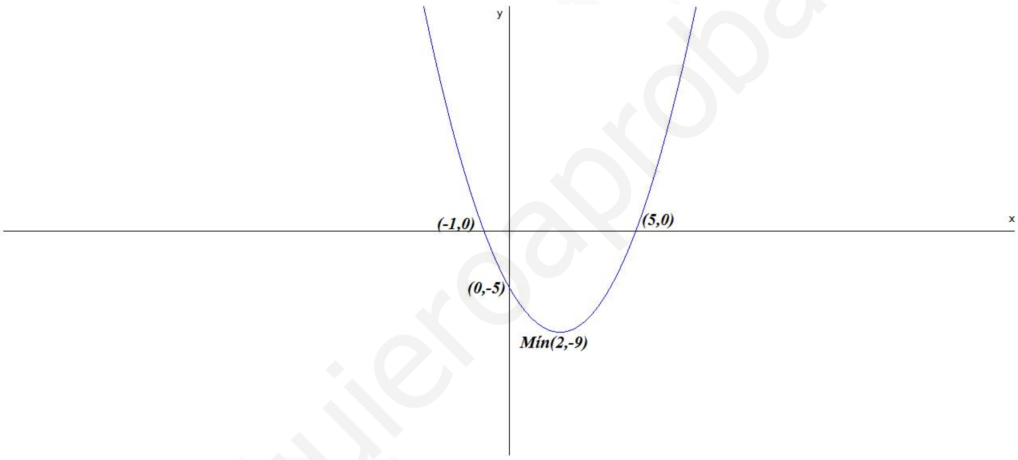
a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a)

Representación de $f(x) = x^2 - 4x - 5$:



b) $\displaystyle\int_{-1}^{5} \left(x^2 - 4x - 5\right)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x\right]_{-1}^{5} = -36$

$$S = |-36| = 36\, u^2$$

Problema 3.17.3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Determínense sus intervalos de concavidad ($\cap$) y convexidad ($\cup$).

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2}(1 + x^2)$

b) $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1) > 0$ siempre luego la función es siempre convexa $\cup$.

3.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.17.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8$$

.

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) $x^3 + 8 = 0 \Longrightarrow x = -2$ luego hay que separar dos áreas S_1 en el intervalo $[-3, -2]$ y S_2 en el intervalo $[-2, -1]$.

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-3}^{-2} = -\frac{33}{4}$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-1} = \frac{17}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{33}{4} + \frac{17}{4} = \frac{25}{2}\ u^2$$

b) $b = f(1) = 9,\ f'(x) = 3x^2,\ m = f'(1) = 3$. La ecuación de la recta tangente es: $y-9 = 3(x-1)$

Opción B

Problema 3.17.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+b}{x-2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x = -1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{-x+b}{x-2} = -\dfrac{1+b}{3} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{2x+6}{2x+4} = 2 \end{cases}$$

Luego $-\dfrac{1+b}{3} = 2 \Longrightarrow b = -7$

b) Asíntotas:

- ☛ Si $x \leq -1$ no hay asíntotas verticales ($x = 2$ no está en la rama). Si hay horizontales $y = -1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x+b}{x-2} = -1$$

- ☛ Si $x > -1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x = -1$ y $x = -3$) no están en la rama. Si hay horizontales $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1$$

Problema 3.17.6 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a)

$$f(x) = \int (6x^2 + 4x - 2)\, dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$$

$$f(0) = 5 \Longrightarrow C = 5 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

b) $6x^2 + 4x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 1/3$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1/3)$.

La función tiene un mínimo en $(1/3, 125/27)$ y un máximo en $(-1, 7)$.

3.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.17.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + 4$$

.

a) Escríbase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

b) Determínese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta $y = 4x$ y el eje de ordenadas.

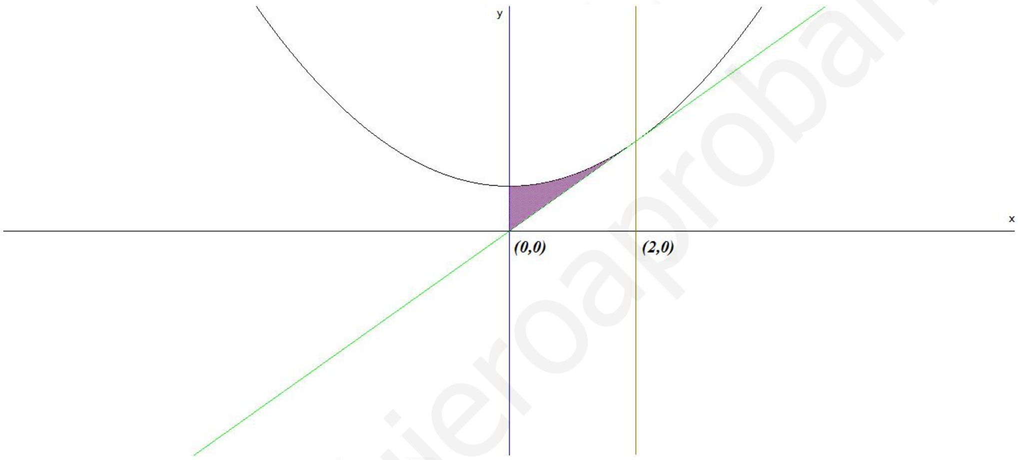
Solución:

a) $b = f(2) = 8$, $f'(x) = 2x$, $m = f'(2) = 4$. La ecuación de la recta tangente es: $y-8 = 4(x-2)$

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ (doble), como el eje de ordenadas (OY) es la recta $x = 0$ el intervalo de integración es $[0, 2]$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{8}{3}\ u^2$$



Problema 3.17.8 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

a) Determínense las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ **Horizontales:** No hay
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-1)^2}{x+2}=\infty$$

- ☛ **Oblicuas:** $y=mx+n$
$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+2x}=1$$
$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x+2}-x\right)=-4$$
Luego la asíntota oblicua es $y=x-4$

b) $f'(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}=0\Longrightarrow x=1$ y $x=-5$:

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5,1)$.

La función tiene un mínimo en $(1,0)$ y un máximo en $(-5,-12)$.

Opción B

Problema 3.17.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real
$$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$$

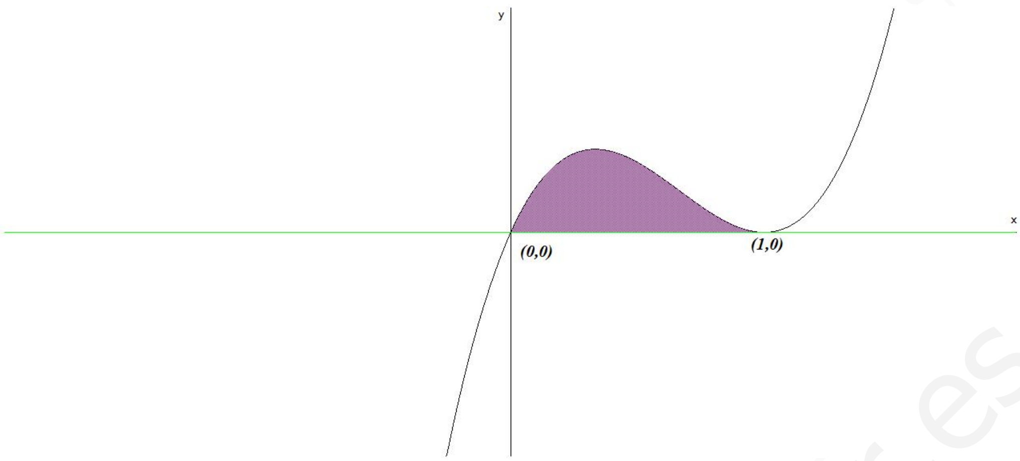
a) Determínense los valores de los parámetros reales a y b si se sabe que la recta $y=x$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) Para $a=1$ y $b=0$, calcúlese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x)=3x^2-4x+a\Longrightarrow m=f'(0)=a=1$.
El punto de tangencia es común a la curva y a la recta ($y=x$), luego es el $(0,0)\Longrightarrow f(0)=b=0$.

b) $f(x)=x^3-2x^2+x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=1$:
$$S_1=\int_0^1(x^3-2x^2+x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$
$$S=|S_1|=\frac{1}{12}\;u^2$$



3.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.17.10 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y $x = 2$.

b) Calcúlese, para $a = 4$ y $b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{ax+b}{x} = a+b \end{array} \right. \Longrightarrow a+b = 2$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{ax+b}{x} = \dfrac{2a+b}{2} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \sqrt{x^3+1} = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow 2a+b = 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b = 2 \\ 2a+b = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -2 \end{array} \right.$$

b)

$$S_1 = \int_1^2 \frac{4x-2}{x}\,dx = \int_1^2 \left(4 - \frac{2}{x}\right) dx = 4x - 2\ln|x|\big]_1^2 = 4 - 2\ln 2$$

$$S = |S_1| = 4 - 2\ln 2 = 2,614\ u^2$$

Opción B

Problema 3.17.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 3x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Determínense los valores de $a \in R$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (-x^2 + 3x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en todo R.
Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases}$$

Luego f no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow f$ es derivable en $R - \{0\}$.

b) En $x = a$ es $m = f'(a) = -2$, hay dos casos:

☞ Si $x < 0$: $f'(a) = 2a + 2 = -2 \Longrightarrow a = -2$
$b = f(-2) = 0 \Longrightarrow y = -2(x + 2)$

☞ Si $x \geq 0$: $f'(a) = -2a + 3 = -2 \Longrightarrow a = 5/2$
$b = f(5/2) = \frac{5}{4} \Longrightarrow y - \dfrac{5}{4} = -2(x - \dfrac{5}{2})$

Problema 3.17.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ **Verticales:**
$x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\left[\frac{6}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\left[\frac{6}{0^+}\right]=+\infty$$

$x=-3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\left[\frac{6}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+}\frac{x^2-3}{x^2-9}=\left[\frac{6}{0^-}\right]=-\infty$$

☛ **Horizontales:** $y=1$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-3}{x^2-9}=1$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x)=-\frac{12x}{(x^2-9)^2}=0\Longrightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0,3)\cup(3,\infty)$.

La función tiene un máximo en $(0,1/3)$.

3.18. Año 2017

3.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 3.18.1 *(2 puntos)*

a) Determínese el valor de la derivada de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}\Longrightarrow f'(0)=0$

b) Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

En $x = -1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x-x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = -x$

Opción B

Problema 3.18.2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) Calcúlense $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1-x^3}$ y $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1-x^3} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3-3x}{1-x^3} = -1$

$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^3-3x}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x(x^2-3)}{x} = -3$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

La función tiene un mínimo en $(1, -2)$ y un máximo en $(-1, 2)$.

Problema 3.18.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2}{x+2} = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} (x+2) = 2 \end{cases}$$

Luego f es discontinua no evitable en $x = 0$, hay un salto. Tampoco lo es en $x = -2$ donde hay una asíntota vertical, en conclusión: f es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}\,dx = 2\ln|x+2|]_{-1}^{0} = 2\ln 2.$

3.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

.

a) Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1$ y $x = 3$. Tendremos dos áreas S_1 con un intervalo de integración $[0, 1]$ y otro S_2 con un intervalo de integración $[1, 3]$.

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$S_1 = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\bigg]_1^3 = -\frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$.

Opción B

Problema 3.18.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + 5x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

a) Para que sea derivable tiene que ser continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (5x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 + 5x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego f es continua en $x = 0$. Comprobamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2x + 5 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 5$$

Luego f es derivable en $x = 0$.

b) En $x = 3 \Longrightarrow f(x) = x^2 + 5x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 5$
$b = f(3) = 25$, $m = f'(3) = 11$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 25 = 11(x - 3)$ (ecuación punto pendiente)

Problema 3.18.6 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = x^2 + 8x + 15$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 1/3$.

b) Determínense los máximos y los mínimos locales de $f(x)$, si los tuviese.

Solución:

a) $f(x) = \int (x^2 + 8x + 15)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + C$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 4 + 15 + C = \frac{1}{3} \Longrightarrow C = -19$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x - 19$$

b) $f'(x) = x^2 + 8x + 15 = 0 \Longrightarrow x = -5$ y $x = -3$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, -3)$.

La función tiene un mínimo en $(-3, -37)$ y un máximo en $(-5, -107/3)$.

3.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.18.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (ax + 1) = -a + 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (x^2 + x - 2) = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow -a + 1 = -2 \Longrightarrow a = 3$$

b) para $a = 2$ es $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

- ☞ Si $x < -1$ la recta $f(x) = 2x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 2 > 0$ es siempre creciente (en $(-\infty, -1)$ y no llegaría a cortar ni al eje de abscisas ni al de coordenadas.
- ☞ Si $x \geq -1$: $f(x) = x^2 + x - 2 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$ por la segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ luego $x = -1/2$ es un mínimo, por tanto, la función es decreciente en el intervalo $(-1, -1/2)$ y creciente en el $(-1/2, \infty)$.
  Haciendo $x = 0$ tendrá un punto de corte con OY en $(0, -2)$ y con OX se calcularían haciendo $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -2$ no está en la rama, luego el único punto de corte con el eje de abscisas será $(1, 0)$.

Opción B

Problema 3.18.8 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

a) Estúdiense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:
En $x = 2/3$:

$$\lim_{x \longrightarrow (2/3)^-} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \left[\frac{-5/9}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \left[\frac{-5/9}{0^+}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = -\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2x} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x - 2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

Luego la asíntota oblicua es $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

b) $f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 3}{(3x - 2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0$ no tiene solución y $f'(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} - \{2/3\} \Longrightarrow f$ creciente en $\mathbb{R} - \{2/3\}$.

Problema 3.18.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 + ax$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

b) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) $f'(x) = 2x + a$ luego $f'(2) = 4 + a = 0 \Longrightarrow a = -4$. Como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.

b) Si $a=-2 \Longrightarrow f(x)=x^2-2x=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=2$:

$$S_1=\int_0^2 (x^2-2x)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}$$

$$S=|S_1|=\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}\ u^2$$

3.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.18.10 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rcr} x^2-2x & \text{si} & x<-1\\ x & \text{si} & -1\le x<1\\ -x^2+2x & \text{si} & x\ge 1\end{array}\right.$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

Solución:

a) Continuidad en $x=-1$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}(x^2-2x)=3\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(x)=-1\end{array}\right. \Longrightarrow \text{discontinuidad no evitable}$$

Continuidad en $x=1$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(x)=1\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(-x^2+2x)=1\\ f(1)=1\end{array}\right. \Longrightarrow \text{es continua}$$

Luego f es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$.

b) La función no corta al eje de abscisas en los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ Serán dos áreas a estudiar, S_1 en el intervalo $(0,1)$ y S_2 en el $(1,2)$.

$S_1=\displaystyle\int_0^1 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

$S_2=\displaystyle\int_1^2 (-x^2+2x)\,dx=\left.-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2=\frac{2}{3}$

$$S=|S_1|+|S_2|=\left|\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.18.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = (3x^2 - 2x)^2$$

a) Calcúlese $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (9x^4 - 12x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{9x^5}{5} - 3x^4 + \frac{4x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{94}{15}$

b) Sea $y - b = m(x - a)$ la ecuación punto pendiente de la recta tangente tenemos que $b = f(a) = f(2) = 64$ y como $f'(x) = 2(3x^2 - 2x)(6x - 2) \Longrightarrow m = f'(2) = 160$:

$$y - 64 = 160(x - 2)$$

Problema 3.18.12 *(2 puntos)* La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

(Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias)

Solución:

a) $b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \Longrightarrow x = 40$ m y $x = 80$ m.

b) $b'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$ para comprobar si es un máximo recurrimos a la segunda derivada: $b''(x) = -2 \Longrightarrow b''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo cuando se producen 60 m con un beneficio de $b(60) = 400$ euros.

3.19. Año 2018

3.19.1. Modelo

Opción A

Problema 3.19.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

Solución:

a) La ecuación de una recta en su ecuación punto pendiente es $y - b = m(x - a)$ donde $b = f(a) = f(1) = 8$. La derivada de la función es $f'(x) = 12x^2 - 24x \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = -12$, luego la ecuación de la recta tangente es:

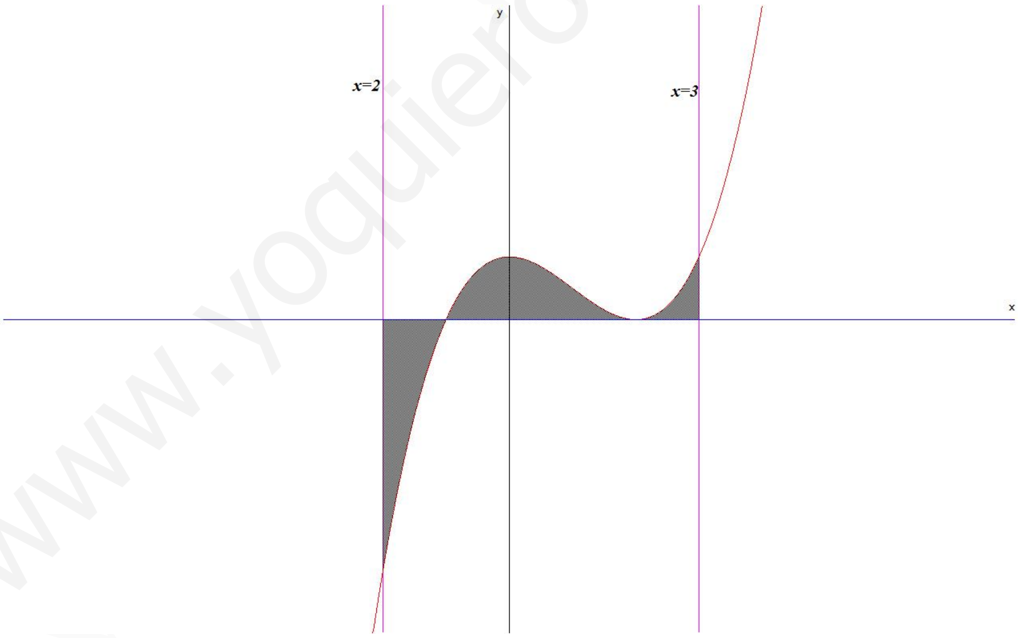
$$y - 8 = -12(x - 1)$$

b) La función f corta al eje de abscisas en los puntos $x = -1$ y $x = 2$, por lo que habrá tres recintos $S_1 : [-2, -1]$, $S_2 : [-1, 2]$ y $S_3 : [2, 3]$.

$$F(x) = \int (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = x^4 - 4x^3 + 16x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = F(-1) - F(-2) = -27$$
$$S_2 = \int_{-1}^{2} (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = F(2) - F(-1) = 27$$
$$S_3 = \int_{2}^{3} (4x^3 - 12x^2 + 16)\, dx = F(3) - F(2) = 5$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 27 + 27 + 5 = 59\ u^2$$



Opción B

Problema 3.19.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real: $f(x) = \dfrac{3x^2 + 3}{x}$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+3}{x} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+3}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+3}{x} - 3x\right) = 0$$

$$y = 3x$$

b) $f'(x) = \dfrac{3(x^2-1)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-1,0)\cup(0,1)$, y es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Tiene un Máximo en $(-1,-6)$ y un mínimo en $(1,6)$.

Problema 3.19.3 *(2 puntos)* El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidos al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0,8]$.

a) Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.

b) Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución:

a) $f(0) = -12$ quiere decir que si la empresa no produce nada incurre en pérdidas de 12000 euros diarios. $f(8) = -28$ quiere decir que la empresa tendría unas pérdidas de 28000 euros (sobreproducción) Calculamos la cantidad de toneladas para obtener un beneficio máximo: $f'(x) = -4x + 14 = 0 \Longrightarrow x = 3,5$ por la segunda derivada $f''(x) = -4 \Longrightarrow f''(3,5) = -4 < 0 \Longrightarrow x = 3,5$ es un máximo. En conclusión: El beneficio máximo se produce con 3,5 toneladas y será de $f(3,5) = 12500$ euros.

b) La empresa no tendría ni ganancias ni pérdidas cuando $f(x) = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 14x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ tonelada o $x = 6$ toneladas.

3.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.19.4 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x+2}{x-1} = 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{3x^2-2x}{x+2} = 2 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 2$, en ese punto hay un salto.

b) Si $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Opción B

Problema 3.19.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y asíntotas:

☛ Verticales: $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} - x \right) = -2$$

$$y = x - 2$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = -3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-3, -1)$, y es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$. Tiene un Máximo en $(-3, -27/4)$.

Problema 3.19.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

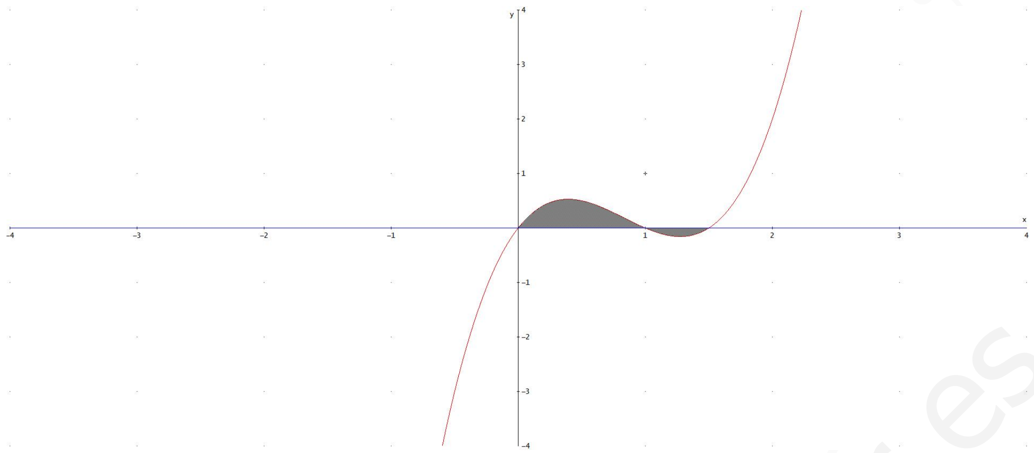
a) La función f corta al eje de abscisas en los puntos:
$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 1$ y $x = 3/2$, luego tendremos los recintos $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 3/2]$.

$$F(x) = \int (2x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$$

$$S_1 = \int_0^1 (2x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_1^{3/2} (2x^3 - 5x^2 + 3x)\, dx = F(3/2) - F(1) = -\frac{5}{96}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96}\ u^2$$



b) La ecuación de una recta en su ecuación punto pendiente es $y-b = m(x-a)$ donde $b = f(a) = f(0) = 0$. La derivada de la función es $f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \Longrightarrow m = f'(a) = f'(0) = 3$, luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y = 3x$$

3.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.19.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f'(x)$, siendo f' la función derivada de f.

Solución:

a) $b = f(0) = 1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1 \Longrightarrow y - 1 = -x \Longrightarrow y = -x + 1$

b) La función $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ no corta el eje OX luego $S_1 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.19.8 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínese si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio.

b) Calcúlense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si las tuviese.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x+1) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -1 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 0$, en ese punto hay un salto. Luego f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Si $x < 0$: No hay asíntotas, la función es una recta.
Si $x \geq 0$: La función no tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula nunca, si tendría una horizontal en $y = 1$

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$ y, por tanto, no habría oblicuas en esta rama.

Problema 3.19.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = -2$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(-3, -2)$.

b) Tiene un Máximo en $(-3, -27)$ y un Mínimo en $(-2, -28)$.

3.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.19.10 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real: $f(x) = \dfrac{x}{1-4x^2}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estúdiense las asíntotas de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$ y $f'(x) = \dfrac{4x^2+1}{(1-4x^2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos y $f'(x) > 0$ en todo el dominio de la función, luego la función es creciente en $\mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$.

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = -1/2$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow(-1/2)^-} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{-1/2}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow(-1/2)^+} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

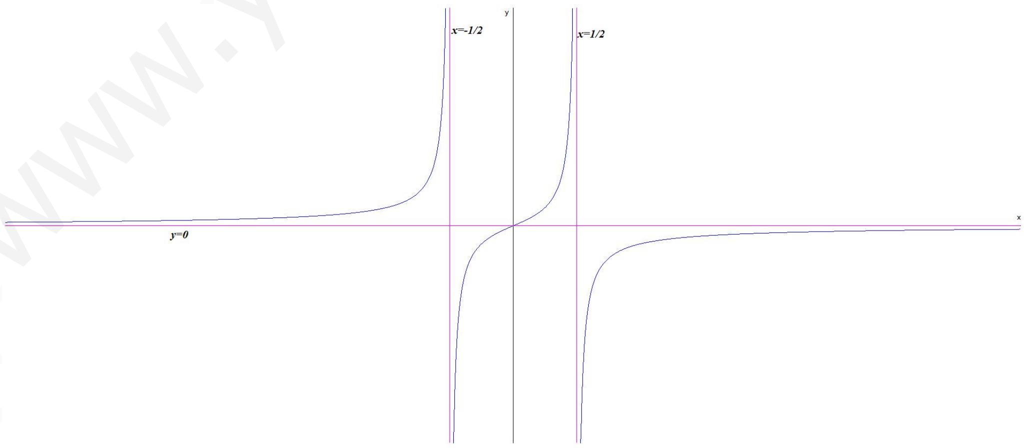
En $x = 1/2$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow(1/2)^-} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{1/2}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow(1/2)^+} \frac{x}{1-4x^2} = \left[\frac{1/2}{0^-}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x}{1-4x^2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales



Opción B

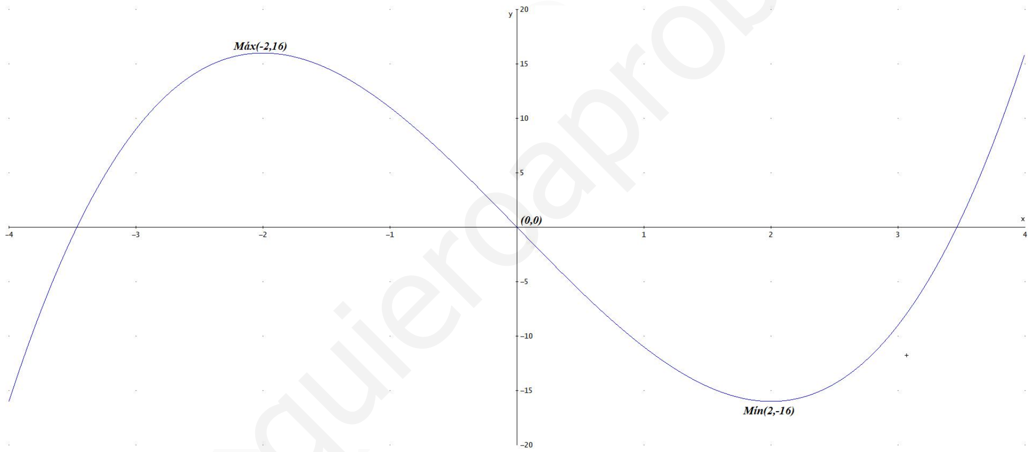
Problema 3.19.11 *(2 puntos)* Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) Determínese, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?

b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$ y $f''(x) = 6x$ por el método de la segunda derivada en $x = 2 \Longrightarrow f''(2) = 12 > 0 \Longrightarrow$ hay un mínimo, y en $x = -2 \Longrightarrow f''(-2) = -12 > 0 \Longrightarrow$ hay un máximo, con $f(-2) = -8 + 24 = 16$ millones de euros, siempre y cuando la variable x pueda tener valores negativos.



b) La función f es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, luego para valores superiores a $x = 2$ los beneficios irán creciendo.

Problema 3.19.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2}{3+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínense el dominio de $f(x)$ y estúdiese su continuidad.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x^3+2e^x)=2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{2}{3+x}=2/3 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x=0$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3+2e^x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}+2e^x\right]_{-1}^{0}=\frac{7}{4}-\frac{2}{e}\simeq 1,014$

3.20. Año 2019

3.20.1. Modelo

Opción A

Problema 3.20.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ la pendiente de la recta es $m=f'(0)=\dfrac{1}{4}$ y el punto de tangencia será $(0,f(0))=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. La recta es:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)\Longrightarrow x-4y+2=0$$

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x=1$:
  $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{2x}{2x+1}=\frac{2}{3}$, luego en $x=1$ no hay asíntota, hay un una discontinuidad evitable (un agujero)
  En $x=-2$:
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{3}{0^+}\right]=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{3}{0^-}\right]=-\infty \end{cases}$$
- Horizontales: $y=1$
  $$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=1$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Opción B

Problema 3.20.2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x < -1 \\ e^{2x+2} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual $f(x)$ es una función continua en $x = -1$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} (2x + a) = -2 + a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} e^{2x+2} = e^0 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow -2 + a = 1 \Longrightarrow a = 3$$

b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x+2}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+2}\Big]_0^1 = \frac{e^2}{2}(e^2 - 1)\ u^2 \simeq 23,6\ u^2$$

Problema 3.20.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, 1 - \sqrt{2})$	$(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$	$(1 + \sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty)$.

b) Tiene un máximo en $\left(1 + \sqrt{2}, \dfrac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right)$ y un mínimo en $\left(1 - \sqrt{2}, -\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$.

3.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.20.4 *(2 puntos)* La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.

b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$) de esta función.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 4x - 6)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$ como $f(0) = 3 \Longrightarrow C = 3$ luego la función será:

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$$

b) $f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1, 3)$. Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{19}{3}\right)$ y un mínimo en $(3, -15)$.

$f''(x) = 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$:

	$(-\infty, 1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función tiene un punto de inflexión en el punto $\left(1, -\frac{13}{3}\right)$

Opción B

Problema 3.20.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

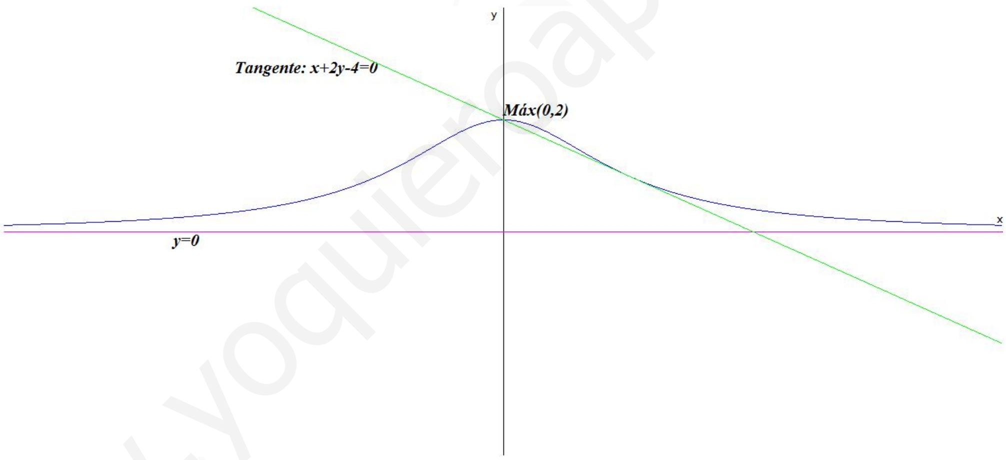
a) $f'(x) = -\dfrac{16x}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, y es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.
Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{8}{x^2+4} = 0$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) La pendiente de la recta es $m = f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ y el punto de tangencia será $(2, f(2)) = (2, 1)$. La recta es:
$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Longrightarrow x + 2y - 4 = 0$$



Problema 3.20.6 *(2 puntos)* La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:
$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(e^x+k)=1+k \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(1-x^2)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow 1+k=1 \Longrightarrow k=0$$

Si $k \neq 0$ la función es discontinua en $x = 0$.
Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-}(1-x^2)=-8 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right. \Longrightarrow$$

En $x = 3$ la función es siempre discontinua, en resumen: Si $k = 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si $k \neq 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Con $k = 0$:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1-x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - e^{-1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \simeq 1,3\ u^2$$

3.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.7 *(2 puntos)* Se consideran las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 5x + 20; \quad g(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

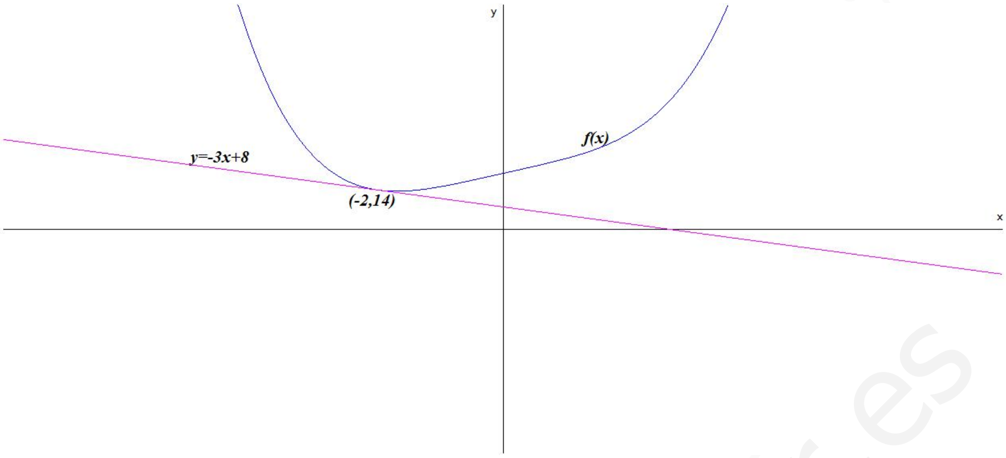
a) Hállese el punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente -3 y determínese la ecuación de esta recta tangente.

b) Calcúlese el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de g, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje OX sea igual a $2\ u^2$.

Solución:

a) $f'(x) = x^3 + 5 \Longrightarrow m = f'(a) = a^3 + 5 = -3 \Longrightarrow a^3 = -8 \Longrightarrow a = -2$ y el punto de tangencia es $(a, f(a)) = (-2, f(-2)) = (-2, 14)$:

$$y - 14 = -3(x + 2) \Longrightarrow y = -3x + 8$$



b)

$$\int_0^1 \left(\frac{ax}{x^2+1}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx = \frac{a}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{(x+1)}\Big]_0^1 =$$

$$\frac{a\ln 2+1}{2} = 2 \Longrightarrow a = \frac{3}{\ln 2} \simeq 4,33$$

Problema 3.20.8 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

a) Determínense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Obténganse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ y Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

  En $x = 3$:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

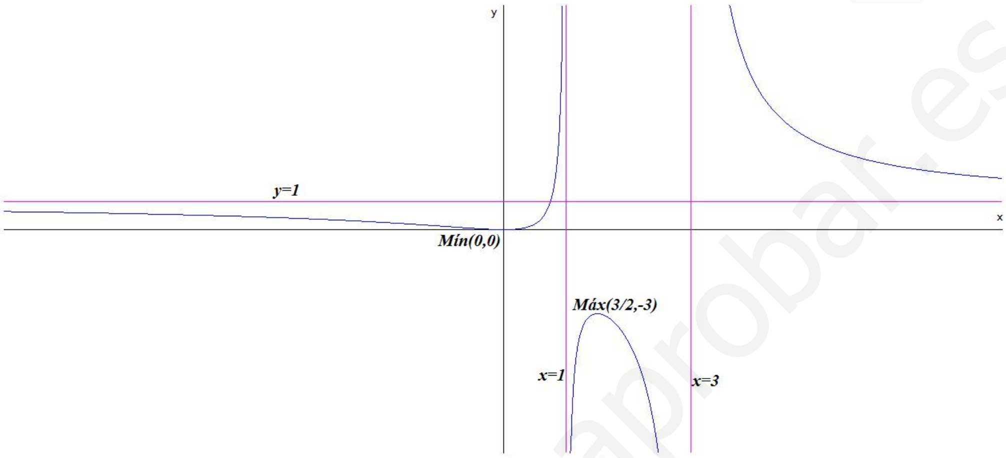
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-4x+3} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{2x(2x-3)}{(x^2-4x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3/2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3/2)$	$(3/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,1)\cup(1,3/2)$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(3/2,3)\cup(3,+\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(3/2,-3)$ y un mínimo relativo en $(0,0)$



Opción B

Problema 3.20.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-a}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga tangente horizontal en $x = 3$.

b) Hállense las asíntotas de $f(x)$ para $a = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3a)}{(x^2-a)^2}$ como $f'(3) = 0 \Longrightarrow \dfrac{9(9-3a)}{(9-a)^2} = 0 \Longrightarrow a = 3$

b) Si $a = 4 \Longrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-4}$. Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = -2$:

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty$$

  En $x = 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$
- ☛ Oblicuas: $y=mx+n$
$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1$$
$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0$$
$$y=x$$

3.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.20.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x)=2x^3-8x$.

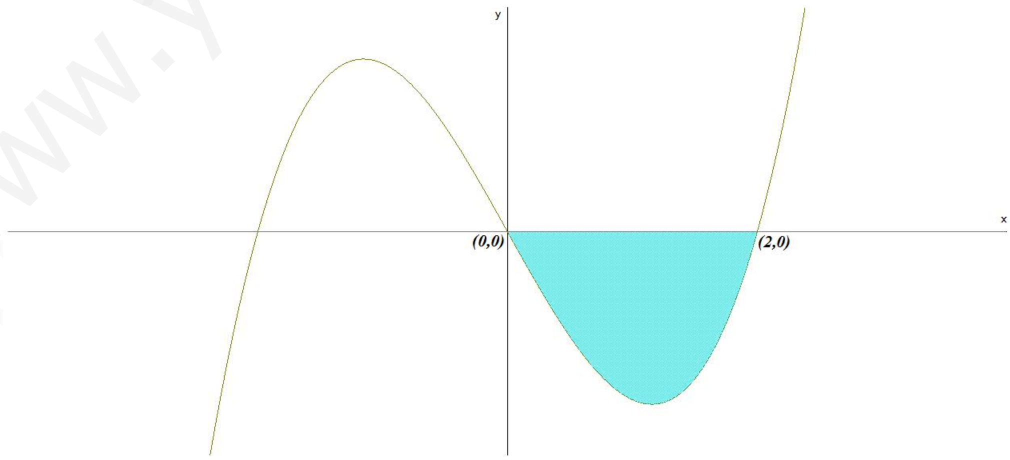
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y=f(x)$ es horizontal.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=0$, $x=2$.

Solución:

a) $f(x)=2x^3-8x \Longrightarrow f'(x)=6x^2-8=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Longrightarrow\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\right)$ y $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\right)$

b) $2x^3-8x=0\Longrightarrow x=0$, $x=2$ y $x=-2$. Luego la función no corta el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$:
$$S_1=\int_0^2(2x^3-8x)\,dx=\left.\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_0^2=-8$$
$$S=|S_1|=|-8|=8\ u^2$$



Problema 3.20.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.

b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} \dfrac{x^3}{x^2-9} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} (x^2-4) = 5 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 3$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$ (En $x = -3$ hay una asíntota vertical)

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 3$ hay una asíntota por la izquierda, se ha visto en el apartado anterior.
  En $x = -3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -3^-} \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -3^+} \dfrac{x^3}{x^2-9} = \left[\dfrac{-27}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay.

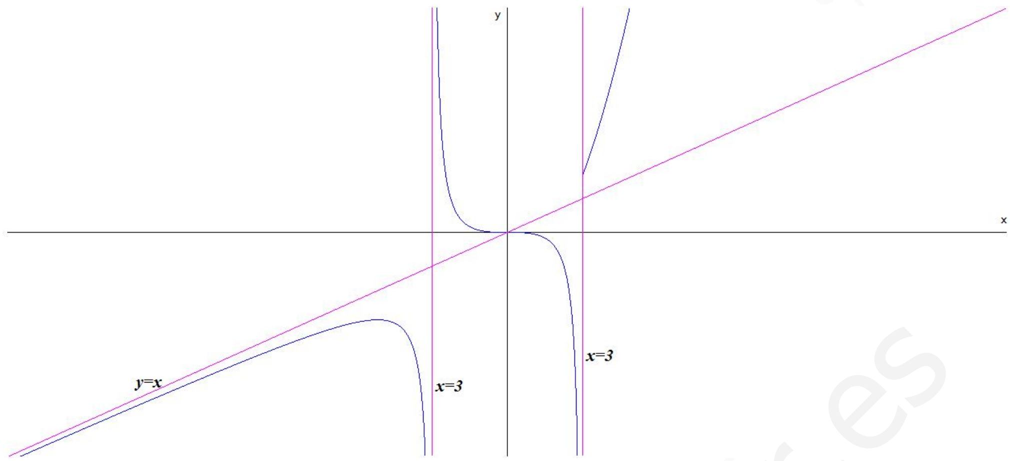
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3-9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = 0$$

$$y = x$$



Opción B

Problema 3.20.12 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Solución:

a) Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 3 \Longrightarrow (0, 3)$.
Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-3, 0)$.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty \quad \lim_{x\longrightarrow \infty}(x^3 + x^2 - 5x + 3) = \infty$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $f'(a) = 3 \Longrightarrow 3a^2 + 2a - 5 = 3 \Longrightarrow 3a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = \dfrac{4}{3}$.

3.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.20.13 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$$

a) Determínense las asíntotas verticales y horizontales de f, si las hubiese.

b) Calcúlese la derivada de $f(x)$, para los valores de x en donde f es derivable y determínese la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

  En $x = -2$:

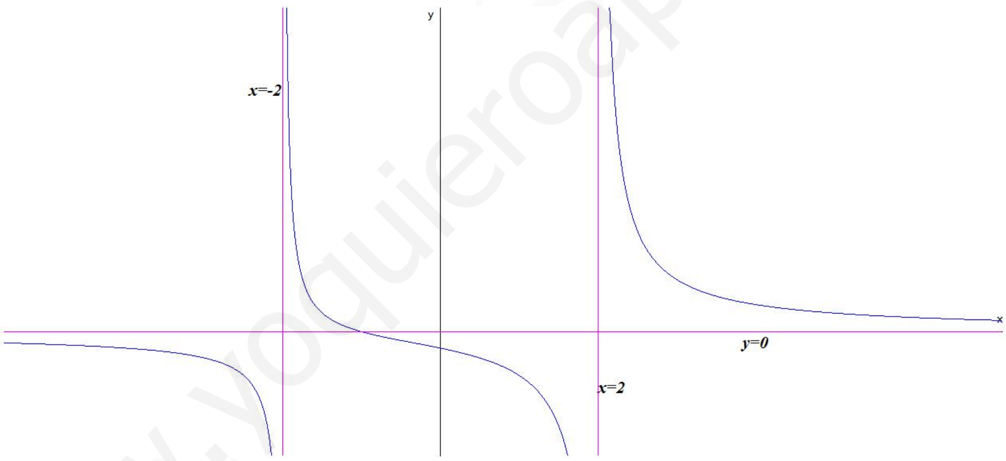
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+2x+4}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{7}{9}$



Opción B

Problema 3.20.14 *(2 puntos)* Considérese la función de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ a + e^{-5x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínese el valor de a para que la función sea continua en $x = 0$.

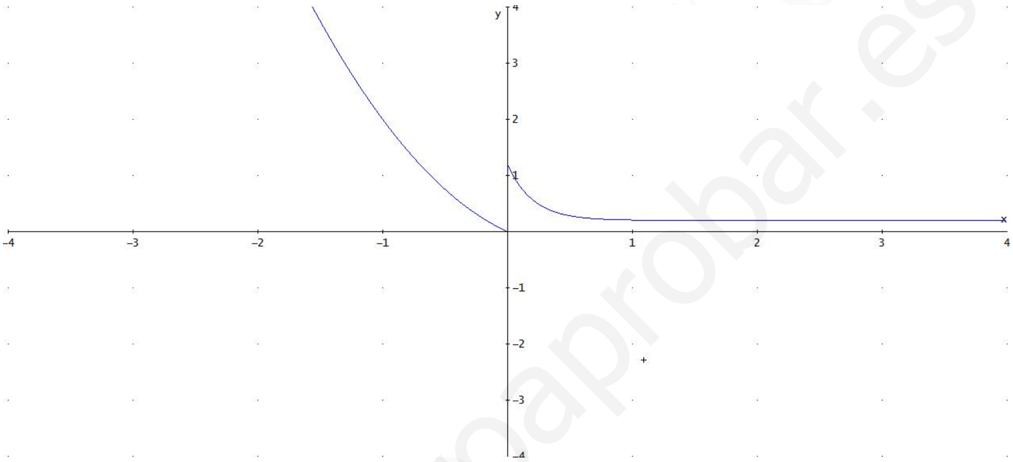
b) Para $a = 1/5$, calcúlese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1/5$, y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x^2-x)=0\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(a+e^{-5x})=a+1\end{array}\right. \Longrightarrow a+1=0 \Longrightarrow a=-1$$

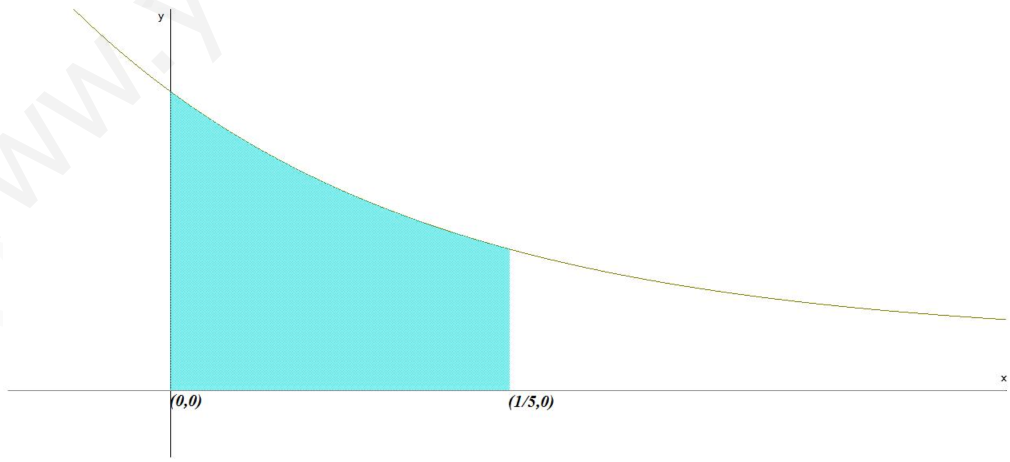
b) En el intervalo $[0,1/5]$ la función es $f(x)=\dfrac{1}{5}+e^{-5x}$ comprobamos si la función corta al eje OX en ese intervalo:
$f(x)=\dfrac{1}{5}+e^{-5x}=0 \Longrightarrow e^{-5x}=-\dfrac{1}{5}$ no tiene soluciones reales.



$$F(x)=\int\left(\frac{1}{5}+e^{-5x}\right)dx=\frac{x-e^{-5x}}{5}+C$$

$$S_1=\int_0^{1/5}\left(\frac{1}{5}+e^{-5x}\right)dx=F\left(\frac{1}{5}\right)-F(0)=\frac{6}{25}-\frac{1}{5e}\simeq 0,166$$

$$S=|S_1|=\frac{6}{25}-\frac{1}{5e}\simeq 0,166\ u^2$$



Problema 3.20.15 *(2 puntos)* considera la función de variable real

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x}$$

a) Determínense las asíntotas verticales y horizontales, si las hubiese.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

  En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$.

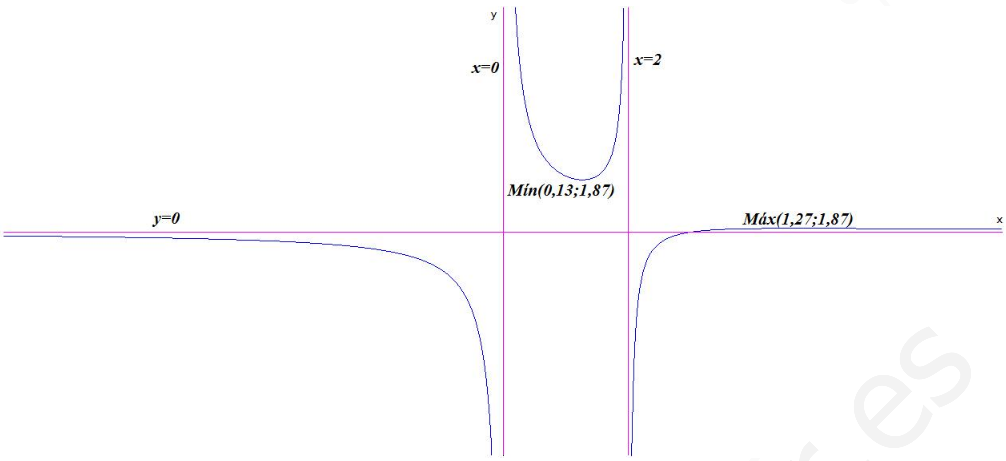
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-2x} = 0$$

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2-6x+6}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

	$(-\infty, 3-\sqrt{3})$	$(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$	$(3+\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(3-\sqrt{3}, 2) \cup (2, 3+\sqrt{3})$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, \infty)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3+\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = (0,13; 1,87)$ y un máximo en $\left(3-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = (1,27; 1,87)$.



3.21. Año 2020

3.21.1. Modelo

Opción A

Problema 3.21.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{si} \quad x < -8 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad -8 \le x < 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano y $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa $x = -8$ y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.

b) Obtener la recta tangente a la función en el punto $x = e$ y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

Solución:

a) Continuidad en $x = -8$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -8^-} (-x + a) = 8 + a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -8^+} \sqrt[3]{x} = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow 8 + a = -2 \Longrightarrow a = -10$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \ln x = 0 \end{array} \right.$$

En $x = 1$ la función es discontinua y no evitable, hay un salto concluimos que para $a = -10$ la función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) Cuando $x = e$ la rama es $f(x) = \ln x$:

$$a = e, \;\; b = f(a) = f(e) = 1, \;\; f'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow m = f'(a) = \frac{1}{e} \Longrightarrow$$

$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Longrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

Como la pendiente de esta recta $m = \dfrac{1}{e} > 0 \Longrightarrow$ la recta es creciente.

Problema 3.21.2 *(2 puntos)* Dada la curva

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

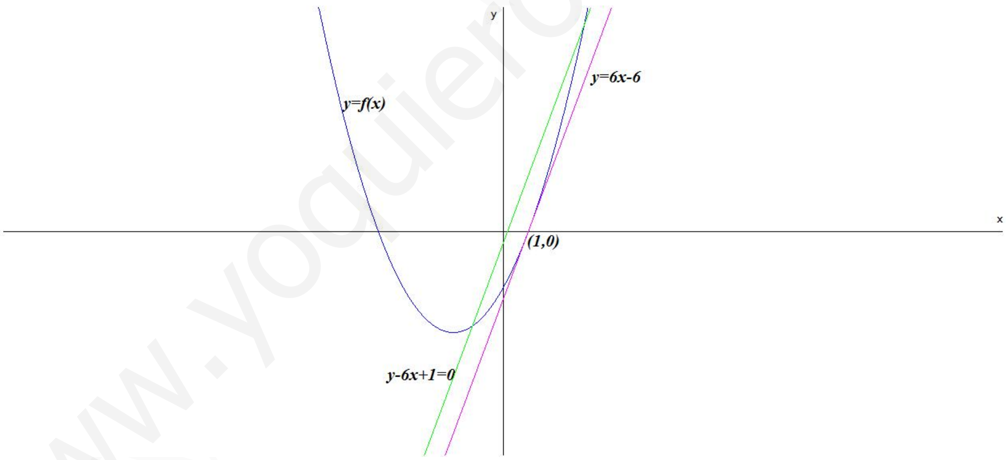
a) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y - 6x + 1 = 0$, indicando su abscisa y ordenada.

b) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráficas de $f(x)$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

Solución:

a) $y = 6x - 1 \Longrightarrow$la pendiente de la recta es $m = 6$
$f'(x) = 2x + 4$ la pendiente de la recta es $m = f'(a) = 2a + 4 = 6 \Longrightarrow a = 1$ y el punto de tangencia será $(1, f(1)) = (1, 0)$. La recta es:

$$y - 0 = 6(x - 1) \Longrightarrow y = 6x - 6$$

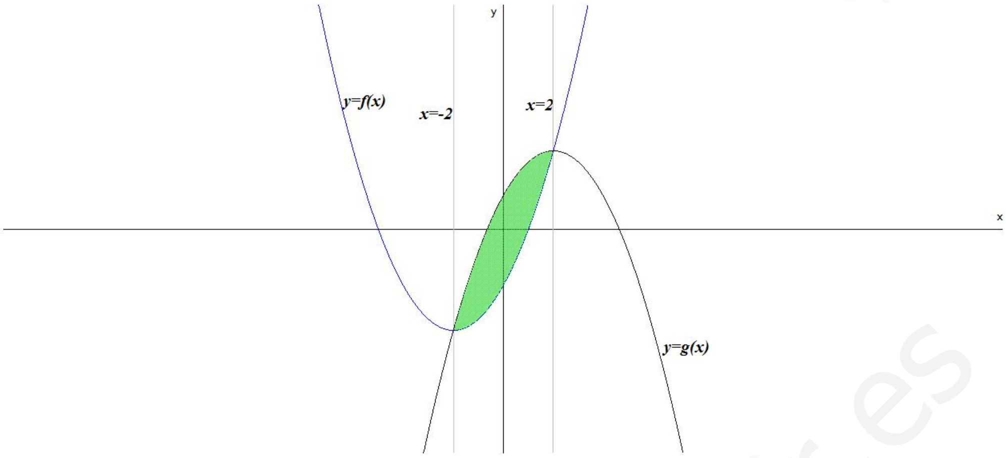


b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 + 4x - 5 = -x^2 + 4x + 3 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 - 8)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 8x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = F(2) - F(-2) = \left(\frac{16}{3} - 16\right) - \left(-\frac{16}{3} + 16\right)$$

$$= -\frac{64}{3} \Longrightarrow S = |S_1| = \frac{64}{3}\; u^2$$



Opción B

Problema 3.21.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

Tiene un Máximo en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y un mínimo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -e^{-1/2}\right)$.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\infty} = 0$$

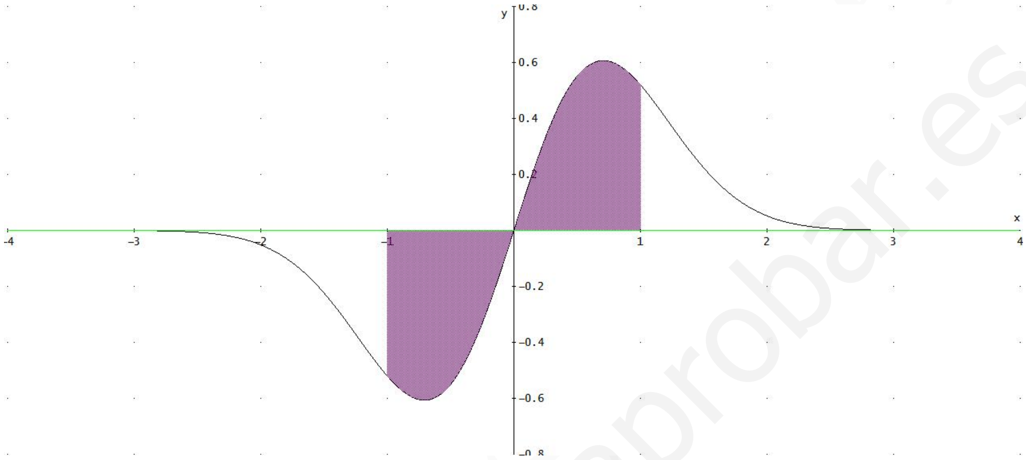
b) La función $f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ corta al eje OX en $x = 0$ y tendremos dos recintos de integración: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

$$F(x) = \int \sqrt{2}xe^{-x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x) = F(0) - F(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x) = F(1) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 0,894\ u^2$$



3.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.21.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:

a) $3x + x^2 = x(3 + x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -3 \Longrightarrow$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \left[\frac{0}{0}\right] + 4 = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4 - 3x^2}{3 + 2x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Longrightarrow$$

La función f presenta en el punto $x = 0$ una discontinuidad evitable (un agujero) La extensión por continuidad que necesita esta función para ser continua en ese punto sería hacer $f(0) = \dfrac{16}{3}$.

b) **Asíntotas**:

- ☛ **Verticales**: En $x = 0$ no hay asíntota por el apartado anterior. Analizamos en $x = -3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^-}\right] + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^+}\right] + 4 = -\infty$$

- ☛ **Horizontales**: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = -\infty$$

- ☛ **Oblicuas**: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2 + 4x + 16}{x^2 + 3x} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{7x + 16}{x + 3} = 7$$

$$y = -x + 7$$

Problema 3.21.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

Solución:

a) $b = f(-1) = 0$. $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(-1) = 3$ Luego la ecuación de la recta tangente será:

$$y = 3(x + 1) \Longrightarrow y = 3x + 3$$

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. Como $x \geq 0$ el intervalo de integración será el $[0, 2]$.

$$S = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) = \left.\frac{-x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{44}{15}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.21.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{-\frac{x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

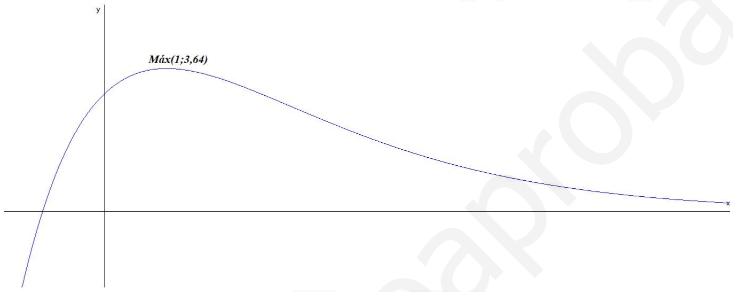
a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x+k-2) \text{ y } f'(1) = 0 \Longrightarrow \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1-k) = 0 \Longrightarrow k = 1$$

b) Si $k = 1 \Longrightarrow f(x) = 3(x+1)e^{-\frac{x}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$, y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$ con un máximo en $\left(1, \frac{6}{\sqrt{e}}\right) = (1; 3, 64)$.



3.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.21.7 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) Determine el valor de del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $a = 1$.

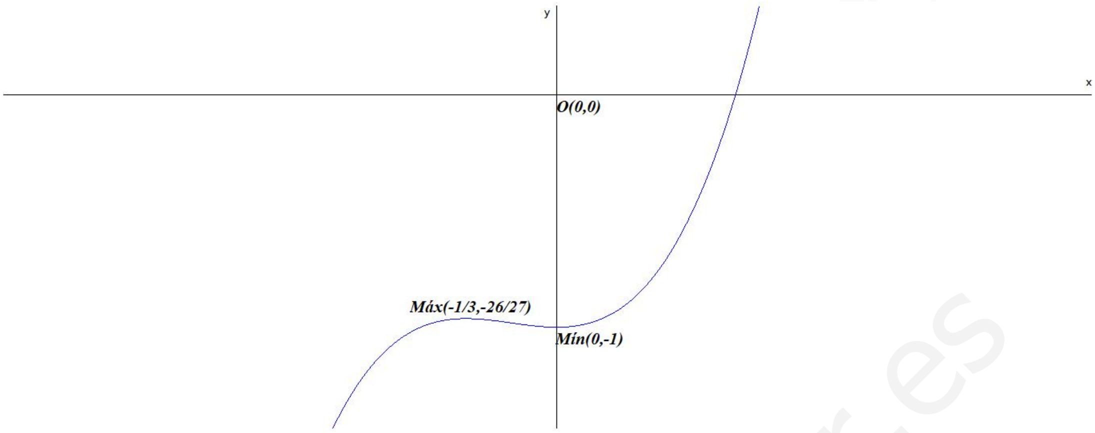
Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax \Longrightarrow f'(-1) = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$
$f''(x) = 12x + 2a \Longrightarrow f''(-1) = -12 + 6 = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + x^2 - 1 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{1}{3}$.

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$ y un máximo en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{26}{27}\right)$.



Opción B

Problema 3.21.8 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 \Longrightarrow f''(x) = 6ax - 2,\ f''(1) = 6a - 2 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$

b) $a = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$. La función no tiene puntos de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[0, 1]$, luego:

$$S = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{3}\ u^2$$

Problema 3.21.9 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x > 1 \\ \\ -x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$. ¿Es la función $f(x)$ continua en todo su dominio?.

b) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a)
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(-x^2)=-1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{2x^2-4}{2x}=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 1}f(x)=-1$$

Y como $f(1)=-1\Longrightarrow f$ es continua en $x=1$.

b) La rama $x\le 1$ no tiene asíntotas, estudiamos la rama $x>1$:

- Verticales: Las únicas posibles son $x=1$ (por el apartado anterior no lo es) y $x=-1$ no está en la rama, luego no hay asíntotas verticales.
- Horizontales: $y=1$.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=1$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

3.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.21.10 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si} & x<1 \\ \\ 2m+\ln x & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

a) Estudie los valores del parámetro $m\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ y calcule la derivada de la función para $x<1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y=f(x)$, las rectas $x=-1$ y $x=0$ y el eje OX:

Solución:

a) Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\dfrac{6x}{2x^2+1}=2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(2m+\ln x)=2m \\ \\ f(1)=2m \end{array}\right. \Longrightarrow 2m=2\Longrightarrow m=1$$

En $x<1\Longrightarrow f(x)=\dfrac{6x}{2x^2+1}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$

b) En el intervalo $[-1,0]$ la función es $f(x)=\dfrac{6x}{2x^2+1}$ y no corta al eje OX en ese intervalo.

$S_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{6x}{2x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\left(\ln(2x^2+1)\right]_{-1}^{0}=-\frac{3\ln 3}{2}$

$S=|S_1|=\left|-\dfrac{3\ln 3}{2}\right|=\dfrac{3\ln 3}{2}\simeq 1,65\ u^2$

Opción B

Problema 3.21.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \overline{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.

b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5} = a = -1$$

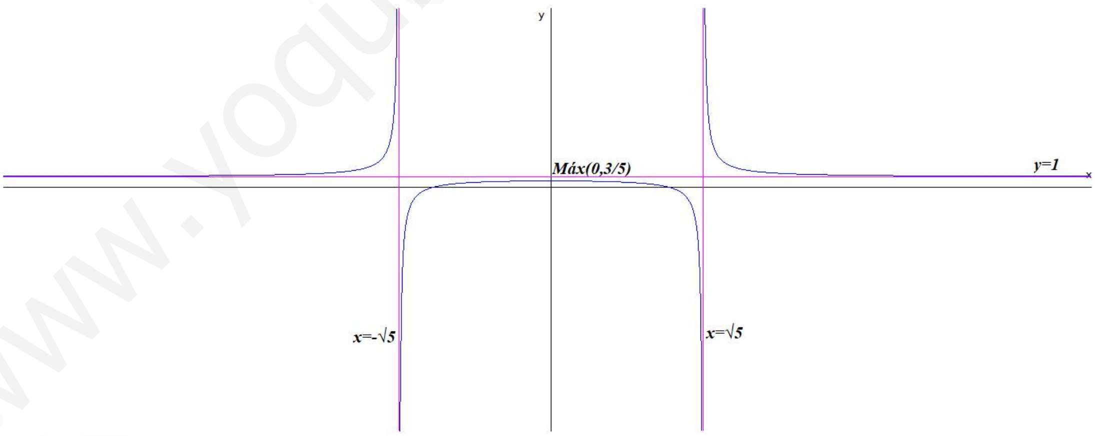
b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 5}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$.

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = 0$ es un máximo local.

La función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$.



Problema 3.21.12 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

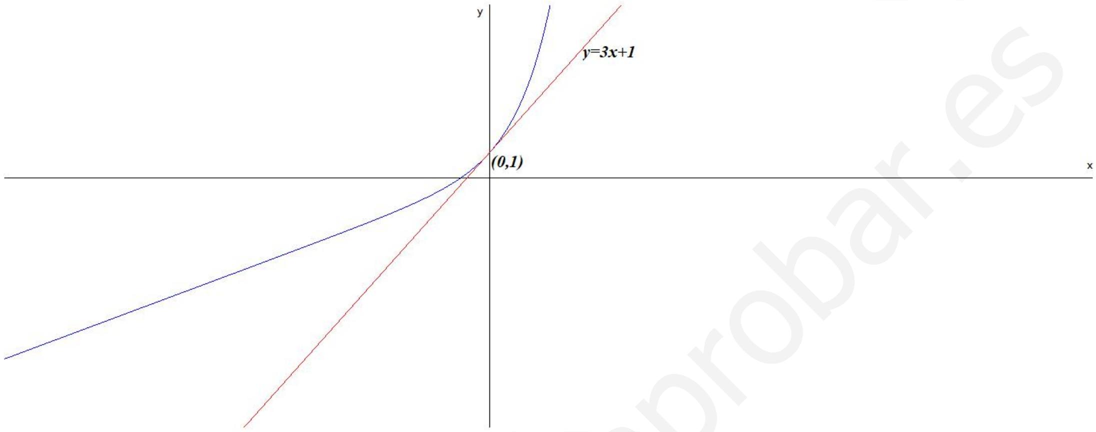
$$f(x) = e^{2x} + x$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

b) Calcule
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

a) $a = 0$, $f'(x) = 2e^{2x} + 1 \Longrightarrow m = f'(0) = 3$ y $b = f(0) = 1$ como $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = 3x \Longrightarrow y = 3x + 1$.



b) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} + x)\,dx = \left.\frac{e^{2x} + x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} \simeq 3,6945$

3.22. Año 2021

3.22.1. Modelo

Opción A

Problema 3.22.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Solución:
$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b, \quad y = 6x + 8$$

a) $\left\{\begin{array}{l} f'(-3) = 0 \Longrightarrow -6a + b = 0 \\ m = f'(0) = 6 \Longrightarrow b = 6 \\ f(0) = 6\cdot 0 + 8 = 8 \Longrightarrow c = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow$
$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Si $a=2$, $b=1$ y $c=1 \Longrightarrow f(x)=2x^2+x+1$:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2x^2+x+1}{x}\,dx = \int_1^e \left(2x+1+\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$x^2+x+\ln x\Big]_1^e = e^2+e-1 \simeq 9,107$$

Problema 3.22.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

Solución:

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}=\frac{x^3+4}{x^2}$$

a) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
En $x=0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty \quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = -\infty$$

- Oblicuas: $y=mx+n$:

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$$

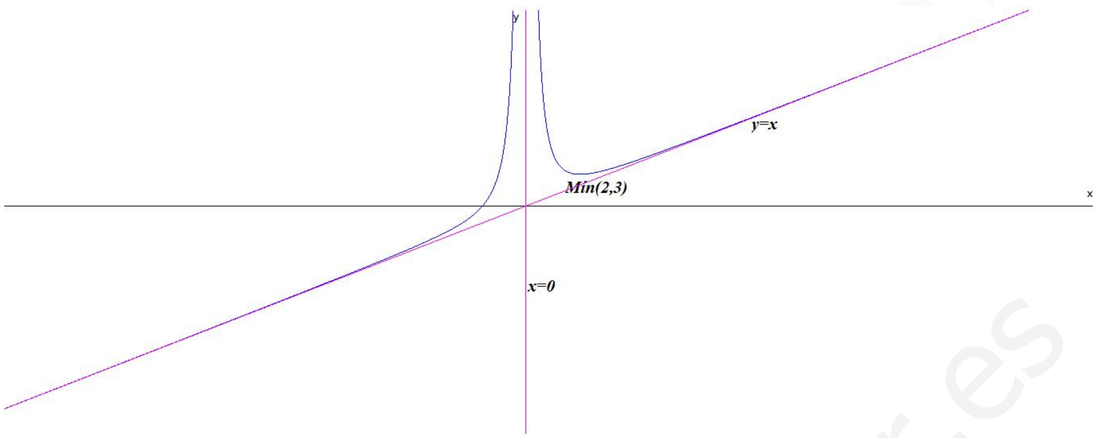
$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2}=0\Longrightarrow y=x$$

b) $f'(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3}=0\Longrightarrow x=2$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, y decreciente en el intervalo $(0,2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2,3)$.



Opción B

Problema 3.22.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.

b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \left(x^2 + ax - \dfrac{1}{9}\right) = -\dfrac{1}{9} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = -\dfrac{1}{9} \\ \\ f(0) = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \Longrightarrow$$

La función es continua en $x = 0$ pero no lo es en $x = 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$, que es el único punto del dominio en el que hay duda.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ -\dfrac{x^2+2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Tenemos que $f'(0^-) = a$ y $f'(0^+) = -\dfrac{1}{9} \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{9}$. Para este valor la función sería derivable en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{9} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Asíntotas:
En la rama $x \le 0$ no hay asíntotas, se trata de un polinomio.
En la rama $x > 0$

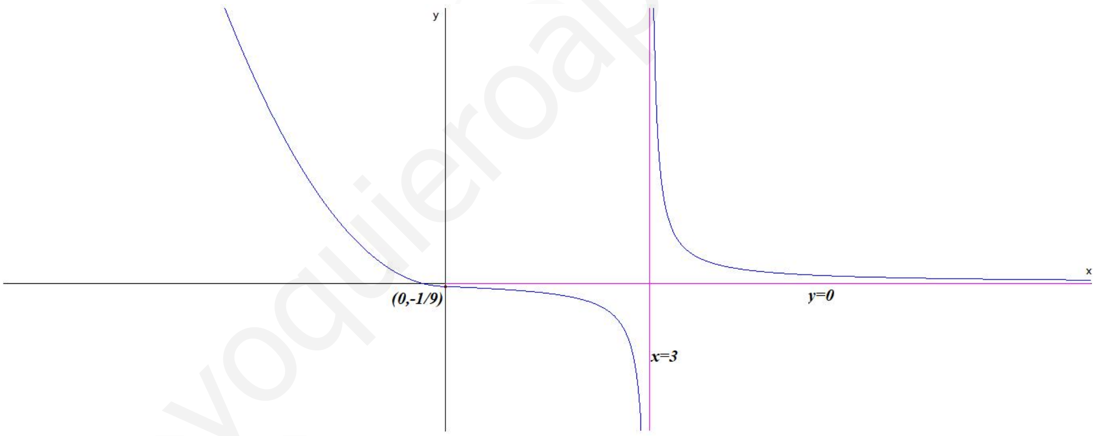
- Verticales:
En $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-9} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



3.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 3.22.4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3+4}{x^2-1} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: No hay $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3+4}{x^2-1} = -\infty$ y $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \infty$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

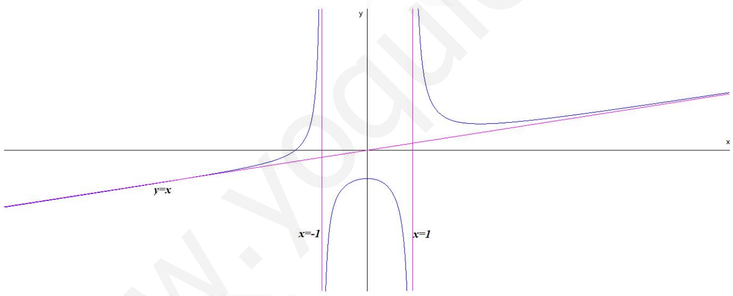
$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x \right) = 0$$

Luego

$$y = x$$

b) $f'(x) = \frac{x(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$ y $b = f(0) = -4$. Luego $y + 4 = 0(x - 0) \Longrightarrow y = -4$



Problema 3.22.5 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en los intervalos en los que están definidas. Hay que estudiar continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x^2 - ax) = 1 - a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

b) Para $a = 1$:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - x & \text{si} & x \leq 1 \\ \\ \ln x & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

Tenemos $x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1 \Longrightarrow$ la función no corta al eje de abscisas en el intervalo $[-1, 0]$. Luego:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{5}{6}\ u^2$$

Opción B

Problema 3.22.6 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_{1}^{2} e^{-x} f(x)\, dx$$

Solución:

a) $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 1$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-3, 1)$ y creciente en $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. Tiene un Máximo local en $(-3, 6e^{-3})$ y un Mínimo local en $(1, -2e)$

b)

$$\int_{1}^{2} e^{-x} f(x)\, dx = \int_{1}^{2} e^{-x}(x^2 - 3)e^x\, dx = \int_{1}^{2} (x^2 - 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{1}^{2} = -\frac{2}{3}$$

3.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 3.22.7 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty$$

- ☛ Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x(1-x)^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1$$

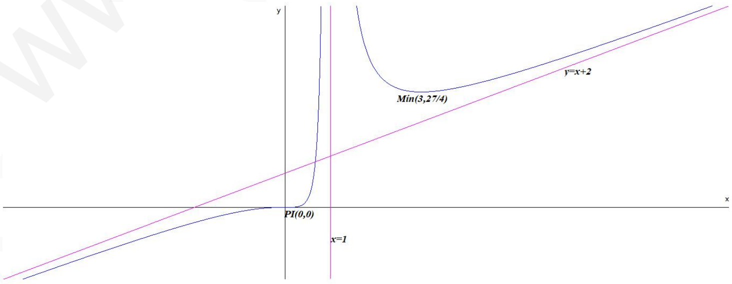
$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{(1-x)^2} - x\right) = 2$$

$$y = x + 2$$

b) $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(1, 3)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3, \frac{27}{4}\right)$.
En el punto $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.



Problema 3.22.8 *(2 puntos)* Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.

b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

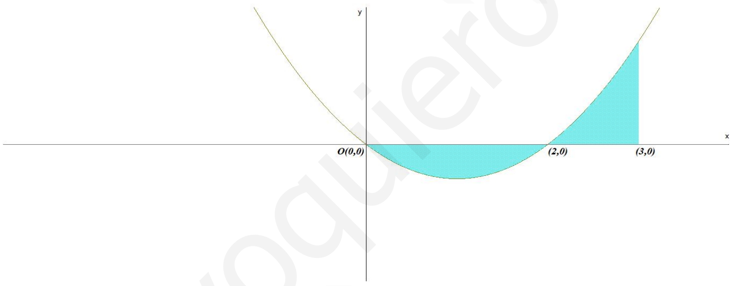
a) $F(x) = \int (x^2 + ax)\, dx = +C$
$F(0) = 0 + 0 + C = 3 \Longrightarrow C = 3$
$F(2) = \frac{8}{3} + 2a + C = 9 \Longrightarrow 2a = 9 - C - \frac{8}{3} = 9 - 3 - \frac{8}{3} \Longrightarrow a = \frac{5}{3}$
$f(x) = x^2 + \frac{5}{3}x$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{6} + 3$

b) Para $a = -2 \Longrightarrow f(x) = x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$. La gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$ en $x = 2$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 + 2x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 + 2x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ u^2$$



Opción B

Problema 3.22.9 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.

b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

Solución:

a) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 \Longrightarrow m = f'(1) = 2a - b + 2 = -4 \Longrightarrow 2a - b = -6$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a + b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

b) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f''(x) = 2a + \frac{2b}{x^2} \Longrightarrow f''(1) = 2(a + b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$$

Luego no hay solución única, los parámetros tienen que cumplir $a = -b$.

3.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 3.22.10 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - x - 1 & \text{si} & x \leq 3 \\ \frac{3a}{x} & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?

b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en $x = 3$:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - x - 1) = 5 \\ \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{3a}{x} = a \\ f(3) = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua si } a = 5$$

Cuando $a = 5$ las dos ramas son continuas y también lo es en $x = 3 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

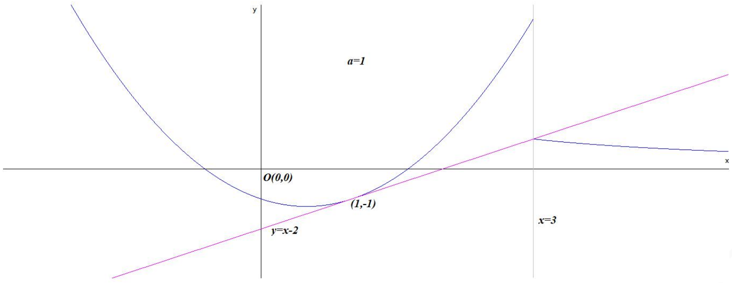
☛ **Derivabilidad en $x = 3$** para $a = 5$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 1 & \text{si} & x < 3 \\ -\frac{15}{x^2} & \text{si} & x > 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = -\frac{5}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$f \text{ no es derivable en } x = 3$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$ para $a = 5$.

b) Para $a = 1$ en $x = 1$ la función es $f(x) = x^2 - x - 1 \Longrightarrow b = f(1) = -1$ y $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es $y + 1 = x - 1 \Longrightarrow y = x - 2$



Opción B

Problema 3.22.11 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \infty$$

- Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = 1$$

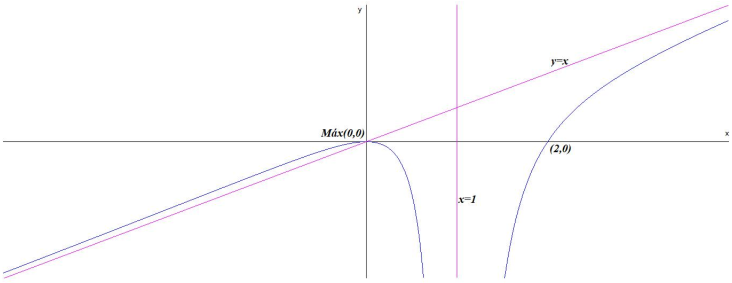
$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} - x\right) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x}{x^2 - 2x + 1}\right) = 0 \Longrightarrow y = x$$

b) $f'(x) = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.



Problema 3.22.12 *(2 puntos)* Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.

b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

Solución:

a) $f(x) = \int (3x^2 + 8x)\, dx = x^3 + 4x^2 + C$, como $f(1) = 11 \Longrightarrow f(1) = 1 + 4 + C = 11 \Longrightarrow C = 6$.
Luego $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

b) $f'(x) = 3x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\frac{8}{3}$

$$f''(x) = 6x + 8 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 8 > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ \\ f''\left(-\frac{8}{3}\right) = -8 < 0 \Longrightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ máximo} \end{cases}$$

Hay un mínimo relativo en $(0, 6)$ y un máximo relativo en $\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)$.

3.23. Año 2022

3.23.1. Modelo

Opción A

Problema 3.23.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule $\int_0^1 2xf(x)\, dx$

Solución:

a) $x = a = 0 \Longrightarrow b = f(0) = 1$
$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1$

b) $F(x)=\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int 2x(1+x^2)^{1/2}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=1+x^2\\ dt=2xdx\\ dx=\frac{dt}{2x}\end{array}\right]=\int 2xt^{1/2}\,\frac{dt}{2x}=\int t^{1/2}\,dt=$
$\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+C$
$\int_0^1 2xf(x)\,dx=F(1)-F(0)=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\simeq 1,219$

Opción B

Problema 3.23.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{10}{x^2+2x-3}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

Solución:

a) $x^2+2x-3=0\Longrightarrow x=1$ y $x=-3\Longrightarrow \text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  - En $x=-3$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow -3^-}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^+}\right]=+\infty\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -3^+}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^-}\right]=-\infty\end{array}\right.$$

  - En $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^-}\right]=-\infty\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{10}{0^+}\right]=+\infty\end{array}\right.$$

- ☛ Horizontales: $y=0$.

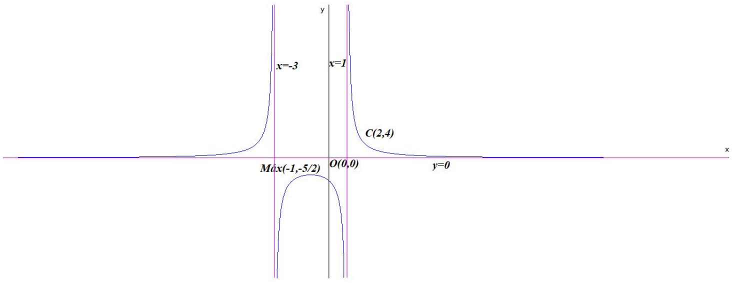
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{10}{x^2+2x-3}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=0$$

- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x)=-\dfrac{20(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}=0\Longrightarrow x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, -1)$, y decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, \infty)$, tiene un máximo relativo en el punto $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$.



Problema 3.23.3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas.
Estudiamos la continuidad en $x = 2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \left(ax^2 - 2x\right) = 4a - 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \ln(x-1) = 0 \\ \\ f(2) = 4a - 4 \end{cases} \Longrightarrow 4a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a = 1 \Longrightarrow f$ es continua en todo el dominio de la función $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) En esa rama $f(x) = x^2 - 2x$ que corta al eje de abscisas en $x = 0$. Luego el único punto de corte con el eje OX está en la frontera del intervalo $[-1, 0]$.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3} \simeq 1,3333\ u^2$$