1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. Función exponencial

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x},\ y = 5^{-x}.$$

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

En este curso estudiamos funciones exponenciales sencillas, del tipo $y = b^x$, donde la base b es un número positivo distinto de 1.

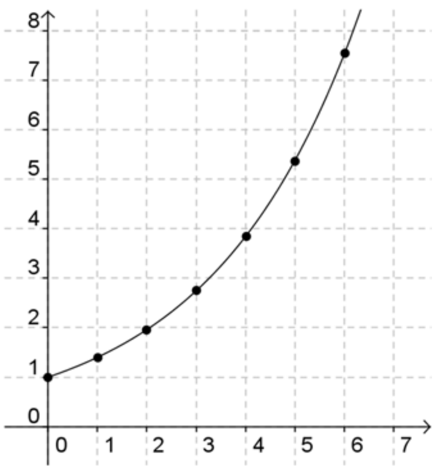
Actividades resueltas

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de *"x"* horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	Núm. bacterias (*y*)
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
…	…

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la "x" valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general la "x" sí puede tener valores negativos. Sin embargo la base b solo puede tener valores positivos. Asimismo, observarás que la variable "y" también resulta siempre positiva. Más adelante recogemos estas propiedades al hablar de dominio y recorrido de la función exponencial.

Actividades propuestas

1. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

Observarás que los valores de "y" aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de "x" aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 3. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

2. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

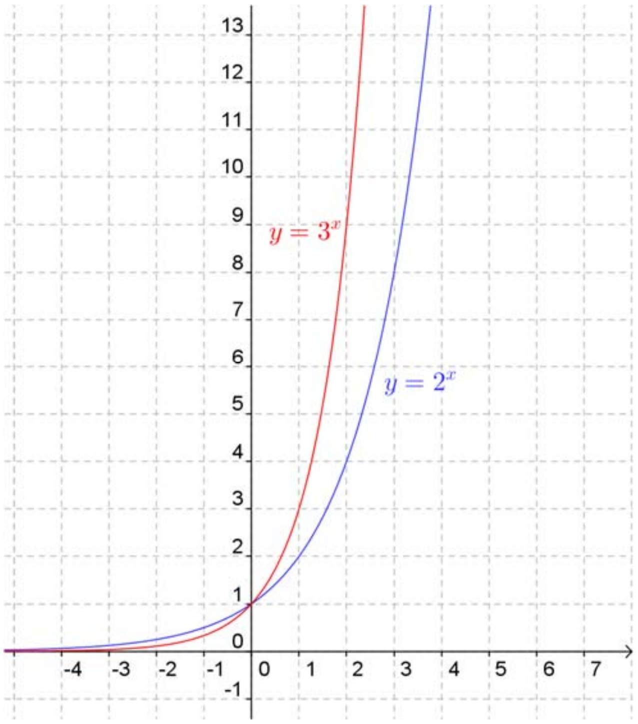
1.2. Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "b". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

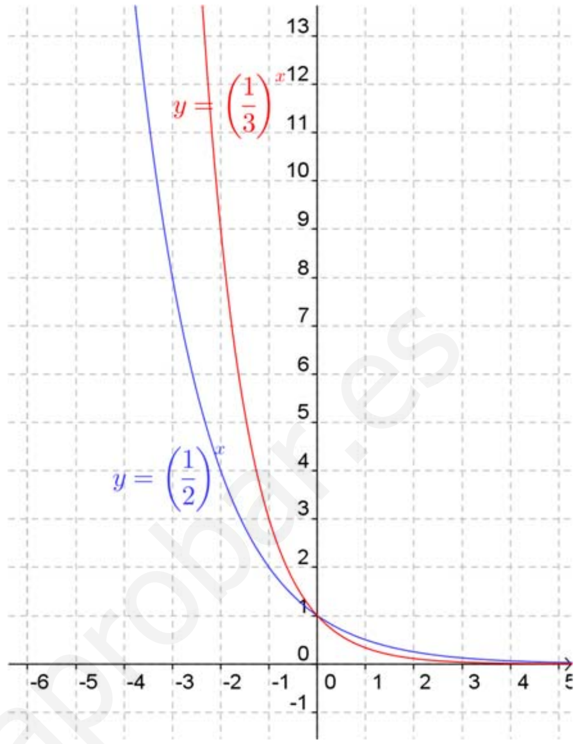
En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, *"y"* nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos (0, 1), (1, b) y (–1, 1/b).
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es b > 1

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Cuando la base es 0 < b < 1

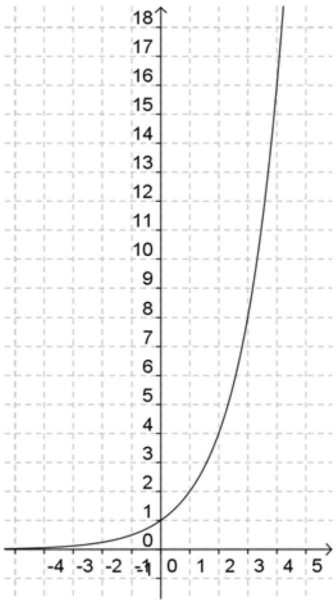
Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Actividades resueltas

- Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

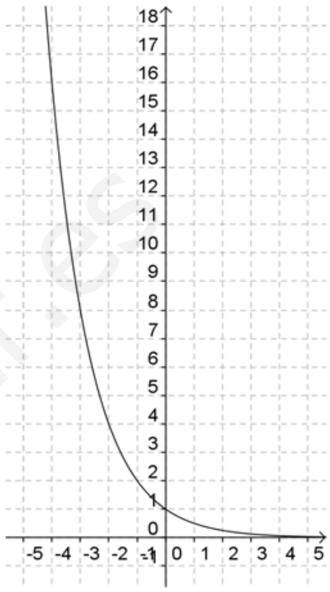
Función $y = 2^x$

x	*y*
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



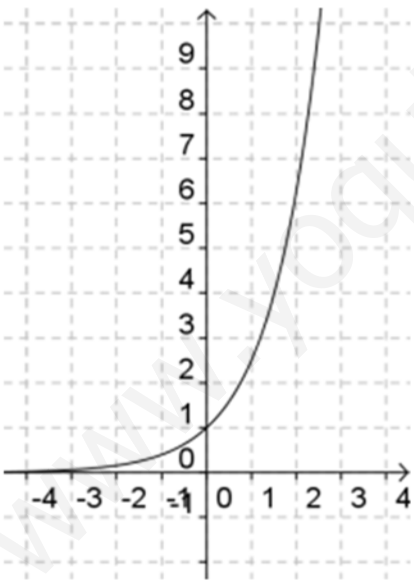
Función $y = 2^{-x}$

x	*y*
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…

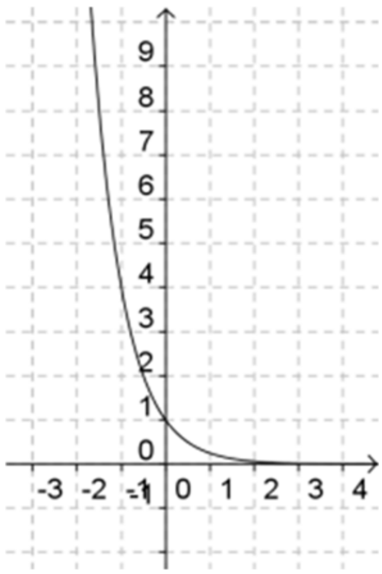


- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas son funciones exponenciales porque pasan por el punto (0, 1) y tienen por un lado como asíntota horizontal el eje OX, mientras que por el otro lado tienden a + ∞.

La función (a) es $y = 2.5^x$ porque pasa por el punto (1, 2.5).

La función (b) es $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa por el punto (–1, 4).

- Representa la función $y = 3^{-x}$

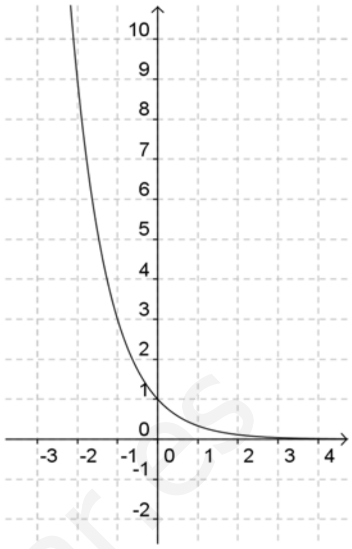
Solución:

Por tener exponente negativo es:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Por tanto su gráfica es la del margen.

Observa que pasa por los puntos (–1, 3), (0, 1) y (1, 1/3).



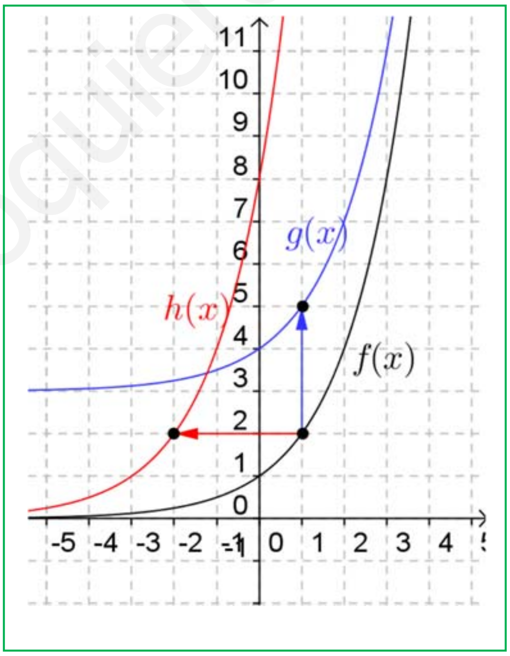
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto anteriormente, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x + 3$ y $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

La función *g(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia arriba 3 unidades.

La función *h(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia la izquierda 3 unidades.

Por tanto sus gráficas son estas, representadas en diferente color:



1.3. El número *e*. La función e^x

El número e tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Es un número irracional.

El número e se define como el límite cuando n tiende a infinito de la siguiente sucesión:

$$\boldsymbol{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Su valor aproximado es e = 2.71828182846...

Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico).

Con la ayuda de la calculadora se puede comprobar cómo los valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se acercan cada vez más al valor e = 2.71828182846... a medida que aumenta el valor de n.

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de e con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta e pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas

3. Utilizando la calculadora, en tu cuaderno haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

4. Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.03; a) Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años; b) Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años; c) Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

Cultivo de la bacteria Salmonella

5. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

6. Represente en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

7. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.