FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales son funciones en las cuales la variable independiente está en la posición del exponente. Recordemos que al tener 3^5, al 3 le llamamos la base y al 5 le llamamos el exponente o la potencia. A las funciones exponenciales se les llama de acuerdo al valor de la base. Veamos la definición formal de esta función.

DEFINICIÓN:
Sea x cualquier número real. La función exponencial base a es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo ($a > 0$) y $a \neq 1$.

EJEMPLOS DE FUNCIONES EXPONENCIALES:

1) $f(x) = 2^x$
2) $g(x) = 3^x + 2$
3) $h(t) = 2(5^{t-1})$
4) $F(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
5) $G(x) = e^x$ (e es un número irracional cuyo valor es un decimal infinito no periódico, $e \approx 2.72$)

OBSERVACIÓN: No se incluye la base $a = 1$, porque si $a = 1$ entonces tendríamos la función constante $f(x) = 1^x = 1$. También se excluyen las bases que son negativas, porque, de otra manera tendríamos que excluir muchos valores del dominio de la función. Por ejemplo, si la base fuera -2, entonces:

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \Re$$

$$(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8} \notin \Re$$

$$(-2)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^5} \notin \Re$$

CUIDADO: Es importante distinguir entre la función $f(x) = x^2$, la cual es una función polinomial de grado 2 y la función $g(x) = 2^x$, la cual es una función exponencial de base 2. En una función polinomial, la base es una variable y el exponente es una constante. En una función exponencial, la base es una costante y el exponente es una variable.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

ASÍNTOTA HORIZONTAL

La asíntota horizontal es una recta horizontal a la cual la gráfica de la función se va acercando cuando los valores en el dominio de la función aumentan o disminuyen. Si la gráfica de la función tiene esta asíntota, entonces ella nos describe el comportamiento al final de la gráfica. Las asíntotas no son parte de la gráfica, pero ayudan a trazarla. Como no son parte de la gráfica, por eso se trazan entrecortadas.

DEFINICIÓN: La recta $y = L$ $(L \in \Re)$ es una asíntota horizontal para la gráfica de la función f si a medida que x disminuye $(x \to -\infty)$ o a medida que x aumenta $(x \to \infty)$, los valores de f se acercan a L.

Esta idea se estudia en Cálculo, usando el concepto del límite de una función.

Recordemos lo siguiente acerca de los exponentes.

LEYES DE LOS EXPONENTES:

Sean a, b, m, n números reales, con $a \neq 0, b \neq 0$.

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

IV. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

II. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

III. $(ab)^m = a^m b^m$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES:

Sean a, n números reales, con $a \neq 0$ y $n > 0$.

a) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

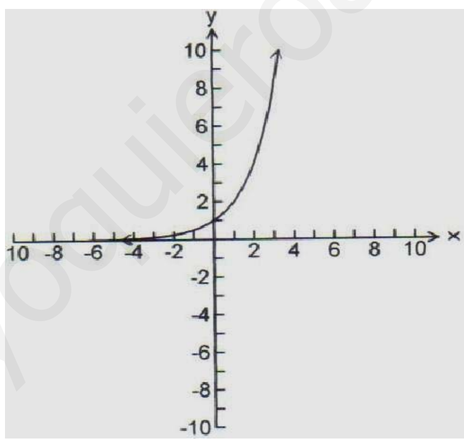
b) $a^0 = 1$

EJEMPLOS: Traza la gráfica de :

1) $f(x) = 2^x$

La variable x puede ser cualquier número real, pero por conveniencia usaremos valores enteros.

x	y	
-4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	$\left(2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}\right)$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}\right)$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}\right)$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}\right)$
0	$2^0 = 1$	
1	$2^1 = 2$	
2	$2^2 = 4$	
3	$2^3 = 8$	
4	$2^4 = 16$	



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1)el dominio (D) es $\Re$

2) el campo de valores (CV) es $(0, \infty)$

3) no hay interceptos en el eje de x

4) el intercepto en el eje de y es (0,1)

5) la función es uno-a-uno

6) la función es creciente en todo su dominio

7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica

De la gráfica se observa que a medida que los valores de x disminuyen, los valores de y se acercan a cero. En símbolo podemos expresar esta idea así:

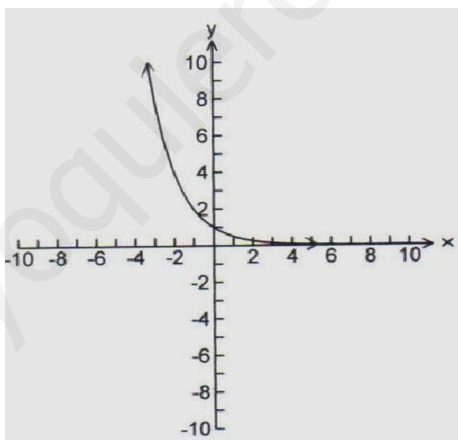
A medida que $x \to -\infty$, $y \to 0$.

2) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

OBSERVACIÓN:

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

x	y
-4	$2^4 = 16$
-3	$2^3 = 8$
-2	$2^2 = 4$
-1	$2^1 = 2$
0	$2^0 = 1$
1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
4	$2^{-4} = \frac{1}{16}$



Propiedades de la función que se observan de la gráfica y de la tabla de valores :

1) el dominio (D) es $\Re$
2) el campo de valores (CV) es $(0,\infty)$
3) no hay interceptos en el eje de x
4) el intercepto en el eje de y es (0,1)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente en todo su dominio
7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica
   Esto ocurre porque a medida que los valores de x aumentan, los valores de y se acercan a cero. En símbolos podemos expresar esta idea así:
   A medida que $x \to \infty$, $y \to 0$.

OBSERVACIÓN: Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, podemos usarla para trazar la gráfica de $y = f(-x)$, ya que la gráfica de $y = f(-x)$ es la reflección a través del eje de y de la gráfica de $y = f(x)$.

Si $f(x) = 2^x$ entonces $f(-x) = 2^{-x}$. Por lo tanto, para trazar la gráfica de $y = 2^{-x}$, pudimos haber reflejado la gráfica de $y = 2^x$ a través del eje de y. Esto quiere decir que si el par ordenado (x, y) está en la gráfica de $y = 2^x$ entonces el par ordenado $(-x, y)$ está en la gráfica de $y = 2^{-x}$. Por ejemplo, como el par ordenado (2,4) pertenece a la gráfica de $y = 2^x$ entonces el par ordenado $(-2,4)$ pertenece a la gráfica de $y = 2^{-x}$. O sea, se le cambia el signo a la x de cada par ordenado que está en la gráfica de $y = 2^x$. El valor de y se queda igual. De esta manera se obtienen los pares ordenados de la gráfica de $y = 2^{-x}$.

A continuación, aparecen resumidas las propiedades que se observaron en los ejemplos discutidos. Estas propiedades dependen de la base que tenga la función exponencial.

RESUMEN DE LAS PROPIEDADES PRESENTADAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES:

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = a^x$, para $a > 1$:

1) el dominio (D) es $\Re$
2) el campo de valores (CV) es $(0, \infty)$
3) no hay interceptos en el eje de x
4) el intercepto en el eje de y es (0,1)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es creciente en todo su dominio
7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica
   Esto ocurre porque a medida que los valores de x disminuyen, los valores de y se acercan a cero. En símbolos podemos expresar esta idea así:
   A medida que $x \to -\infty$, $y \to 0$.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$:

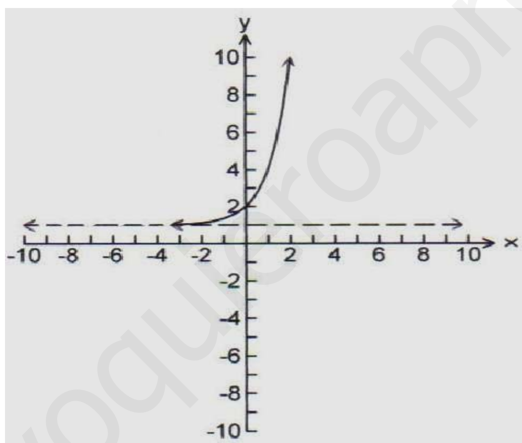
1) el dominio (D) es $\Re$
2) el campo de valores (CV) es $(0, \infty)$
3) no hay interceptos en el eje de x
4) el intercepto en el eje de y es (0,1)
5) la función es uno-a-uno
6) la función es decreciente en todo su dominio
7) el eje de x (con ecuación $y = 0$) es una asíntota horizontal para la gráfica
   Esto ocurre porque a medida que los valores de x aumentan, los valores de y se acercan a cero. En símbolos podemos expresar esta idea así:
   A medida que $x \to \infty$, $y \to 0$.

Veamos otro ejemplo de la gráfica de una función exponencial.

EJEMPLO: Traza la gráfica de $f(x) = 3^x + 1$.

Haremos una tabla de valores para la función f.

x	y	
-2	$3^{-2} + 1 = 1\frac{1}{9}$	$\left(3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\right)$
-1	$3^{-1} + 1 = 1\frac{1}{3}$	$\left(3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}\right)$
0	$3^0 + 1 = 2$	$\left(3^0 = 1\right)$
1	$3^1 + 1 = 4$	
2	$3^2 + 1 = 10$	



Esta gráfica tiene una asíntota horizontal que es la recta $y = 1$.

OBSERVACIÓN: Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, entonces la gráfica de $y = f(x) + h$ es la gráfica de $y = f(x)$ movida h unidades hacia arriba si $h > 0$ y h unidades hacia abajo si $h < 0$. En el caso del ejemplo anterior, la gráfica de $f(x) = 3^x + 1$ se puede obtener moviendo 1 unidad hacia arriba la gráfica de la función $y = 3^x$. Al mover la gráfica 1 unidad hacia arriba, también se mueve la asíntota horizontal. Por lo tanto, la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de $f(x) = 3^x + 1$ es la recta $y = 1$.

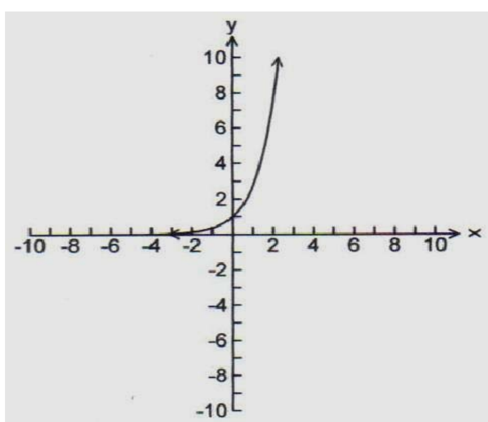
LA BASE **e**

Esta base es muy importante porque se usa para modelar situaciones que ocurren en la naturaleza. Como ya mencionamos antes, el número e es un número irracional. El número e está definido como el número al cual se acerca la expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \to \infty$. Como se mencionó anteriormente, esta idea se relaciona con el concepto del límite de una función que se estudia en Cálculo. A este número se le llama e, en honor al matemático suizo Leonard Euler (1707-1783). La función exponencial base e se define como $f(x) = e^x$ y es llamada la función exponencial natural. A continuación aparece su gráfica.

EJEMPLOS: Traza la gráfica de:

1) $f(x) = e^x \quad (e \approx 2.72)$
Como $e > 1$, la gráfica es creciente en todo su dominio. El intercepto en y es (0,1). La recta $y = 0$ (el eje de x) es la asíntota horizontal. Le aplican las restantes propiedades que se enumeran para la función $f(x) = a^x, a > 1$.

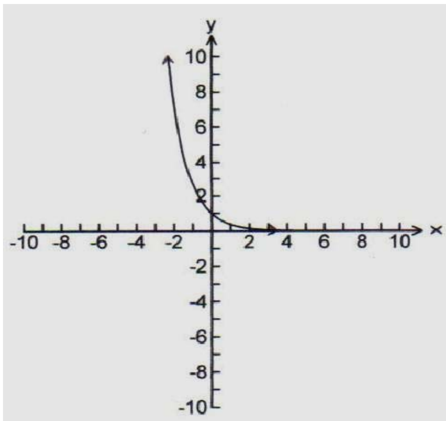
x	y
-2	$e^{-2} \approx 0.14$
-1	$e^{-3} \approx 0.37$
0	1
1	2.72
2	7.39



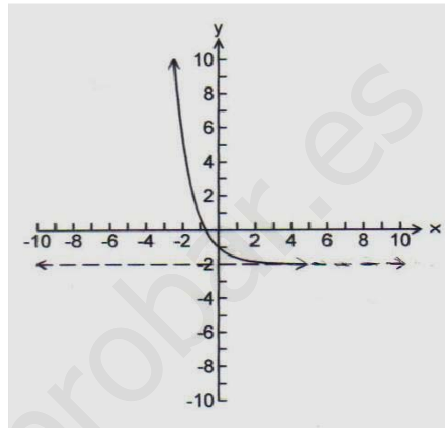
$f(x) = e^x$

2) $g(x) = e^{-x} - 2$

Para trazar la gráfica de $y = e^{-x}$, reflejamos la gráfica de $y = e^{x}$ a través del eje de *y*. Como ya mencionamos, se cambia el signo de la x en cada par ordenado de la tabla anterior. Los signos de la y se quedan igual. La gráfica de $y = e^{-x} - 2$ se obtiene moviendo 2 unidades hacia abajo la gráfica de $y = e^{-x}$. La asíntota horizontal también se mueve 2 unidades hacia abajo. La ecuación de la asíntota horizontal es: $y = -2$.



$y = e^{-x}$



$g(x) = e^{-x} - 2$

ECUACIONES EXPONENCIALES – TIPO I

Las ecuaciones exponenciales son ecuaciones con términos de la forma a^{x}, donde $a > 0$, $a \neq 1$. Estudiaremos primero ecuaciones exponenciales que tienen las bases iguales o bases distintas que se pueden igualar. Llamaremos a estas ecuaciones, Ecuaciones del Tipo I. Para resolver estas ecuaciones se usan las leyes de los exponentes y la propiedad que sigue.

Propiedad I:
Si $a^{p} = a^{q}$ entonces $p = q$.
Esta propiedad se cumple porque las funciones exponenciales son funciones uno-a-uno.

EJEMPLOS: Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $2^{x-1} = 2^{3x}$

2) $5^{1-3x} = \dfrac{1}{5}$

3) $4^{3t} = 8^{t-1}$

4) $e^{x} \cdot e^{3x} = e^{x-1}$

5) $(e^{4})^{x} \cdot e^{x^{2}} = \dfrac{1}{e^{5}}$

SOLUCIÓN:

1) $2^{x-1}=2^{3x}$

Para resolver estas ecuaciones, las bases deben ser iguales para poder utilizar la Propiedad I. Como en esta ecuación las bases son iguales, procedemos a igualar los exponentes.

$x-1=3x$

$-2x=1$

$$x=\frac{1}{-2} \qquad \text{ó} \qquad x=\frac{-1}{2}$$

La solución de una ecuación se puede escribir como un conjunto, al cual llamamos el conjunto solución (C.S.) de la ecuación.

$\therefore\ C.S.=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ (El símbolo $\therefore$ significa por lo tanto.)

2) $5^{1-3x}=\frac{1}{5}$

Como las bases no son iguales, procedemos a hacerlas iguales.

$5^{1-3x}=5^{-1}$

Entonces: $1-3x=-1$

$-3x=-2$

$$x=\frac{-2}{-3} \qquad \text{ó} \qquad x=\frac{2}{3}$$

$\therefore$ C.S.$=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

3) $4^{3t}=8^{t-1}$

Como las bases no son iguales, procedemos a hacerlas iguales

$(2^2)^{3t}=(2^3)^{t-1}$

$2^{6t}=2^{3t-3}$

Entonces: $6t=3t-3$

$3t=-3$

$t=-1$

$\therefore$ C.S.$=\{-1\}$

4) $e^x\cdot e^{3x}=e^{x-1}$

Usando las leyes de los exponentes, efectuamos la operación del lado izquierdo de la ecuación.

$e^{x+3x}=e^{x-1}$

Entonces: $4x = x - 1$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ C.S.=$\left\{\frac{1}{3}\right\}$

5) $(e^6)^x \cdot e^{x^2} = \dfrac{1}{e^5}$

$$e^{6x} \cdot e^{x^2} = \frac{1}{e^5}$$

Usando las leyes de los exponentes, efectuamos la operación del lado izquierdo de la ecuación.

$$e^{6x+x^2} = e^{-5}$$

Entonces: $6x + x^2 = -5$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x+5)(x+1) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 1 = 0$$

$$x = -5 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

$\therefore$ C.S.=$\{-5, -1\}$

OBSERVACIÓN:

¿ Qué pasaría si quisiéramos resolver la siguiente ecuación?

$$2^x = 7$$

En esta ecuación no se pueden igualar las bases. Se usan logaritmos para resolver este tipo de ecuación. Los logaritmos los estudiaremos más adelante y resolveremos la ecuación planteada.

APLICACIONES:

Como habíamos mencionado antes, las funciones exponenciales tienen diversas aplicaciones, ya que hay situaciones en las distintas disciplinas cuyo comportamiento es exponencial. Veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLOS:

1) El número de bacterias en cierta colonia aumentó de 600 a 1,800 entre las 7:00 A.M. y las 9:00 A.M. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, el número de bacterias t horas después de las 7:00 A.M. , está dado por la siguiente función: $f(t) = 600(3)^{\frac{t}{2}}$. Halla el número de bacterias en la colonia a las:
   a) 9:00 A.M.
   b) 11:00 A.M.

SOLUCIÓN:

a) Es importante observar que t es el número de horas después de las 7:00 A.M.
   Por lo tanto, a las 9:00 A.M. han transcurrido 2 horas después de las 7:00 A.M.
   $\therefore\ t = 2$
   Al evaluar la función en $t = 2$ obtenemos:
   $f(2) = 600(3)^{\frac{2}{2}} = 600(3)^1 = 600(3) = 1{,}800$
   $\therefore$ A las 9:00 A.M. hay 1,800 bacterias en el cultivo.

b) A las 11:00 A.M. han transcurrido 4 horas después de las 7:00 A.M.
   $\therefore\ t = 4$
   Al evaluar la función en $t = 4$ obtenemos:
   $f(4) = 600(3)^{\frac{4}{2}} = 600(3)^2 = 5{,}400$
   $\therefore$ A las 11:00 A.M. hay 5,400 bacterias en el cultivo.

2) La función $D(h) = 5e^{-0.4h}$ puede usarse para hallar el número de miligramos presentes en la sangre de un paciente, h horas después de habérsele admnistrado cierta droga. ¿Cuántos miligramos están presentes en la sangre del paciente después de 6 horas de habérsele administrado la droga?

SOLUCIÓN:

Evaluamos la función para $h = 6$, ya que h representa el número de horas después de habérsele administrado la droga al paciente.
$D(6) = 5e^{-0.4(6)} = 5e^{-2.4} \approx 0.45$ mg (miligramos) (Se usó una calculadora científica para aproximar este resultado. La calculadora nos permite evaluar e^x .)

EJERCICIOS DE PRÁCTICA I :

1) Traza la gráfica de las siguientes funciones. Traza también la gráfica de la asíntota, si es distinta al eje de x.

a) $f(x) = 3^x$
b) $g(x) = 3^{-x} - 4$
c) $y = 2^{x+3}$
d) $f(x) = e^x + 3$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x+5} = 3^{x-1}$
b) $2^{2x-1} = 4$
c) $7^{t+3} = \frac{1}{7}$
d) $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12}$

3) Suponer que una substancia se va desintegrando al cabo de los años. La función $q(t) = 100(2)^{\frac{-t}{5}}$ nos permite hallar la cantidad en gramos, que queda de esta substancia al cabo de t años. ¿Cuántos gramos quedan de esta substancia al cabo de 10 años ?

4) Suponer que para cierta colonia de bacterias, la cantidad de bacterias presentes al cabo de t horas está dada por la función $Q(t) = 15{,}000e^{0.3t}$. ¿Cuántas bacterias están presentes al cabo de 5 horas?