Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

1.1.1. Modelo

Opción A

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y & = & a \\ x+ & & a^2z = & 2a+1 \\ x- & y+ & a(a-1)z = & 2a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real a.

b) Resuélvase dicho sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right); \quad |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única).

Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Primera y tercera fila son iguales, por lo que el Rango$(\overline{A}) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0$, y por esta última razón Rango$(A) = 2$. En conclusión, Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por el primer menor tenemos Rango$(A) = 2$ y por el segundo Rango$(\overline{A}) = 3$. Luego Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

b) Para $a = 3$ nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y & = & 3 \\ x+ & & 9z = & 7 \\ x- & y+ & 6z = & 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = -1/2 \\ z = 1/2 \end{array} \right.$$

1.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.1.2 *(3 puntos)* Siendo a un número real cualquiera, se define el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y- & az = 1 \\ - & y+ & z = 0 \\ ax+ & & z = a \end{array} \right.$$

a) Discútase dicho sistema en función del valor de a

b) Encuéntrese todas las soluciones para $a = 1$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{array} \right); \quad |A| = -a^2 + 2a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única).

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Primera y cuarta columna son iguales, por lo que el Rango$(\overline{A}) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, y por esta última razón Rango$(A) = 2$. En conclusión, Rango$(\overline{A}) =$Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Para $a = 1$, despreciamos la última ecuación y nos queda

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y- & z = 1 \\ - & y+ & z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right.$$

1.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros.

Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución:
Llamamos x a la cantidad de euros, y a la cantidad de dólares y z a la cantidad de libras esterlinas. Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} x+1,1y+1,5z=264000\\ x=2,2y\\ 1,5z=x/10\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 10x+ & 11y+ & 15z= & 2640000\\ 10x- & 22y & = & 0\\ x- & & 15z= & 0\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=165000 \text{ euros}\\ y=75000 \text{ dolares}\\ z=11000 \text{ libras}\end{array}\right.$$

Opción B

1.2. Año 2001

1.2.1. Modelo

Opción A

Problema 1.2.1 *(3 puntos)* Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 3 & 2\end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{rr} 2 & -1\\ -3 & 2\end{array}\right)$

a) Compruébese que B es la inversa de A.

b) Calcúlese la matriz $(A-2I)^2$.

c) Calcúlese la matriz X tal que $AX=B$.

Solución:

a)
$$A^{-1}=\frac{(Adjt(A))^T}{|A|}=\left(\begin{array}{rr} 2 & -1\\ -3 & 2\end{array}\right)$$

b)
$$(A-2I)^2=\left[\left(\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 3 & 2\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc} 2 & 0\\ 0 & 2\end{array}\right)\right]^2=\left[\left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 3 & 0\end{array}\right)\right]^2=\left(\begin{array}{cc} 3 & 0\\ 0 & 3\end{array}\right)=3I$$

c)
$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B=B^2=\left(\begin{array}{rr} 7 & -4\\ -12 & 7\end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.2.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal:

$$mx + my = 6$$
$$x + (m-1)y = 3$$

a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real m.

b) Resuélvase dicho sistema para $m = 2$:

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & m & 6 \\ 1 & m-1 & 3 \end{array}\right), \quad |A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right), \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$$
Rango$(A) = 1$ y Rango$(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)
- Si $m = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
La segunda fila es igual a la primera multiplicada por dos, luego Rango$(A) = 1 =$Rango$(\overline{A}) <$ n^{o} de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Para $m = 2$ tenemos la ecuación $x + y = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$

1.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.2.3 *(3 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & ay+ & z = & a \\ x+ & y+ & az = & a^2 \end{array} \right.$$

a) Discútase el sistema según los valores de a

b) Resuélvase el sistema para $a = -1$

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & a\\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right);\quad |A|=a^3-3a+2=0\Longrightarrow a=1,\quad a=-2$$

Si $a\neq 1$ y $a\neq -2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución Única).

Si $a=1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Las tres filas son iguales, por lo que el Rango$(\overline{A})=1=$Rango$(A)<$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.(La solución depende de dos parámetros)

Si $a=-2$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=0$ pero $\left|\begin{array}{cc} -2 & 1\\ 1 & -2 \end{array}\right|=3\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=2$.

Por otro lado el menor
$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right|=9\neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

b) Para $a=-1$, como hemos visto, es compatible determinado
$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & y+ & z= & 1\\ x- & y+ & z= & -1\\ x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=1\\ z=0 \end{array}\right.$$

1.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.2.4 *(3 puntos)* Sean las matrices
$$A=\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\quad B=\left(\begin{array}{rrr} 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

a) Determínese si A y B son invertibles y, en su caso, cacúlese la matriz inversa.

b) Resuélvase la ecuación matricial $XA-B=2I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

c) Calcúlese A^{86}

Solución:

a) $|A| = 1 \Longrightarrow$ la matriz es invertible.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|B| = 0 \Longrightarrow$ la matriz no es invertible.

b) $XA - B = 2I \Longrightarrow X = (2I + B)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^3 = A^2A = I, \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{86} = A^2 = A^{-1}$$

$86 = 21 \times 4 + 2$ donde 2 es el resto de dividir 86 entre 4.

1.3. Año 2002

1.3.1. Modelo

Opción A

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & 4y- & az = & -2 \\ & y- & z = & 0 \\ ax+ & & 2z = & 2 \end{array} \right.$$

a) Discutir el sistema en función de los valores de a.

b) Resolver el sistema para el valor $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{array} \right), \quad |A| = (a+2)^2 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = 3 = nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Podemos observar que la cuarta columna es igual a la primera multiplicada por -1, por lo que Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones.

b) Cuando $a = 2$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{16} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{16} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{1}{2}$$

1.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = (2, 1, -1), \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular las matrices $M = AB$ y $N = BA$.

b) Calcular P^{-1}, siendo $P = (N - I)$, donde I representa la matriz identidad.

c) Resolver el sistema $PX = C$.

Solución:

a)

$$M = AB = (2, 1, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$N = BA = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

.

b)

$$P=(N-I)=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3\\ -4 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3\\ -4 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2\\ -2 & -2 & 1\\ 1 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}$$

c)

$$PX=C\Longrightarrow X=P^{-1}C=\begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2\\ -2 & -2 & 1\\ 1 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4\\ -2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\\ -4\\ 3\end{pmatrix}$$

.

1.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.3.3 *(3 puntos)* Encontrar todas las matrices X tal que $AX=XA$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b\\ 4a+2c & 4b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+4b & 2b\\ c+4d & 2d\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} a=a+4b\\ b=2b\\ 4a+2c=c+4d\\ 4b+2d=2d\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} a=a\\ b=0\\ c=4d-4a\\ d=d\end{array}\right.\Longrightarrow X=\begin{pmatrix} a & 0\\ 4d-4a & d\end{pmatrix}$$

1.4. Año 2003

1.4.1. Ordinaria

Opción A

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Estudiar y resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & +z= & 0\\ -x- & y & = & 1\\ & -y & -z= & -1\end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right),\quad |A|=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$nº de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & 2y & +z = & 0 \\ -x- & y & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y & = & -z \\ -x- & y & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{array} \right.$$

1.4.2. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

coincide con su transpuesta.
Solución:

$$A^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$$

Si $A^T = A^{-1} \Longrightarrow A \cdot A^T = I \Longrightarrow$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} a^2+16 & 0 \\ 0 & a^2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{a^2+16}{25} = 1 \Longrightarrow a = \pm 3$$

Opción B

1.5. Año 2004

1.5.1. Modelo

Opción A

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro m:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & z = & 2 \\ x+ & y+ & 2z = & 5 \\ -x+ & & (m+2)z = & 3 \end{array} \right.$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de m.

b) Resolver el sistema para $m = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{array}\right), \quad |A|=m-1=0 \Longrightarrow m=1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ $= 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Podemos observar que la tercera fila es la resta de la segunda menos la primera, por lo que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ nº de incógnitas, es decir, el sistema es compatible indeterminado, admite infinitas soluciones.

b) Cuando $m=3$, resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right|}{2}=-3$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1\\ 1 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right|}{2}=8$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 5\\ -1 & 0 & 3 \end{array}\right|}{2}=0$$

1.5.2. Ordinaria

Opción B

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices

$$X=\left(\begin{array}{cc} a & 0\\ b & c \end{array}\right); \quad a,b,c \in R$$

que satisfacen la ecuación matricial

$$X^2 = 2X$$

Solución:

$$X^2 = X\cdot X = \left(\begin{array}{cc} a & 0\\ b & c \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} a & 0\\ b & c \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} a^2 & 0\\ ab+cb & c^2 \end{array}\right)$$

$$2X=\left(\begin{array}{cc} 2a & 0\\ 2b & 2c \end{array}\right)$$

Igualando las expresiones

$$\left(\begin{array}{cc} a^2 & 0 \\ ab+cb & c^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 2a \\ ab+cb = 2b \\ c^2 = 2c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0, \quad a=2 \\ ab+cb = 2b \\ c=0, \quad c=2 \end{array}\right.$$

Tendremos las siguientes posibles soluciones:

- ☛ Si $a=0,\ c=0 \Longrightarrow 2b=0 \Longrightarrow b=0$, luego $X = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$
- ☛ Si $a=2,\ c=0 \Longrightarrow b=b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ b & 0 \end{array}\right)$
- ☛ Si $a=0,\ c=2 \Longrightarrow b=b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ b & 2 \end{array}\right)$
- ☛ Si $a=2,\ c=2 \Longrightarrow 2b+2b=2b \Longrightarrow b=0$, luego $X = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$

1.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx+ & y- & 3z= & 5 \\ -x+ & y+ & z= & -4 \\ x+ & my- & mz= & 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del parámetro m.

b) Resuélvase el sistema para $m=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2m^2+2m+4=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$$

- ☛ Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- ☛ Si $m=-1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos $|A|=0$ y que $\left|\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Y tenemos que $\left|\begin{array}{rrr} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$. Luego en este caso Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

☛ Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la suma de las dos primeras y por tanto Rango$(\overline{A}) = 2$. Como $|A| = 0$ y que $\left| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego en este caso Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A})$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Cuando $m = 2$ el sistema es Compatible Indeterminado, luego tendrá infinitas soluciones. Para resolverlo eliminamos la tercera ecuación, que es combinación lineal de las dos primeras.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & 3z = & 5 \\ -x+ & y+ & z = & -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y = & 5+ & 3z \\ -x+ & y = & -4- & z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \frac{4}{3}t \\ y = -1 + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{array} \right.$$

1.6. Año 2005

1.6.1. Modelo

Opción A

Problema 1.6.1 *(3 puntos)* Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si $AA^T = I$

a) Estudiar si la matriz A es ortogonal

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

b) Siendo A la matriz del apartado anterior, resolver el sistema

$$A \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right)$$

Nota: La notación A^T significa matriz traspuesta de A.
Solución:

a)

$$AA^T = \left(\begin{array}{rrr} 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{rrr} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Luego es ortogonal $A^{-1} = A^T$

b)

$$A^{-1}A \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = A^{-1} \left(\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{r} 7/5 \\ -1 \\ 1/5 \end{array} \right)$$

1.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.6.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y+ & z=0 \\ x- & ky- & 3z=0 \\ 5x+ & 2y- & z=0 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discutir el sistema para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right), \quad |A|=7k+56=0 \Longrightarrow k=-8$$

Si $k\neq -8 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado.
Si $k=8$:

$$A=\left|\begin{array}{rr} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{array}\right|=-13\neq 0$$

Luego el Rango$(A)=2 \Longrightarrow$ el sistema sería compatible indeterminado.

b) Cuando $k\neq 0$ el sistema era compatible determinado, y como se trata de un sistema homogéneo, la única solución sería $x=y=z=0$, es decir, la solución trivial.
Cuando $k=-8$ el sistema será compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, tendrá infinitas soluciones que dependerán de como varíe un parámetro.

Por el menor que escogimos en el apartado anterior para el estudio del rango, en este caso, podemos despreciar la tercera ecuación con lo que nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y+ & z=0 \\ x+ & 8y- & 3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y= & -z \\ x+ & 8y= & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{19}t \\ \\ y=\dfrac{7}{19}t \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

1.6.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.6.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones que depende del parámetro real p

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 0 \\ -x+ & 2y+ & pz= & -3 \\ x- & 2y- & z= & p \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema según los distintos valores de p.

b) Resolver el sistema para $p = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & p & -3 \\ 1 & -2 & -1 & p \end{array}\right)$$

$$|A| = 3p - 3 = 0 \Longrightarrow p = 1$$

Si $p \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

Si $p = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 2 \Longrightarrow \text{ Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A)$$

Luego en este caso el sistema es incompatible.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 0 \\ -x+ & 2y+ & 2z = & -3 \\ x- & 2y- & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 0 \\ & 3y+ & 3z = & -3 \\ & -3y- & 2z = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_2 \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 0 \\ & 3y+ & 3z = & -3 \\ & & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

1.7. Año 2006

1.7.1. Modelo

Opción A

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Sea el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & (a+1)z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 20a \\ x+ & y+ & 2az = & 9 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

c) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20a \\ 1 & 1 & 2a & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -5a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = 1$ tenemos que el Rango$(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, y observamos que en la matriz
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array} \right)$$
la primera y la tercera fila son iguales, luego Rango$(\overline{A}) = 2$.

En este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2$ <nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible indeterminado.

b) Hay que resolver el sistema para $a = 1$:
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 20 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{38}{5} - \lambda \\ \\ y = \dfrac{7}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Hay que resolver el sistema para $a = 2$:
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 3z = & 9 \\ 3x- & 2y+ & z = & 40 \\ x+ & y+ & 4z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{58}{5} \\ \\ y = -\dfrac{13}{5} \\ \\ z = 0 \end{array} \right.$$

1.7.2. Ordinaria

Opción B

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Encontrar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad
$$XA = AX$$
en cada uno de los casos siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} b=3b\Longrightarrow b=0 \\ 3c=c\Longrightarrow c=0 \\ a=a\Longrightarrow a \text{ cualquiera} \\ 3d=3d\Longrightarrow d \text{ cualquiera} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} c=3b \\ d=a \\ 3a=3d\Longrightarrow a=d \\ 3b=c \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$

1.7.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.7.3 (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z=2 \\ -2x+ & 3y+ & z=1 \\ -x+ & ay+ & 3z=3 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=20-5a=0\Longrightarrow a=4$$

Si $a\neq 4\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Si $a=4\Longrightarrow |A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A)=2.

Como las dos últimas columnas de $\overline{A}$ son iguales, el Rango$(\overline{A})=2$ =Rango$(A)<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = 2 \\ -2x+ & 3y+ & z = 1 \\ -x+ & 2y+ & 3z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

1.8. Año 2007

1.8.1. Modelo

Opción A

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

Opción B

El examen modelo coincide con el de Septiembre del 2006

1.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x- & 2y+ & z = & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 2y+ & az = & 8 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 8a + 14 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{7}{4}$$

Si $a \neq -\dfrac{7}{4} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a = -\dfrac{7}{4}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array} \right)$$

tenemos que el Rango$(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, pero

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 46 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$, luego el sistema será incompatible.

b) Si $a=4$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & 0\\ 3x+ & 2y- & 2z= & 3\\ 2x+ & 2y+ & 4z= & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=1\\ z=1 \end{array}\right.$$

1.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay+ & z= & 1\\ & 2y+ & az= & 2\\ x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=3$ y $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1\\ 0 & 2 & a & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=a^2-a=0 \Longrightarrow a=0,\ \ a=1$$

Si $a\neq 0$ y $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3=n^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $a=0$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $a=1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2\neq 0 \Longrightarrow$ el Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=2<$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a=3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & z= & 1\\ & 2y+ & 3z= & 2\\ x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1/3\\ y=0\\ z=2/3 \end{array}\right.$$

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.9. Año 2008

1.9.1. Modelo

Opción A

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de n para los que la matriz A tiene inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$ para $n = 3$

Solución:

a)

$$|A| = n - 2 \Longrightarrow n = 2$$

Si $n \neq 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $n = 2 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

Solución:

x: hectáreas de barbecho

y: hectáreas de trigo

z: hectáreas de cebada

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x=y+z-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right.$$

1.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes?

Solución:

x: nº de casas tipo A

y: nº de casas tipo B

z: nº de casas tipo C

	albañilería	fontanería	electricidad
A	10	2	2
B	15	4	3
C	20	6	5
totales	270	68	58

$$\left\{\begin{array}{c} 10x+15y+20z=270 \\ 2x+4y+6z=68 \\ 2x+3y+5z=58 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=6 \\ z=4 \end{array}\right.$$

1.10. Año 2009

1.10.1. Modelo

Opción A

Problema 1.10.1 *(3 puntos)* Se considera la matriz dependiente del parámetro real k:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) Determínese los valores de k para los cuales A tiene inversa.

b) Para $k = 2$, calcúlese (si existe) A^{-1}.

c) Para $k = 1$, calcúlese $(A - 2A^T)^2$.

Nota: La notificación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

Solución:

a)

$$|A| = k^2 - k \Longrightarrow k = 1, \;\; k = 0$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $k = 0$ o $k = 1 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) Si $k = 2$ la inversa existe:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$:

$$(A - 2A^T)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.10.2 *(3 puntos)* Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando para ello un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta 50 euros y el de un edredón 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel?

Solución:

Llamamos x al nº de almohadas, y al nº de mantas y z al nº de edredones.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 200 \\ 16x+ & 50y+ & 80z = & 7500 \\ x- & y- & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 70 \\ z = 30 \end{array} \right.$$

1.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & 4\\ 2x- & y+ & 2z = & 5\\ -x+ & 3y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & k & 4\\ 2 & -1 & 2 & 5\\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5k - 5 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 2 & 5\\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Compatible Indeterminado.

b) Si $k = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4\\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda\\ y = 1\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & = & 4\\ 2x- & y+ & 2z = & 5\\ -x+ & 3y- & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3\\ y = 1\\ z = 0 \end{array}\right.$$

1.10.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 3\\ x+ & ky+ & z = & 3\\ kx- & & 3z = & 6 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & k & 1 & 3\\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2 - 2k + 3 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ \ k = -3$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $k = 1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Dos filas son iguales y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Si $k = -3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 1 & 3\\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right),\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 3\\ -3 & 0 & 6 \end{array}\right| = -60 \neq 0$$

en este caso Rango$(A) = 2$ y como hay un menor de orden 3 distinto de cero el Rango$\overline{A} = 3$ y el sistema, en este caso, es incompatible.

b) $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 3\\ x- & & 3z = & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 3\lambda\\ y = -3 - 4\lambda\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) $k = 3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 3\\ x+ & 3y+ & z = & 3\\ 3x- & & 3z = & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 5/2\\ y = 0\\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

1.11. Año 2010

1.11.1. Modelo

Opción A

Problema 1.11.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & ky+ & z = & 1\\ & 2y+ & kz = & 2\\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = k^2 - k = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = 1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.
Si $k = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.
Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ = $2 <$ n$^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $k = 3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & 3z = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array}\right.$$

1.11.2. Ordinaria

Opción B

Problema 1.11.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} kx- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & kz = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2 + k + 2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \ \ k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.
Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que : $|C_1C_2C_3| = |C_1C_3C_4| = |C_1C_2C_4| = |C_2C_3C_4| = 0$

$\left|\begin{array}{rr} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} + \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

1.11.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente de un parámetro real a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \\ x- & 4y+ & az = & 7a \end{array} \right.$$

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & a & 7a \end{array} \right), \quad |A| = 15 - 5a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{array} \right), \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

Claramente se observa que $F_3 = F_2 - F_1$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + (1/5)\lambda \\ y = -4 + (4/5)\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.12. Año 2011

1.12.1. Modelo

Opción A

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

Solución:

Sea x : precio de la mochila, y : precio del bolígrafo y z : precio del libro.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=48 \\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{7}z=8 \\ x=y+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=48 \\ 7x+14y+6z=336 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=24 \\ y=3 \\ z=21 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a=2$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $a=2$, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX=B$.

Solución:

a) $|A|=5-a^2=0 \Longrightarrow a=\pm\sqrt{5}$:

Si $a=\pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow A$ no tiene inversa.

Si $a\neq\pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow A$ si tiene inversa.

b) Para $a=2$:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

c) $AX=B \Longrightarrow X=A^{-1}B$:

$$X=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z= & a \\ & ay+ & z= & 1 \\ ax+ & y+ & az= & a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $a = 3$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = a^2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas, luego en estos casos el sistema es compatible determinado.

Si a=1:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos filas iguales, claramente el sistema es compatible indeterminado.

Si a=0:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \ \text{y} \ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0$$

El Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ por lo que el sistema es incompatible

b) Cuando $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Cuando $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & y+ & z = & 3 \\ & 3y+ & z = & 1 \\ 3x+ & y+ & 3z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 8/9 \\ y = 1/3 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.12.4 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{array} \right); \ B = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{array} \right)$$

a) Calcúlense los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.

b) Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $k = 0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a)
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \;\; k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Si existe A^{-1}.

b) Si $k = 0$:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.12.3. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.12.5 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}; \;\; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \;\; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

b) Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = O$.

c) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal:
$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

b) $A^2 + cA + dI = O$.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ c+1 & c+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

c)
$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$$

1.12.4. Reserva

Opción A

Problema 1.12.6 *(3 puntos).* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y+5z=5 \\ x+y+3z=1 \\ 2x+ay+(a^2-2)z=3 \end{array}\right.$$

a) Escríbase el sistema en forma matricial.

b) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

c) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2-2 \end{vmatrix}=a^2-7a+6=0 \Longrightarrow a=1, \quad a=6$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 6 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD. Sistema compatible determinado.
- Si $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad F_3=F_1-2F_2 \Longrightarrow \text{SCI}$$

  El sistema es compatible indeterminado.
- Si $a=6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 34 & 3 \end{array}\right) \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0 \Longrightarrow \text{SI}$$

  El sistema es incompatible.

c)

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y+5z=5 \\ x+y+3z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+4\lambda \\ y=-1-7\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.12.7 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A^{-1}A^T$.- **Nota.**- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

b) Resuélvase la ecuación matricial: $\dfrac{1}{4}A^2 - AX = B$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.13. Año 2012

1.13.1. Modelo

Opción A

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para k = 4.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array}\right);\ |A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right);\ F_1 = F_2 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad y + 2z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{l} x + 4y + 4z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 4y + 2z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Se considera la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} a & 1 \\ 3 & a \end{array}\right)$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Para $a = 2$, calcúlese la matriz $B = (A^{-1}A^T)^2$.

c) Para $a = 2$, calcúlese la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$AX - A^2 = A^T$$

Nota.- A^T representa a la matriz traspuesta de A.

Solución:

a)
$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1\\ 3 & a\end{vmatrix}=a^2-3=0\Longrightarrow a=\pm\sqrt{3}$$

Si $a=\pm\sqrt{3}\Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $a\neq\pm\sqrt{3}\Longrightarrow \exists\, A^{-1}$.

b) Si $a=2$:
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$
$$B=\left[\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} -7 & -8\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

c) Con $a=2$:
$$AX-A^2=A^T\Longrightarrow X=A^{-1}(A^T+A^2)$$
$$X=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2\right]=\begin{pmatrix} 5 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

1.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :
$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & ay- & 7z= & 4a-1\\ x+ & (1+a)y- & (a+6)z= & 3a+1\\ & ay- & 6z= & 3a-2\end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema en el caso a = -3.

Solución:

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1\\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1\\ 0 & a & -6 & 3a-2\end{array}\right);\ |A|=a^2-a-6=0\Longrightarrow a=3,\ a=-2$$

- ☛ Si $a\neq 3$ y $a\neq -2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- ☛ Si $a=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11\\ 1 & 4 & -9 & 10\\ 0 & 3 & -6 & 7\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

☛ Si $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right); \ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - 4z = -5 \\ 2y - 6z = -8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) $a = -3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 7z = -13 \\ x - 2y - 3z = -8 \\ -3y - 6z = -11 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4/3 \\ y = 7/3 \\ z = 2/3 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ \dfrac{x+y}{13} = \dfrac{z}{3} \\ x + 6500 = y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ 3x + 3y - 13z = 0 \\ x - y = -6500 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 26000 \\ y = 32500 \\ z = 13500 \end{array} \right.$$

1.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.13.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Para $k = 4$, calcúlese el determinante de la matriz $3A^2$.

b) Para $k = 2$, calcúlese (si existe) la matriz inversa A^{-1}.

c) Discútase la existencia de solución del sistema lineal $AX = B$ según los diferentes valores del parámetro k.

Solución:

$$|A| = 2k - 6$$

a) Si $k = 4$: $|3A^2| = 3^3 \cdot |A|^2 = 108$

b) Si $k = 2$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 4 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k & 1 \end{array} \right), \ |A| = 2k - 6 = 0 \Longrightarrow k = 3$$

- ☛ Si $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- ☛ Si $k = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right), \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema en Incompa-tible.

1.13.4. Extraordinaria

Opción B

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 2 \\ x+ & ky+ & 2z = & 5 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

c) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = -k^2 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \ \text{y} \ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b) $k = 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2z = 5 \\ y + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

c) $k = 2$

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.14. Año 2013

1.14.1. Modelo

Opción A

Problema 1.14.1 *(2 puntos)* Discútase el sistema siguiente en función del parámetro $a \in R$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y & = & a \\ x+ & & az = & 0 \\ 2x- & y+ & a^2z = & 1 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & -1 & a^2 & 1 \end{array}\right); \ |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

- ☛ Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

- ☛ Si $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- ☛ Si $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ F_3 = F_1 + F_2 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

Opción B

Problema 1.14.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Obténgase A^{2007}.

b) Hállese la matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow A^n \left\{ \begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ es impar} \\ I & \text{si} & n \text{ es par} \end{array} \right. \Longrightarrow A^{2007} = A$$

b) $A \cdot B = C \Longrightarrow B = A^{-1}C$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.14.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax- & 2y & & = & 2 \\ 3x- & y- & z & = & -1 \\ x+ & 3y+ & z & = & 1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2a + 8 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

a) Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $a = -4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

c) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax- & 2y & = & 2 \\ 3x- & y- & z = & -1 \\ x+ & 3y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = -4/5 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

1.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = -2 \\ x + ay = -2a - 1 \\ 4x + y + 5z = -1 \end{array}\right.$$

a) Resuélvase en el caso $a = 1$.

b) Discútase en función del parámetro $a \in R$.

Solución:

a) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z = -2 \\ x + y = -3 \\ 4x + y + 5z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & a & 0 & -2a - 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right); \quad |A| = -7a - 7 = 0 \Longrightarrow a = -1$$

- Si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $|C_1, C_2, C_3| = |C_1, C_2, C_4| = |C_1, C_3, C_4| = |C_2, C_3, C_4| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Como $\text{Rango}(A) = 2\text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Opción B

Problema 1.14.6 *(2 puntos)* Encuéntrese la matriz X que verifica

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{array}\right) \cdot X = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right) \cdot X + \left(\begin{array}{cc} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{array}\right)$$

Solución:

$$AX = BX + C \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}C$$

$$(A - B)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow X = \left(\begin{array}{cc} 1/5 & 1/5 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 4/5 & 1/5 \\ 11 & 3 \end{array}\right)$$

1.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.14.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese la matriz inversa de A

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B - I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B - I \Longrightarrow X = A^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro k :

$$\begin{cases} kx+ & y & & = & 0 \\ x+ & ky- & 2z & = & 1 \\ kx- & 3y+ & kz & = & 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & -3 & k & 0 \end{array} \right); \ |A| = k(k^2 - 9) = 0 \Longrightarrow k = 0; \ k = \pm 3$$

a) Si $k \neq 0$ y $k \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right); \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -3F_1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y se trata de un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

c) Si $k = 3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

d) Si $k = -3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

e) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & & = 0 \\ x+ & y- & 2z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/8 \\ y = -1/8 \\ z = -1/2 \end{array}\right.$$

1.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.9 *(2 puntos)* Hemos ido tres días seguidos al bar de la Universidad. El primer día tomamos 3 cafés, 2 refrescos de cola y 3 batidos de cacao, el precio fue de 7 euros. El segundo día tomamos 1 café, 2 refrescos de cola y 2 batidos de cacao, el precio total fue de 5 euros. Por último, el tercer día tomamos 2 cafés y un batido de cacao, el precio fue de 2 euros. Justifíquese razonadamente si con estos datos podemos determinar o no el precio de un café, de un refresco de cola y de un batido de cacao, suponiendo que estos precios no han variado en los tres días.

Solución:
Llamamos x al precio de un café, y al de un refresco de cola y z al del batido.

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right); \text{pero } F_3 = F_1 - F_2$$

Luego en sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - 1/2\lambda \\ y = 2 - 3/4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.14.10 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} 2x-2ay+z=1\\ x+(2+a)y+z=0\\ 3x+a^2y+2z=a \end{array}\right.$$

a) Discútase, en función del parámetro real a.

b) Resuélvase el sistema para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2a & 1 & 1\\ 1 & 2+a & 1 & 0\\ 3 & a^2 & 2 & a \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=-a^2-a+2=0\Longrightarrow a=-2,\ \ a=1$$

Si $a\neq -2$ y $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+z=1\\ x+2y+z=0\\ 3x+2z=0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=1/2\\ z=-3 \end{array}\right.$$

Problema 1.14.11 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)$

a) Calcúlese A^2, A^3, A^{20}.

b) Hállese la matriz B tal que $A\cdot B=\left(\begin{array}{cc} 3 & 2\\ 4 & 2 \end{array}\right)$

Solución:

a) $A^2=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 0 & 1 \end{array}\right)$

$A^3=A^2\cdot A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 0 & 1 \end{array}\right)$

$A^n=\left(\begin{array}{cc} 1 & n\\ 0 & 1 \end{array}\right)$ y $A^{30}=\left(\begin{array}{cc} 1 & 30\\ 0 & 1 \end{array}\right)$

b) $B=A^{-1}\left(\begin{array}{cc} 3 & 2\\ 4 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 3 & 2\\ 4 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -1 & 0\\ 4 & 2 \end{array}\right)$

1.15. Año 2014

1.15.1. Modelo

Opción A

Problema 1.15.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Hállense los valores de a y b para los que se cumple $A + B + AB = C$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$, determínese la matriz X que verifica $BX - A = I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -1,\ \ b = 1$$

b) Si $a = 1$ y $b = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BX - A = I \Longrightarrow X = B^{-1}(I + A)$

$$I + A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 6y + z = 0 \\ -x + ay + 4z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array}\right);\ \ |A| = a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

- ☛ Si $a\neq -3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 6 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 4 & 1\end{array}\right);\ |A|=0,\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 2 & 1\end{array}\right|=-1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A_2|=0,\ \ |A_3|=8\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como $\text{Rango}(A)\neq\text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+3y+z=1\\ 2x+6y+z=0\\ -x+4z=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=-8/3\\ z=2\end{array}\right.$$

1.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{rr} 2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{array}\right)$.

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$, donde A^t denota a la traspuesta de la matriz A.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A\cdot\left(\begin{array}{c} x\\ y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{r} 0\\ -1\\ 5\end{array}\right)$.

Solución:

a)

$$A^tB=\left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rr} 3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 5 & 0\\ 5 & 1\end{array}\right)$$

$$(A^tB)^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1/5 & 0\\ -1 & 1\end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{rr} 2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} x\\ y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{r} 0\\ -1\\ 5\end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y=0\\ -x=-1\\ x-2y=5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-2\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.15.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+az=2\\ 3x+4y+2z=a\\ 2x+3y-z=1\end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- ☛ Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_2 - F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Como $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

1.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Determínese la matriz X tal que $AX = A^{-1}$

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $AX = A^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+2y+z=2\\ 2x+4y=1\\ x+2y+3z=5 \end{array}\right.$$

a) Discútase para los diferentes valores de $a \in R$.

b) Resuélvase para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=12a-12=0 \Longrightarrow a=1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+2y+z=2\\ 2x+4y=1\\ x+2y+3z=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=1/4\\ z=3/2 \end{array}\right.$$

1.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.15.7 *(2 puntos)* Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & \lambda y+ & z= & -\lambda\\ 4x- & 2\lambda y+ & 2z= & \lambda-3 \end{array}\right.$$

a) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b) Resuélvase el sistema para $\lambda=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda\\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda-3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A_1|=\left|\begin{array}{cc} 2 & -\lambda\\ 4 & -2\lambda \end{array}\right|=0;\ |A_2|=\left|\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 4 & 2 \end{array}\right|=0;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1; \ |A_4| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda \\ -2\lambda & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 3\lambda(1 - \lambda) \Longrightarrow \lambda = 0, \ \lambda = 1;$$

$$|A_6| = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 3 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 1 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ 2x - y + z = -1 \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 + 2\mu + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.15.8 *(2 puntos)* Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $(A \cdot A^T)^{200}$.

b) Calcúlese $(A \cdot A^T - 3I)^{-1}$.

Nota: A^T denota a la traspuesta de la matriz A. I es la matriz identidad de orden 3.
Solución:

a)

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^T$$

Luego

$$(A \cdot A^T)^{200} = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot A^T - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

1.15.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese B^{31}.

b) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B$.

Solución:

a)

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = B \Longrightarrow B^{31} = B$$

b) $\left|A^{-1} \cdot B\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} & \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+2\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|A^{-1} \cdot B\right| = 0$$

Opción B

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - ay = 4 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -a & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -a - 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

1.16. Año 2015

1.16.1. Modelo

Opción A

Problema 1.16.1 *(2 puntos)* Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese $A^T \cdot A$.

Nota: A^T denota la traspuesta de la matriz A.

Solución:

a)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.16.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + ay + az = 1 \\ x + 4ay + z = 2a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array} \right); \quad |A| = -4a^2 + 6a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1/2, \quad a = 1$$

- ☛ Si $a \neq 1/2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- ☛ Si $a = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad F_1 = F_3 \Longrightarrow$$

el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x - 4y + z = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/4 \\ y = 1/2 \\ z = -3/4 \end{array}\right.$$

1.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \ |A| = -2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

☛ Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \ |A| = 0, \ \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.4 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

Solución:

a) $|A| = 0 \Longrightarrow 8 - 4k = 0 \Longrightarrow k = 2$.
Si $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $k = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; |A| = 0, \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

1.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores de $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^2 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \;\; a = 2$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\; F_1 = F_2 \;\right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Se consideran las matrices dependientes del parámetro real a

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínense los valores de a para los que la matriz $A \cdot B$ admite inversa.

b) Para $a = 0$, resuélvase la ecuación matricial $(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ 2a + 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2(a^2 - a - 2) = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = -1$$

Cuando se cumple que $a \neq 2$ y $a \neq -1$ la matriz $|A \cdot B|$ tiene inversa.

b) Para $a = 0$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(AB)X = C \Longrightarrow X = (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

b) Calcúlese el determinante de la matriz $(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot Id)^3$.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. Id es la matriz identidad de orden 2.
Solución:

a) $A^2 = A \Longrightarrow A^{15} = A$ y $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 2 \Longrightarrow |C^3| = |C|^3 = 8$$

Opción B

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{array}\right); \quad |A| = a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- ☛ Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

- ☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ 2x+y+z=1 \\ x+2y+2z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{array}\right.$$

1.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.9 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

b) Determínese la matriz X tal que $B \cdot A \cdot X = C$.

Solución:

a) $A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4/15 & 7/15 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/15 & 19/15 \\ 1/5 & -4/15 \end{pmatrix}$

$\left|A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}\right| = -\dfrac{1}{9}$

De otra manera:

$\left|A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot |B| \cdot \left|C^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot \dfrac{1}{|C|} = \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{-15} = -\dfrac{1}{9}$

b) $B \cdot A \cdot X = C \Longrightarrow X = (BA)^{-1}C$

$$X = \begin{pmatrix} 19/15 & -16/15 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 23/5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.16.10 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x+5y-z=3 \\ x+3y-2z=a \end{array}\right.$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & a \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & a-2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] == \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=2 \\ 2x+5y-z=3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4-7\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right.$$

1.17. Año 2016

1.17.1. Modelo

Opción A

Problema 1.17.1 *(2 puntos)* Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Determínese para qué valores de $a \in R$ es invertible A.

b) Resuélvase para $a = 0$ el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = a^2 + 10a - 24 = 0 \Longrightarrow a = -12 \;\; a = 2$ La matriz será invertible para cualquier valor de a diferente de éstos.

b) Para $a = 0$ la matriz es invertible y, como se trata de un sistema homogéneo, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial $x = y = z = 0$.

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Determínese la matriz X que verifica

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

Solución:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x+2y-3z=3 \\ 3x+ay-2z=5 \end{array} \right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right); \ |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

1.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.17.4 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \quad C = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?
Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C.

Solución:

a) $|A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |C|^2 = 4$
($|C| = |C^T|$ y $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$)

b)

$$M = A \cdot B = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{array} \right)$$

No es una matriz cuadrada y, por tanto, $\nexists M^{-1}$.

Opción B

Problema 1.17.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ x+ay+2z=0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del $a \in R$.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array}\right); \quad |A|=-2a+4=0 \Longrightarrow a=2$$

- ☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right); \quad |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right|=4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

como $|A_2|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right|=-2 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3 \neq$Rango$(A)$ y el sistema es incompatible.

b) Si $a=0$:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ x+2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1/4 \\ z=-1/2 \end{cases}$$

1.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.17.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in R$:

$$\begin{cases} 3x+y+az=a-2 \\ ax-y+z=a-2 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right);\quad |A|=2a^2-8=0 \Longrightarrow a=\pm 2$$

- Si $a\neq \pm 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right);\quad |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right| = -1\neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A)=2$$

$$|A_2|=\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right| = 32\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

como $\text{Rango}(\overline{A})=3\neq\text{Rango}(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right);\quad |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = 1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

como $F_3=F_1-F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2=\text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+y=-2 \\ -y+z=-2 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.17.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A=\left(\begin{array}{ccc} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{array}\right),\quad Id=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

siendo a un número real.

a) Determínese a para que la matriz A admita inversa.

b) Para $a=1$, determínese la matriz X que verifica $A\cdot X+A=Id$.

Solución:

a) $|A|=a(2-a)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=2$
Si $a=0$ o $a=2 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
Si $a\neq 0$ y $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A\cdot X+A=I\Longrightarrow A\cdot X=I-A\Longrightarrow X=A^{-1}(I-A)$:
Para $a=1$:

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1&2&2\\1&1&2\\1&1&1\end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr}-1&0&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{array}\right)$$

$$X=\left(\begin{array}{rrr}-1&0&2\\1&-1&0\\0&1&-1\end{array}\right)\left[\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc}1&2&2\\1&1&2\\1&1&1\end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{rrr}-2&0&2\\1&-2&0\\0&1&-2\end{array}\right)$$

1.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.17.8 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr}k&-1&0\\-7&k&k\\-1&-1&k\end{array}\right)$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $k=1$, la matriz X tal que $XA=Id$.
Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $|A|=k(k^2+k-6)=0\Longrightarrow k=0,\ k=2$ y $k=-3$
Si $k=0$ o $k=2$ o $k=-3\Longrightarrow \nexists A^{-1}$
Si $k\neq 0$ y $k\neq 2$ y $k\neq -3\Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) $XA=Id\Longrightarrow X=A^{-1}$: Si $k=1$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr}1&-1&0\\-7&1&1\\-1&-1&1\end{array}\right)\Longrightarrow X=A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr}-1/2&-1/4&1/4\\-3/2&-1/4&1/4\\-2&-1/2&3/2\end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c}(a-1)x+y+z=1\\x+(a-1)y+(a-1)z=1\\x+az=1\end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los valores del a.

b) Resuélvase el sistema para $a=3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccr|c}a-1&1&1&1\\1&a-1&a-1&1\\1&0&a&1\end{array}\right);\quad |A|=a^2(a-2)=0\Longrightarrow a=0,\ a=2$$

- ☛ Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0, \ \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$A_2 = \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

- ☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $F_1 = F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 1/9 \\ z = 2/9 \end{array}\right.$$

1.18. Año 2017

1.18.1. Ordinaria

Opción A

Problema 1.18.1 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{array}\right) \ \text{y} \ B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

b) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

Solución:

a) $|A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$:
Si $k = \pm 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Si $k = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \ \text{y} \ A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:
Se trata de un sistema Homogéneo

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad |A| = -6(a^2 - a - 6) = 0 \Longrightarrow a = -2, \ a = 3$$

- ☛ Si $a \neq -2$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única $x = y = z = 0$)
- ☛ Si $a = -2$ o $a = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.18.2. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.3 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz $D = A^T \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?

b) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.

Nota: A^T denota la matriz traspuesta de la matriz A.

Solución:

a) $D = A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Como el número de columnas de A es distinto al número de filas de B la matriz $F = A \cdot B$ no existe.

b) $M = B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.18.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} -x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 3y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

1.18.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.18.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - az = 2 \\ y + az = -2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right); \quad |A| = 2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 2/3$$

- ☛ Si $a \neq 2/3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 2/3$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -8/3 & -2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -8/3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el sistema es incompatible.

b) $a = 4$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 2y - z = -2 \\ -2x - 4z = 2 \\ y + 4z = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.6 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz C^{40}.

b) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$

Solución:

a) $C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. $C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

b) $XA + 3B = C \Longrightarrow XA = C - 3B \Longrightarrow X = (C - 3B)A^{-1}$:

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.18.4. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.7 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = Id$, siendo Id la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $|A| = a^3 - 2a^2 = a^2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$ luego $\exists A^{-1} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $a = 1$ y $A \cdot X = Id \Longrightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.18.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + ay + z = 3 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = -3 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 0$.

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = 2a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- ☛ Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + z = 3 \\ y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.19. Año 2018

1.19.1. Modelo

Opción A

Problema 1.19.1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$

a) Determínese para qué valores de a para los que la matriz A es invertible.

b) Para $a = 1$, despéjese y determínese la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X = A + 2Id$, donde Id representa la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = 2a^3 = 0 \Longrightarrow a = 0$ La matriz será invertible para cualquier valor de $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b) Para $a = 1$: $A \cdot X = A + 2Id \Longrightarrow X = A^{-1}(A + 2Id) = Id + 2A^{-1}$:

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.19.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + az = a + 4 \end{array} \right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & a & a+4 \end{array} \right); \quad |A| = 3 - a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- ☛ Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.19.3 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) Calculése la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = I \Longrightarrow B = A^{-1}$

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.19.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rl} x + ay + z & = 1 \\ ax + y + (a-1)z & = a \\ x + y + z & = a + 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- ☛ Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Sistema incompatible

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}\right.$$

1.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.19.5 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

a) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Para $m = 0$ considérese la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Exprésese X en función de A y B y calcúlese X.

Solución:

a) $|A| = 6 - 2m = 0 \Longrightarrow m = 3$. Luego si $m \neq 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Con $m = 0$: $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ -1 & 3/2 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.19.6 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x - y + az &= -1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right); \quad |A| = 3a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- ☛ Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado.

b) Si $a=0$:

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\lambda}{3} \\ \\ y=\dfrac{3-\lambda}{3} \\ \\ z=\lambda \end{cases}$$

1.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.19.7 *(2 puntos)* Considérense las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz $[(A\cdot A^t)^2-2A\cdot A^t]^{11}$.

b) Determínense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X\cdot A^t=B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X.

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

Solución:

a) $[(A\cdot A^t)^2-2A\cdot A^t]^{11}=\left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2-2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{11}=$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\underset{a\times b}{X}\cdot\underset{2\times 3}{A^t}=\underset{1\times 3}{B^t}\Longrightarrow a=1$ y $b=2$, luego el grado de X es 1×2.
La matriz A^t no es invertible ya que no es cuadrada.
$(p,q)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(3,2,3)\Longrightarrow (q,p,q)=(3,2,3)\Longrightarrow p=2$ y $q=3\Longrightarrow X=(2,3)$

Opción B

Problema 1.19.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+3y+z &= a \\ 2x+ay-6z &= 8 \\ x-3y-5z &= 4 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right); \quad |A| = -6a - 12 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- ☛ Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 4$:

$$\left\{\begin{array}{ll} x + 3y + z & = 4 \\ 2x + 4y - 6z & = 8 \\ x - 3y - 5z & = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

1.20. Año 2019

1.20.1. Modelo

Opción A

Problema 1.20.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donde m es un parámetro real.

a) Determínese para qué valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Considérese la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$. Para $m = 5$, exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X.

Solución:

a) $|A| = 3(m - 4) = 0 \Longrightarrow m = 4$
La matriz será invertible para cualquier valor de $m \in \mathbb{R} - \{4\}$.

b) Para $m = 5$: $A \cdot X = A \cdot B + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A \cdot B + B) = A^{-1}(A + I)B = (I + A^{-1})B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 13/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/3 & -2/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/3 & -2/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 6x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ 5x - y + az = -1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array}\right); \quad |A| = 16a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- ☛ Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 6F_2 - F_1 \\ 6F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 5 & 11 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 6x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ 5x - y = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\lambda \\ y = \frac{11}{16} - \frac{5}{16}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.20.3 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución:

a) $A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|A - 2B| = 2k - 29 = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{29}{2}$

b) Como C no es cuadrada no es invertible.

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C^T C| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\exists (C^T C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{cases}$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.

b) Resuélvase para $m = 1$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo.

a)

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix}; \quad |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

- ☛ Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial $x = y = z = 0$)

- ☛ Si $m = \pm 1$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Un sistema homogéneo no puede ser incompatible.

b) Si $m = 1$ la primera y la segunda ecuación son iguales cambiadas de signo, eliminamos una de ellas y resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.5 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y + (a+2)z = 1 \\ x + y + az = 0 \\ (a-1)x + 2z = a + 1 \end{array} \right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array} \right); \quad |A| = a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 3$$

- ☛ Si $a \neq 0$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- ☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

- ☛ Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

b) Si $a=2$

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+4z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+2z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.20.6 *(2 puntos)* Considérense las matrices A, B y C siguientes, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$A=\left(\begin{array}{rr} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \text{ y } C=\left(\begin{array}{rr} -2 & a \\ b & c \end{array}\right)$$

a) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique

$$C \cdot A = B \cdot C \;\text{ y }\; |C| = 2$$

Nota: $|C|$ es el determinante de la matriz C.

b) Calcúlese, para los valores $a=b=c=1$, $C^{-1}\cdot B\cdot C$ y B^{100}.

Solución:

a) $\left(\begin{array}{rr} -2 & a \\ b & c \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -2 & a \\ b & c \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -b & -c \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 6+2a=0 \\ -3b+2c=-b \\ -3b+2c=-c \\ |C|=-2c-ab=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-3 \\ b=2 \\ c=2 \end{array}\right.$$

b) $a=b=c=1 \Longrightarrow C=\left(\begin{array}{rr} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow C^{-1}=\left(\begin{array}{rr} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$

$$C^{-1}\cdot B\cdot C=\left(\begin{array}{rr} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

$B^1=\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right)$, $B^2=\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$, $B^3=\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right)$, luego

$$B^n=\left\{\begin{array}{ll} \left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) & \text{si} \quad n \text{ par} \\ \\ \left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) & \text{si} \quad n \text{ impar} \end{array}\right. \Longrightarrow B^{100}=\left(\begin{array}{rr} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

1.20.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.20.7 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$. No existe A^{-1} para estos dos valores.

b) Para $a = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.8 *(2 puntos)* Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese B^{-1}.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}CA =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1.20.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.9 *(2 puntos)* Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A \cdot B$ y determínense los valores de x para los cuales $A \cdot B$ es invertible.

b) Calcúlese la inversa de $A \cdot B$ cuando $x = 1$.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|A \cdot B| = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$. Luego $\exists (A \cdot B)^{-1}\ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $x = 1$:
$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.20.10 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax - z = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase la unicidad de la solución del sistema en función del valor de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 2 - a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- ☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - z = 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \\ z = -6 \end{array}\right.$$

1.21. Año 2020

1.21.1. Modelo

Opción A

Problema 1.21.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) Para $a = 0$ y $b = 2$, determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + b & a + 2 \\ ab + 2b & b + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b = 2 \\ a + 2 = 0 \\ ab + 2b = 0 \\ b + 4 = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -2 \end{array}\right.$$

b) $XA = B - X \Longrightarrow XA + X = B \Longrightarrow X(A + I) = B \Longrightarrow X = B(A + I)^{-1}$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.21.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A\cdot B=C^t$

b) Para $m=0$ calcule B^{-1}.

Solución:

a) $A\cdot B=C^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2m-1=3 \\ m+2=4 \\ m-1=1 \end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$m=2$$

b) $m=0\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.21.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} x+ay+z= & 6 \\ 2x-y+z= & a-1 \\ -x+y+z= & 2 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=2$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\quad |A|=-3a-1=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

- ☛ Si $a\neq-\dfrac{1}{3}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a=-\dfrac{1}{3}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ 3F_3+F_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rl} x+2y+z = & 6 \\ 2x-y+z = & 1 \\ -x+y+z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

1.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.21.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$; $|A| = -a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ *SCD*: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow SI\text{: sistema}$$
incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow SCI\text{: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas solu-}$$
ciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ 2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.5 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -4I$:

$$\begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 10 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ 4-m=0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow m = 4$$

b) Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

1.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.21.6 *(2 puntos)* Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^2 y A^{10}.

b) Calcule $(AA - 3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \ldots,$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

b) $B = AA - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(AA - 3I)^{-1} = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.21.7 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- ☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{4} \\ y = -\dfrac{7}{2} \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

1.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.21.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -I \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} 2 & 5a \\ a & 3 \end{array}\right)^2 - 5\left(\begin{array}{cc} 2 & 5a \\ a & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$\left(\begin{array}{cc} 5a^2-6 & 0 \\ 0 & 5a^2-6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow a = \pm 1$

b) Si $a = -1 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$

Opción B

Problema 1.21.9 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 4$$

- ☛ Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- ☛ Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{cases}$$

1.22. Año 2021

1.22.1. Modelo

Opción A

Problema 1.22.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac+2b & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{cases} 2a = a - 1 \\ ac + 2b = b - 1 \\ 2c = c - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

b) Para $a = b = c = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.22.2 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A|=-a^2+3a-2=0 \Longrightarrow a=1, \ a=2$$

- ☛ Si $a\in\mathbb{R}-\{1,2\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- ☛ Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a=0$:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=3/2 \\ y=-2 \\ z=-1/2 \end{cases}$$

1.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.22.3 *(2 puntos)* Se considera la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

.

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

Solución:

a) $A = A^{-1} \Longrightarrow AA = AA^{-1} \Longrightarrow A^2 = I \Longrightarrow A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ a=0 \\ b^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\pm 1 \end{cases}$$

b) Para $a = b = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.22.4 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right); \quad |A| = 3(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.22.5 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.

b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = 2(a^2 - 4) = 0 \Longrightarrow a = \pm 2 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$ si $a = \pm 2\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.22.6 *(2 puntos)* Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

Solución:

Sean x los juguetes de un euro, y los de dos euros y z los de tres euros

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 5z = 228 \\ -5y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 40 \end{array}\right.$$

1.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.22.7 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = -a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.22.8 Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{array} \right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array} \right)$, $|A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] =$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 6y + z = 0 \\ -x - 3y = 1 \\ -y - z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{array} \right.$$

1.23. Año 2022

1.23.1. Modelo

Opción A

Problema 1.23.1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = 2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.23.2 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = 2 \\ x - y + az = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right); \quad |A| = 3(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -2$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = 2 \\ x - y - 2z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$