TRIGONOMETRÍA

1)

Calcula las razones trigonométricas de 75° y $\frac{\pi}{12}$ rad.

2)

. Demuestra que $\text{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$.

3)

Desarrolla las expresiones de $\cos 3\alpha$ y de $\text{tg}\, 3\alpha$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

4)

Comprueba que $\cos 75° + \cos 45° = \cos 15°$.

5)

Transforma las siguientes sumas en productos.

a) $\text{sen}\, 55° + \text{sen}\, 15°$ b) $\text{sen}\, 75° - \text{sen}\, 35°$ c) $\cos 125° + \cos 85°$ d) $\cos 220° - \cos 20°$

6)

Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\text{sen}\, x = 1$

b) $\text{tg}\, x = 0$

c) $2\cos x + 1 = 0$

d) $\sqrt{3}\,\text{tg}\, x - 1 = 0$

7)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 45°$ y $\widehat{B} = 100°$.

8)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $\widehat{C} = 35°$.

9)

Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{B} = 40°$, $a = 8$ dm

b) *$\widehat{A} = 80°$, $a = 10$ m, $b = 5$ m

c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm

d) *$\widehat{A} = 75°$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

10)

Desarrolla en función de $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$ la expresión de $\text{sen}\, 3\alpha$.

11)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ c) $\text{tg}\, x = 1$ e) $\cos x = \frac{1}{2}$ g) $\text{sen}\, x = 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\text{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $1 + \cos x = 0$

12)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\text{sen}\, 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\text{tg}\, 3x = -1$ e) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\text{sen}\,\frac{x}{2} = 0$ f) $\text{tg}\,\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

13)

(TIC) Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}\, x = \cos x$ b) $\text{sen}\, 2x - \text{sen}\, x = 0$ c) $\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 0$ d) $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}$

14)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°].

a) $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5$ b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9$ c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x$ d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x$

15)

(TIC) Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas comprendidas en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$

b) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

16)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\widehat{C} = 40°$ c) $a = 3$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $c = 5$ cm e) $a = 30$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 50°$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35°$ f) $b = 25$ cm, $\widehat{B} = 55°$, C = 65°

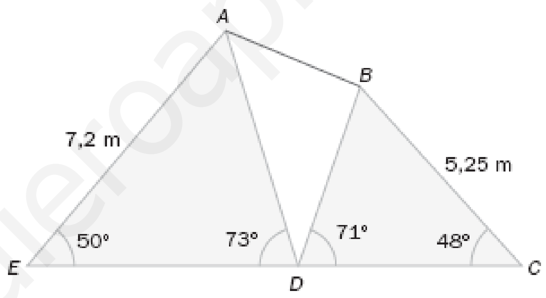
17)

Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

18)

Calcula la distancia entre los puntos A y B.



19)

Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.

20)

Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35°.

21)

Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de lados de un triángulo, e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) 12, 11 y 9 cm b) 23, 14 y 8 cm c) 26, 24 y 10 cm d) 40, 30 y 20 m

22)

En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.

23)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10$ cm, $b = 14$ cm, $c = 8$ cm e) $a = 2{,}1$ cm; $b = 1{,}4$ cm; $c = 1{,}8$ cm

b) $b = 6$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 39°\ 12'$ f) $a = 9$ cm, $c = 5$ cm, $\widehat{B} = 103°\ 27'$

c) $a = 7$ cm, $\widehat{B} = 38°\ 49'$, $\widehat{C} = 66°\ 40'$ g) $b = 8{,}3$ cm; $c = 9{,}1$ cm; $\widehat{C} = 112°\ 50'$

d) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $\widehat{B} = 36°\ 38'$ h) $c = 6$ cm, $\widehat{A} = 27°\ 42'$, $\widehat{B} = 98°\ 20'$

24)

Encuentra las soluciones para estos triángulos.

a) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm

b) $a = 8$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 42°\ 55'$

c) $a = 10$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 72°\ 55'$

d) $b = 6$ cm; $c = 4,5$ cm; $\widehat{C} = 38°\ 26'$

e) $c = 12$ cm, $\widehat{A} = 92°$, $\widehat{B} = 26°\ 28'$

f) $a = 11$ cm, $b = 12$ cm, $\widehat{A} = 27°\ 36'$

25)

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\cos x \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$

d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1$

e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0$

g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

h) $\dfrac{\operatorname{sen}(60° - x)}{\cos x} = 1$

i) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0$

j) $\operatorname{sen}(x + 30°) + \cos(x + 60°) = 1 + \cos 2x$

26)

7. Resuelve la ecuación sen $2x = \operatorname{sen} x$.

27)

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\operatorname{sen} 2x = 1$

b) $3\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

c) $3\cos \dfrac{x}{2} = 1,5$

d) $5\operatorname{sen} 4x = 0$

28)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen}(45° + x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

29)

22. Resuelve la ecuación: $\cos x = \operatorname{sen} 2x$

30)

24. Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$

31)

Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$

32)

Resuelve la ecuación: $\operatorname{sen} 2x \cos x = 3 \operatorname{sen}^2 x$

33)

Resuelve la ecuación: $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$

34)

Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63°$.

35)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54°$.

36)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30°$.

37)

Resuelve el triángulo ABC del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.

SOLUCIONES

1)

Calcula las razones trigonométricas de 75° y $\frac{\pi}{12}$ rad.

a) $\text{sen } 75° = \text{sen } (30° + 45°) = \text{sen } 30° \cos 45° + \cos 30° \text{ sen } 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\cos 75° = \cos (30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \text{sen } 30° \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\text{tg } 75° = \frac{\text{sen } 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$

b) $\text{sen } \frac{\pi}{12} = \text{sen } \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen } \frac{\pi}{3} \text{ sen } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\text{tg } \left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}$

2)

Demuestra que $\text{sen } \left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$.

$\text{sen } \left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$

3)

. Desarrolla las expresiones de $\cos 3\alpha$ y de $\text{tg } 3\alpha$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

$\cos 3\alpha = \cos (\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \text{sen } \alpha \text{ sen } 2\alpha = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) - \text{sen } \alpha \cdot 2\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha =$
$= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha - 2\text{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$$\text{tg } 3\alpha = \text{tg } (\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } 2\alpha}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } 2\alpha} = \frac{\text{tg } \alpha + \dfrac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \dfrac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{\dfrac{\text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha + 2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{\dfrac{1 - \text{tg}^2 \alpha - 2\text{tg}^2 \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{3\text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\text{tg } \alpha \, (3 - \text{tg}^2 \alpha)}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha}$$

4)

Comprueba que $\cos 75° + \cos 45° = \cos 15°$.

$\cos 75° + \cos 45° = 2\cos \frac{75° + 45°}{2} = 2\cos \frac{75° - 45°}{2} = 2\cos 60° \cos 15° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 15° = \cos 15°$

5)

Transforma las siguientes sumas en productos.

a) $\text{sen } 55° + \text{sen } 15°$ b) $\text{sen } 75° - \text{sen } 35°$ c) $\cos 125° + \cos 85°$ d) $\cos 220° - \cos 20°$

a) $\text{sen } 55° + \text{sen } 15° = 2\text{sen } \frac{55° + 15°}{2} \cos \frac{55° - 15°}{2} = 2\text{sen } 35° \cos 20°$

b) $\text{sen } 75° - \text{sen } 35° = 2\cos \frac{75° + 35°}{2} \text{ sen } \frac{75° - 35°}{2} = 2\cos 55° \text{ sen } 20°$

c) $\cos° 125 + \cos 85° = 2\cos \frac{125° + 85°}{2} \cos \frac{125° - 85°}{2} = 2\cos 105° \cos 20°$

d) $\cos 220° - \cos 20° = -2\text{sen } \frac{220° + 20°}{2} \text{ sen } \frac{220° - 20°}{2} = -2\text{sen } 120° \text{ sen } 100°$

6)

Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\operatorname{sen} x = 1$

b) $\operatorname{tg} x = 0$

c) $2 \cos x + 1 = 0$

d) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$

a) $\operatorname{sen} x = 1$ El seno de un ángulo vale 1 únicamente en 90°, 450°, 810°, etc.

Por tanto: $x = 90° + 360°\ k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in Z$

b) $\operatorname{tg} x = 0$ La tangente vale 0 en los ángulos 0°, 180°, 360°, 540°, etc.

Por tanto: $x = 180°\ k$ con $k \in Z$ o $x = \pi k$ con $k \in Z$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ El coseno es negativo para los ángulos de los cuadrantes 2.° y 3.°

Por tanto: $x = 120° + 360°\ k$, $x = 240° + 360°\ k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ con $k \in Z$

d) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ La tangente es positiva para los ángulos de los cuadrantes 1.° y 3.°

Por tanto: $x = 30° + 360°\ k$, $x = 210° + 360°\ k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ con $k \in Z$

7)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 45°$ y $\widehat{B} = 100°$.

$$\widehat{C} = 180° - 100° - 45° = 35° \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{10 \cdot \operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 45°} = 8{,}11 \text{ cm}$$

8)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $\widehat{C} = 35°$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos 35° = 74{,}105 \Rightarrow c = 8{,}61 \text{ cm}$$

9)

Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\widehat{A} = 80°$, $\widehat{B} = 40°$, $a = 8$ dm

b) $*\widehat{A} = 80°$, $a = 10$ m, $b = 5$ m

c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm

d) $*\widehat{A} = 75°$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

a) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{C} = 180° - 40° - 80° = 60°$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 80°} = 5{,}22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 80°} = 7{,}04 \text{ dm}$$

Área: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C} = 18{,}1 \text{ dm}^2$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b \operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{5 \operatorname{sen} 80}{10} = 0{,}492 \Rightarrow \widehat{B} = 29°\ 29'$$

$\widehat{C} = 180° - 80° - 29°\ 29' = 70°\ 31'$

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 70°\ 31' = 91{,}65 \Rightarrow c = 9{,}57 \text{ m}$$

Área: $S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = 23{,}56 \text{ m}^2$

c) Por el teorema del coseno:

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{225 + 400 - 100}{600} = 0{,}875 \Rightarrow \widehat{A} = 28^\circ\ 57'$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100 + 400 - 225}{400} = 0{,}6875 \Rightarrow \widehat{B} = 46^\circ\ 34'$$

$$\cos\widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 225 - 400}{300} = -0{,}25 \Rightarrow \widehat{C} = 104^\circ\ 29'$$

Área: $S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen}\ \widehat{B} = 72{,}6\ \text{cm}^2$

d) Por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cdot\cos 75^\circ = 158{,}31 \Rightarrow a = 12{,}58\ \text{mm}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\text{sen}\ \widehat{B} = \frac{b\ \text{sen}\ \widehat{A}}{a} = \frac{8\ \text{sen}\ 75^\circ}{12{,}58} = 0{,}614 \Rightarrow \widehat{B} = 37{,}88^\circ = 37^\circ\ 52'\ 45''$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 37{,}88^\circ = 67{,}12^\circ = 67^\circ\ 7'\ 12''$$

Área: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \text{sen}\ \widehat{A} = 46{,}36\ \text{mm}^2$

10)

Desarrolla en función de sen α y cos α la expresión de sen 3α.

$$\text{sen}\ 3\alpha = \text{sen}\ (\alpha + 2\alpha) = \text{sen}\ \alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos\alpha\cdot\text{sen}\ 2\alpha =$$
$$= \text{sen}\ \alpha\ (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) + \cos\alpha\ (2\text{sen}\ \alpha\ \ \cos\alpha) =$$
$$= \text{sen}\ \alpha\cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha + 2\text{sen}\ \alpha\cos^2\alpha = 3\text{sen}\ \alpha\ \ \cos^2\alpha - \text{sen}^3\alpha$$

11)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg}\ x = 1$

d) $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $\text{tg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\text{sen}\ x = 0$

h) $1 + \cos x = 0$

a) $\text{sen}\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

c) $\text{tg}\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

d) $\text{sen}\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

f) $\text{tg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

f) $\text{sen}\ x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k$

g) $1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 360^\circ k$

12)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\text{sen}\ 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}\ 3x = -1$

d) $\text{sen}\ \frac{x}{2} = 0$

e) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $\text{tg}\ \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\text{sen}\ 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$

d) $\text{sen}\ \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

e) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3} \end{cases}$ f) $\operatorname{tg} \dfrac{3x}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \dfrac{3x}{4} = \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10\pi}{9} + \dfrac{8\pi k}{3} \\ x = \dfrac{22\pi}{9} + \dfrac{8\pi k}{3} \end{cases}$

13)

(TIC) Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x = \cos x$ b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$ c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 0$ d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45° + 360° k \\ x = 225° + 360° k \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180° k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° k \\ x = 300° + 360° k \end{cases} \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + 360° k \\ x = 240° + 360° k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = 2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45° + 360° k$

14)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0°, 360°].

a) $\operatorname{tg} x + 4\operatorname{cotg} x = 5$ b) $8\cos 2x = 8\cos x - 9$ c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x$ d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{tg} x + 4\operatorname{cot} g\, x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \dfrac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4 = 5\operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 4 \Rightarrow x = 75°\ 58' \quad x = 255°\ 58' \\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45° \quad x = 225° \end{cases}$

b) $8\cos 2x = 8\cos x - 9 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8\operatorname{sen}^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\cos^2 x - 8 + 8\cos^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow 16\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = 75°\ 31' \ ; \ x = 284°\ 29'$

c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cot} g\, x \Rightarrow \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30°, x = 210° \\ x = 150°, x = 330° \end{cases}$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60°,\ x = 300° \\ x = 120°,\ x = 240° \end{cases}$

15)

(TIC) Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$

b) $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x - \cos x$

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x\left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \text{ no aporta soluciones} \end{cases}$

b) $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x\left(2 + \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6},\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$

16)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\widehat{C} = 40°$ c) $a = 3$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $c = 5$ cm e) $a = 30$ cm, $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{C} = 50°$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35°$ f) $b = 25$ cm, $\widehat{B} = 55°$, $C = 65°$

a) $\dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \dfrac{b \cdot \text{sen } \widehat{C}}{c} = \dfrac{20 \cdot \text{sen } 40°}{28} = 0{,}459 \Rightarrow \widehat{B} = 27°\ 20',\ \widehat{A} = 112°\ 40'$

$\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow a = \dfrac{c \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{C}} = \dfrac{28 \cdot \text{sen } 112°\ 40'}{\text{sen } 40°} = 40{,}2 \text{ cm}$

b) $\cos \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{81 + 1600 - 1681}{720} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90°$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{1681 + 1600 - 81}{3280} = 0{,}9756 \Rightarrow \widehat{B} = 12°\ 41'$

$\dfrac{\cos \widehat{C} = a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{1681 + 81 - 1600}{738} = 0{,}2195 \Rightarrow \widehat{A} = 77°\ 19'$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} = 9 + 25 - 30 \cos 30 = 8{,}0192 \Rightarrow b = 2{,}8318$ cm

$\dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{C} = \dfrac{c \cdot \text{sen } \widehat{B}}{b} = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 30°}{2{,}8318} = 8{,}8828 \Rightarrow \text{Dos soluciones } \begin{cases} \widehat{C} = 61°\ 59',\ \widehat{A} = 88°\ 1' \\ \widehat{C} = 118°\ 1',\ \widehat{A} = 31°\ 59' \end{cases}$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 144 + 225 - 360 \cos 35° = 74{,}1053 \Rightarrow c = 8{,}6084$ cm

$\dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \dfrac{b \cdot \text{sen } \widehat{C}}{c} = \dfrac{15 \cdot \text{sen } 35°}{8{,}6084} = 0{,}999 \Rightarrow \text{Dos soluciones } \begin{cases} \widehat{C} = 88°\ 5',\ \widehat{A} = 56°\ 55' \\ \widehat{C} = 91°\ 54',\ \widehat{A} = 53°\ 6' \end{cases}$

e) $\widehat{A} = 180° - 30° - 50° = 100°$

$\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{30 \cdot \text{sen } 50°}{\text{sen } 100°} = 23{,}34 \text{ cm}$

$\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a \cdot \text{sen } B}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{30 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 100°} = 15{,}23 \text{ cm}$

f) $\widehat{A} = 180° - 55° - 65° = 60°$

$\dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{25 \cdot \text{sen } 65°}{\text{sen } 55°} = 27{,}66$

$\dfrac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} \Rightarrow a = \dfrac{b \cdot \text{sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}} = \dfrac{25 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 55°} = 26{,}43 \text{ cm}$

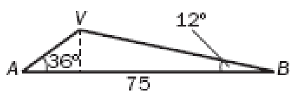
17)

Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

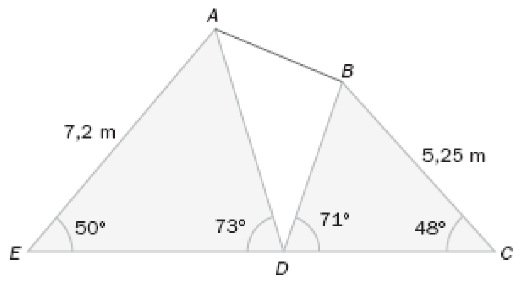
$\dfrac{VB}{\text{sen } 36°} = \dfrac{75}{\text{sen } 132°} \Rightarrow VB \approx 59 \text{ km}$

$\dfrac{VA}{\text{sen } 12°} = \dfrac{75}{\text{sen } 132°} \Rightarrow VA \approx 21 \text{ km} \qquad h = VB \ \ \text{sen } 12 \approx 12{,}3 \text{ km}$



18)

Calcula la distancia entre los puntos A y B.



$$\frac{AD}{\text{sen } 50°} = \frac{7{,}2}{\text{sen } 73°} \Rightarrow AD = 5{,}77$$

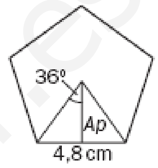
$$\frac{BD}{\text{sen } 48°} = \frac{9{,}25}{\text{sen } 71°} \Rightarrow BD = 7{,}27$$

$$AB^2 = 5{,}77^2 + 7{,}27^2 - 2{,} \cdot 5{,}77 \cdot 7{,}27 \cos(180° - 73° - 71°) = 18{,}27$$

$$AB = 4{,}27 \text{ m}$$

19)

Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.



El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm. El perímetro del pentágono 48 cm. Cada lado del pentágono mide 9,6 cm.

$$\text{tg } 36° = \frac{4{,}8}{Ap} \Rightarrow Ap = \frac{4{,}8}{\text{tg}36°} \approx 6{,}6 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{\textit{perímetro} \times Ap}{2} = \frac{48 \cdot 6{,}6}{2} \approx 158{,}56 \text{ cm}^2$$

20)

Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35°.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales.

$$S_t = \frac{1}{2} 10 \cdot 15 \cdot \text{sen}35° \qquad S_p = 10 \cdot 15 \cdot \text{sen}35° = 86{,}04 \text{ cm}^2$$

21)

Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de lados de un triángulo, e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) 12, 11 y 9 cm b) 23, 14 y 8 cm c) 26, 24 y 10 cm d) 40, 30 y 20 m

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \cos \widehat{A}$

$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}2929 \rightarrow \widehat{A} = 72°\ 57'\ 59{,}7'' \rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$

$\rightarrow \cos \widehat{A} = 0 \rightarrow \widehat{A} = 90° \rightarrow$ El triángulo es rectángulo.

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \widehat{A}$

$\rightarrow \cos \widehat{A} = -0{,}25 \rightarrow \widehat{A} = 104°\ 28'\ 39'' \rightarrow$ El triángulo es obtusángulo.

22)

En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.

Llamamos $a = 15$ m, $b = 10$ m y $c = 10$ m.

Utilizamos el teorema del coseno para obtener dos de sus ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \rightarrow 15^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{A}$

$\widehat{A} = 97°\ 10'\ 50{,}7''$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \rightarrow 10^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos \widehat{B}$

$\widehat{B} = 41°\ 24'\ 34{,}6''$

Usamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 97°\ 10'\ 50{,}7'' + 41°\ 24'\ 34{,}6'' + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{C} = 41°\ 24'\ 34{,}6''$

23)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10$ cm, $b = 14$ cm, $c = 8$ cm

b) $b = 6$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 39° \ 12'$

c) $a = 7$ cm, $\widehat{B} = 38° \ 49'$, $\widehat{C} = 66° \ 40'$

d) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $\widehat{B} = 36° \ 38'$

e) $a = 2{,}1$ cm; $b = 1{,}4$ cm; $c = 1{,}8$ cm

f) $a = 9$ cm, $c = 5$ cm, $\widehat{B} = 103° \ 27'$

g) $b = 8{,}3$ cm; $c = 9{,}1$ cm; $\widehat{C} = 112° \ 50'$

h) $c = 6$ cm, $\widehat{A} = 27° \ 42'$, $\widehat{B} = 98° \ 20'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-100 + 196 + 64}{2 \cdot 14 \cdot 8} =$$
$$= 0{,}7143$$

$\widehat{A} = 44° \ 24' \ 55{,}1''$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-196 + 100 + 64}{2 \cdot 10 \cdot 8} =$$
$$= -0{,}2$$

$\widehat{B} = 101° \ 32' \ 13''$

$\widehat{C} = 180° - 44° \ 24' \ 55{,}1'' - 101° \ 32' \ 13'' = 34° \ 2' \ 51{,}85''$

b) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 39° \ 12' \rightarrow a = 5{,}77 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 33{,}3 + 81}{2 \cdot 5{,}77 \cdot 9} =$$
$$= 0{,}7534$$

$\widehat{B} = 41° \ 4' \ 14{,}51'' \rightarrow \widehat{C} = 180° - 39° \ 12' - 41° \ 4' \ 14{,}51'' = 99° \ 43' \ 45{,}49''$

c) $\widehat{A} = 180° - 38° \ 49' - 66° \ 40' = 74° \ 31°$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 38° \ 49'} = \frac{7}{\operatorname{sen} 74° \ 31'} \rightarrow b = 4{,}55 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 66° \ 40'} = \frac{7}{\operatorname{sen} 74° \ 31'} \rightarrow c = 6{,}67 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{10}{\operatorname{sen} 36° \ 38'} = \frac{8}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \operatorname{sen}\widehat{A} = 0{,}4774$$

$\widehat{A} = 28° \ 30' \ 45{,}7''$

$\widehat{C} = 180° - 36° \ 38' - 28° \ 30' 45{,}7'' = 114° \ 51' \ 14{,}3''$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} 114° \ 51' \ 14{,}3''} = \frac{8}{\operatorname{sen} 28° \ 30' \ 45{,}7''} \rightarrow c = 15{,}21 \text{ cm}$$

e) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-4{,}41 + 1{,}96 + 3{,}24}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}8} =$$
$$= 0{,}1567$$

$\widehat{A} = 80° \ 58' \ 54{,}9''$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \rightarrow \cos\widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-1{,}96 + 4{,}41 + 3{,}24}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 1{,}8} =$$
$$= 0{,}7606$$

$\widehat{B} = 40° \ 29' \ 4{,}08''$

$\widehat{C} = 180° - 40° \ 29' \ 4{,}08'' = 58° \ 32' \ 1{,}02''$

f) Aplicamos el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \to b = \sqrt{81 + 25 - 90 \cdot \cos 103° 27'} = 11{,}27$ cm

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \frac{11{,}27}{\text{sen}\,103°\,27'} = \frac{9}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \text{sen}\,\widehat{A} = 0{,}7767$$

$\widehat{A} = 50°\,57'\,26{,}6'' \to \widehat{C} = 180° - 50°\,57'\,26{,}6'' - 103°\,27' = 25°\,35'\,33{,}4''$

g) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \to \frac{9{,}1}{\text{sen}\,112°\,50'} = \frac{8{,}3}{\text{sen}\,\widehat{B}} \to \text{sen}\,\widehat{B} = 0{,}8406$$

$\widehat{B} = 57°\,12'\,18{,}2'' \to \widehat{A} = 180° - 112°\,50' - 57°\,12'\,18{,}2'' = 9°\,57'\,41{,}8''$

$$a = \frac{9{,}1 \cdot \text{sen}\,91°\,57'\,41{,}8''}{\text{sen}\,112°\,50'} = 1{,}71 \text{ cm}$$

h) $\widehat{C} = 180° - 27°\,42' - 98°\,20' = 53°\,58'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \frac{6}{\text{sen}\,53°\,58'} = \frac{a}{\text{sen}\,27°\,42'} \to a = 3{,}45 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} \to \frac{6}{\text{sen}\,53°\,58'} = \frac{b}{\text{sen}\,98°\,20'} \to b = 7{,}34 \text{ cm}$$

24)

Encuentra las soluciones para estos triángulos.

a) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm

b) $a = 8$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 42°\,55'$

c) $a = 10$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 72°\,55'$

d) $b = 6$ cm; $c = 4{,}5$ cm; $\widehat{C} = 38°\,26'$

e) $c = 12$ cm, $\widehat{A} = 92°$, $\widehat{B} = 26°\,28'$

f) $a = 11$ cm, $b = 12$ cm, $\widehat{A} = 27°\,36'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0{,}7024$$

$\widehat{A} = 134°\,37'\,6''$

$$\cos \widehat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0{,}9097$$

$\widehat{B} = 24°\,31'\,58{,}8''$

$\widehat{C} = 180° - 24°\,31'\,58{,}8'' - 134°\,37'\,6'' = 20°\,50'\,55{,}2''$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \frac{9}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{8}{\text{sen}\,42°\,55'} \to \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}7661$$

$\widehat{C} = 50°\,2''$ $\qquad \widehat{B} = 180° - 42°\,55' - 50°\,2'' = 87°\,4'\,58''$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \frac{b}{\text{sen}\,87°\,4'\,58''} = \frac{8}{\text{sen}\,42°\,55'} \to b = 11{,}73 \text{ cm}$$

c) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \frac{9}{\text{sen}\,\widehat{C}} = \frac{10}{\text{sen}\,72°\,55'} \to \text{sen}\,\widehat{C} = 0{,}8603$$

$\widehat{C} = 59°\,20'\,57{,}2''$ $\qquad \widehat{B} = 180° - 59°\,20'\,57{,}2'' - 72°\,55' = 47°\,44'\,2{,}76''$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} \to \frac{b}{\text{sen}\,47°\,44'\,2{,}76''} = \frac{10}{\text{sen}\,72°\,55'} \to b = 7{,}74 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \to \frac{4,5}{sen\,38°\,26'} = \frac{6}{sen\,\widehat{B}} \to sen\,\widehat{B} = 0,8288$$

$\widehat{B} = 55°\,58'\,34,2''$

$\widehat{A} = 180° - 55°\,58'\,34,2'' - 38°\,26' = 85°\,35'\,25,8''$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{4,5}{sen\,38°\,26'} = \frac{a}{sen\,85°\,35'\,25,8''} \to a = 7,22 \text{ cm}$$

e) $\widehat{C} = 180° - 92° - 26°\,28' = 61°\,32'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \to \frac{12}{sen\,61°\,32'} = \frac{b}{sen\,26°\,28'} \to b = 6,08 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{12}{sen\,61°\,32'} = \frac{a}{sen\,92°} \to a = 13,64 \text{ cm}$$

f) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{12}{sen\,\widehat{B}} = \frac{11}{sen\,27°\,36'} \to sen\,\widehat{B} = 0,5054$$

$\widehat{B} = 30°\,21'\,31,8''$

$\widehat{C} = 180° - 30°\,21'\,31,8'' - 27°\,36' = 122°\,2'\,28,2''$

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \to \frac{c}{sen\,122°\,2'\,28,2''} = \frac{11}{sen\,27°\,36'} \to c = 20,13 \text{ cm}$$

25)

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $cos\ x\ tg\ x = \dfrac{1}{2}$

b) $cos\ 2x + sen\ 2x = 1$

c) $cos\ 2x - sen\ 2x = 0$

d) $sen\ 2x + cos\ x = 1$

e) $sen\ 2x + sen\ 2x = 0$

f) $tg\ x + sen\ x = 0$

g) $tg\ x - sen\ 2x = 0$

h) $\dfrac{sen\ (60° - x)}{cos\ x} = 1$

i) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x - 1 = 0$

j) $sen\ (x + 30°) + cos\ (x + 60°) = 1 + cos\ 2x$

a) $cos\ x\ tg\ x = \dfrac{1}{2} \to sen\ x = \dfrac{1}{2} \to \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) $cos\ 2x + sen\ 2x = 1 \to cos^2 x - sen^2 x + 2\ sen\ x \cdot cos\ x = cos^2 x + sen^2 x$

$\to -2\ sen^2 x + 2\ sen\ x \cdot cos\ x = 0 \to 2\ sen\ x\,(-sen\ x + cos\ x) = 0$

$sen\ x = 0 \to \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$sen\ x = cos\ x \to \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $cos\ 2x - sen\ 2x = 0 \to cos\ 2x = sen\ 2x \to \begin{cases} x_1 = 22,5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112,5° + 180° \cdot k \end{cases}$

d) $sen\ 2x + cos\ x = (2\ sen\ x + 1)\ cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k & x_3 = 210° + k \cdot 360° \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k & x_4 = 330° + k \cdot 360° \end{cases}$

e) $sen\ 2x + sen\ 2x = 0 \rightarrow 2\ sen\ 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180° \cdot k \\ x_2 = 90° + 180° \cdot k \end{cases}$

f) $tg\ x + sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x\left(\dfrac{1}{cos\ x} + 1\right) = 0$

$sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\dfrac{1}{cos\ x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180° + 360° \cdot k$

g) $tg\ x - sen\ 2x = 0 \rightarrow \dfrac{sen\ x}{cos\ x} - 2\ sen\ x \cdot cos\ x = 0 \rightarrow sen\ x(1 - 2\ cos^2 x) = 0$

$sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$1 - 2\ cos^2 x = 0 \rightarrow cos\ x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45° + 360° \cdot k$

h) $\dfrac{sen\ (60° - x)}{cos\ x} = 1 \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\ cos\ x - sen\ x}{2\ cos\ x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - tg\ x = 2$

$\rightarrow tg\ x = -0{,}2679 \rightarrow x = 345° + 360° \cdot k$

i) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{1 - tg\ x}{1 + tg\ x} + tg\ x - 1 = 0$

$\rightarrow tg^2 x - tg\ x = 0 \rightarrow tg\ x(tg\ x - 1) = 0$

$tg\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$tg\ x - 1 = 0 \rightarrow tg\ x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

j) $sen\ (x + 30°) + cos\ (x + 60°) = 1 + cos\ 2x$

$\rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\ sen\ x}{2} + \dfrac{cos\ x}{2} + \dfrac{cos\ x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\ sen\ x}{2} =$

$= cos^2 x + sen^2 x + cos^2 x - sen^2 x \rightarrow cos\ x = 2\ cos^2 x \rightarrow cos\ x(2\ cos\ x - 1) = 0$

$cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k \end{cases}$

$2\ cos\ x - 1 = 0 \rightarrow cos\ x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60° + 360° \cdot k \\ x_2 = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

26)

Resuelve la ecuación sen $2x$ = sen x.

sen $2x$ = sen $x \Leftrightarrow$ 2sen x cos x = sen $x \Leftrightarrow$ sen x(2cos $x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0° + k \cdot 180° \\ x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 300° + k \cdot 360° \end{cases}$

las soluciones del primer giro son 0°, 60°, 180° y 300°.

27)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\text{sen}\ 2x = 1$ **b)** $3\text{tg}\ 2x = \sqrt{3}$

c) $3\cos \frac{x}{2} = 1{,}5$ **d)** $5\text{sen}\ 4x = 0$

a) $2\text{sen}\ 2x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\ 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$2x = \begin{cases} 30° + k\cdot 360° \\ 150° + k\cdot 360° \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 15° + k\cdot 180° \\ 75° + k\cdot 180° \end{cases}$

Las soluciones del primer giro son: 15°, 75°, 195° y 255°.

b) $3\text{tg}\ 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{tg}2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\cdot\pi}{2}$

las soluciones del primer giro son $\frac{\pi}{12}$ (para $k = 0$), $\frac{7\pi}{12}$ (para $k = 1$), $\frac{13\pi}{12}$ (para $k = 2$) y $\frac{19\pi}{12}$ (para $k = 3$).

c) $3\cos\frac{x}{2} = 1{,}5 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 60° + k\cdot 360° \\ 300° + k\cdot 360° \end{cases} \Rightarrow$

$x = \begin{cases} 120° + k\cdot 720° \\ 600° + k\cdot 720° \end{cases} \Rightarrow$

Las soluciones *del primer giro de la variable* son: 120° y 600°.

d) $5\ \text{sen}\ 4x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\ 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + k\cdot\pi \Leftrightarrow x = 0 + k\cdot\frac{\pi}{4}$.

Las soluciones del primer giro son:

$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.

28)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\text{sen}(45° + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi \end{cases}$

$\Rightarrow x = \begin{cases} k\cdot 2\pi \\ \frac{10\pi}{6} + k\cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k\cdot 2\pi \end{cases}$

Las soluciones del primer giro: 0 y $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\text{sen}(45° + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45° + x = \begin{cases} 225° + k\cdot 360° \\ 315° + k\cdot 360° \end{cases}$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 180° + k\cdot 360° \\ 270° + k\cdot 360° \end{cases}$

Las soluciones del primer giro son 180° y 270°.

29)

22. Resuelve la ecuación: $\cos x = \text{sen}\ 2x$

$\cos x = \text{sen } 2x \Leftrightarrow \cos x = 2 \text{ sen } x \cos x \Leftrightarrow \cos x\ (1 - 2 \text{ sen } x) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0\pi \\ 1 - 2\text{sen}x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 90° + k\cdot 180° \\ \begin{cases} x = 30° + k\cdot 360° \\ x = 150° + k\cdot 360° \end{cases} \end{cases} \quad (k \in Z).$$

Las soluciones del primer giro son 90°, 270°, 30° y 150°.

30)

Resuelve la ecuación: tg $x = \sqrt{2}\cos x$

$\text{tg } x = \sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow \text{sen } x = \sqrt{2}\cos^2 x \Leftrightarrow$
$\text{sen } x = \sqrt{2}\ (1 - \text{sen}^2 x)$ que da lugar a la ecuación de segundo grado en sen x, $\sqrt{2}\ \text{sen}^2 x + \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$ cuyas soluciones son

$$\text{sen } x = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \text{ (imposible)} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 45° + k\cdot 360° \\ 135° + k\cdot 360° \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son 45° y 135°.

31)

25. Resuelve la ecuación: tg $2x = -$tg x

$$\text{tg } 2x = -\text{ tg } x \Leftrightarrow \frac{2\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} - \text{tg } x \Leftrightarrow \text{tg}^3 x - 3\text{tg } x = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } x(\text{tg}^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } x = 0 \\ \text{tg}^2 x - 3 = 0 \end{cases}$$

- Si tg $x = 0 \Rightarrow x = 0° + k\cdot 180°$
- Si $\text{tg}^2 x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \text{tg } x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si tg } x = +\sqrt{3} \Rightarrow \quad x = 60° + k\cdot 180° \\ \text{Si tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow \quad x = 120° + k\cdot 180° \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son: 0°, 180°, 60°, 240°, 120° y 300°.

32)

Resuelve la ecuación: sen $2x \cos x = 3$ sen$^2 x$

$\text{sen } 2x \cos x = 3 \text{ sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen } x \cos x.\ \cos x = 3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$
$2\text{sen } x \cos^2 x = 3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen } x(1 - \text{sen}^2 x) = 3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$
$2\text{sen } x - 2\text{sen}^3 x - 3\text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } x(2 - 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen } x) = 0.$

- Si sen $x = 0 \Rightarrow x = 0° + k\cdot 180°$.
- Si $2 - 2\text{sen}^2 x - 3\text{sen } x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x + 3\text{sen } x - 2 = 0$ que es una ecuación de 2° grado cuyas soluciones son $\text{sen } x \Rightarrow = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$. La solución sen $x = -2$ no es posible. Si

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30° + k\cdot 360° \\ 150° + k\cdot 360° \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Las soluciones del primer giro son 0°, 180°, 30° y 150°.

33)

Resuelve la ecuación: cos $2x + 5\cos x + 3 = 0$

$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$, ecuación de segundo grado en cos x,

cuya solución es $\cos x = \begin{cases} -1/2 \\ -2 \text{ (imposible)} \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \text{arc cos } (-1/2) = \begin{cases} 120° + k\cdot 360° \\ 240° + k\cdot 360° \end{cases} \Rightarrow (k \in Z)$$

Las soluciones del primer giro son 120° y 240°.

34)

Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63°$.

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 27^2 + 11^2 - 2\cdot 27\cdot 11\cdot \cos 63° \approx 580{,}33 \Rightarrow b = 24{,}09$ m.
De los dos ángulos que faltan por determinar, el menor es C por ser el opuesto al lado menor. Lo calculamos por el teorema del seno:

$$\frac{11}{\text{sen } C} = \frac{24{,}09}{\text{sen } 63°} \Rightarrow \text{sen } C = \frac{11\cdot\text{sen } 63°}{24{,}09} \text{ Por tanto } C = 24°\,0'\,26''$$

(un ángulo y su suplementario tienen el mismo seno. Así, C puede ser $24°\,0'\,26''$ o su suplementario, $180° - 24°\,0'\,26'' = 155°\,59'\,34''$. Pero como $c < b$ también ha de ser $C < B$, es decir $24°\,0'\,26''$).

Además 155º59'34'' + 63º > 180º

Por último $\hat{A} = 180° - (B + C) = 180° - (63° + 24°\,0'\,26'') = 92°\,59'\,34''$.

35)

Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54°$.

Por el teorema del seno

$$\frac{5}{\text{sen } A} = \frac{8}{\text{sen } 54°} \Rightarrow \text{sen } A = \frac{5\cdot\text{sen } 54°}{8} = 0{,}505635621.$$

De los dos ángulos que tienen este seno ($30°\,22'\,25''$ y su suplementario, $149°\,37'\,35''$) elegimos el menor, pues al ser $a < b$, será también $A < B$. Por tanto $A = 30°\,22'\,25''$.
El tercer ángulo vale $C = 180° - (\hat{A} + B) =$
$= 180° - (30°\,22'\,25'' + 54°) = 95°\,37'\,35''$.
El lado c se calcula por el teorema del seno:

$$c = \frac{b\cdot\text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{8\cdot\text{sen } 95°37'35''}{\text{sen } 54°} \approx 9{,}84 \text{ m}.$$

36)

Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30°$.

Por el teorema del seno:

$\frac{10}{\text{sen } 30°} = \frac{16}{\text{sen } B} \Rightarrow \text{sen } B = \frac{16 \cdot \text{sen } 30°}{10} = 0{,}8$. El ángulo B puede ser $53° 7' 48''$ o su suplementario, $126° 52' 12''$. Las dos soluciones son posibles, pues al ser $a < b$, la condición que tienen que cumplir es que $\hat{A} < B$. Hay por tanto dos soluciones:

Solución 1

$B_1 = 53° 7' 48''$

$C_1 = 180° - (\hat{A} + B_1) = 180° - (30° + 53° 7' 48'') = 96° 52' 12''$.

$\frac{10}{\text{sen } 30°} = \frac{c_1}{\text{sen } 96°52'12''} \Rightarrow$

$c_1 = \frac{10 \cdot \text{sen } 96°52'12''}{\text{sen } 30°} \approx 19{,}86$ cm.

Solución 2

$B_2 = 126° 52' 12''$

$C_2 = 180° - (\hat{A} + B_2) = 180° - (30° + 126° 52' 12'') = 23° 7' 48''$.

$\frac{10}{\text{sen } 30°} = \frac{c_2}{\text{sen } 23°7'48''} \Rightarrow$

$c_2 = \frac{10 \cdot \text{sen } 23°7'48''}{\text{sen } 30°} \approx 7{,}86$ cm.

37)

Resuelve el triángulo *ABC* del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow$

$6^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\cos A = \frac{241}{252} = 0{,}956349206$, luego $\hat{A} = 16° 59' 29''$.

Análogamente calculamos el ángulo B:

$9^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos B \Rightarrow$

$\cos B = \frac{151}{168} = 0{,}898809523$, luego $B = 25° 59' 53''$.

Por último, $C = 180° - (\hat{A} + B) = 137° 0' 38''$.