1. EL ÁLGEBRA: ¿PARA QUÉ SIRVE?

Llamamos **álgebra** a la parte de las matemáticas en la que se utilizan letras para expresar números de valor desconocido o indeterminado.
El lenguaje algebraico facilita la construcción de los procesos matemáticos.

Ejemplo: En la imagen de la izquierda.
¿Qué representa la expresión algebraica $\frac{x-500}{30}$?

A continuación, se exponen algunas de las aplicaciones del álgebra:

1) Para expresar propiedades de las operaciones aritméticas.

Ejemplo: la propiedad distributiva dice "el producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos parciales del número por cada sumando" que en lenguaje algebraico sería $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2) Para expresar la relación entre variables relativas a distintas magnitudes (fórmulas).

Ejemplo: en un tema anterior demostramos la fórmula del interés bancario simple $I = c \cdot r \cdot t$

3) Para manejar números de valor indeterminado y sus operaciones (expresiones algebraicas).

Ejemplo 1: "el doble del siguiente número" sería la expresión algebraica $2 \cdot (x+1)$

Ejemplo 2: "el cuadrado del número más el triple del número" sería $x^2 + 3 \cdot x$

4) Para expresar relaciones que facilitan la resolución de problemas (ecuaciones).

Ejemplo: Laura gasta la mitad de su paga en el cine y la tercera parte en un bocadillo. Así, solo le quedan dos euros. ¿Cuánto tenía de paga?.
Para resolver el problema planteamos una ecuación. La incógnita es lo que recibe Laura de paga y la llamamos "x" .
Entonces "x" tiene que verificar la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = x$.
En el tema siguiente aprenderás a resolver ecuaciones.
Comprueba que la solución es $x = 12\,€$

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

¿Qué es? Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos entre sí por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y por paréntesis.

> **Ejemplos**: $3+2\cdot x^2-x$ o $x\cdot y-32\cdot(x\cdot y^2-y)$ son dos expresiones algebraicas.

El signo de multiplicar se sobreentiende delante de una letra o un paréntesis.

> Los **ejemplos** anteriores los escribiremos así: $3+2x^2-x$ o $xy-32(xy^2-y)$

Empecemos estudiando las más sencillas: **los monomios**.

3. MONOMIOS

¿Qué son? Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o más variables. Al número lo llamaremos **coeficiente** y al conjunto de las variables, **parte literal**.

Llamaremos **grado del monomio** a la suma de los exponentes de su parte literal y **grado respecto de una variable**, al exponente de esa variable.

> **Ejemplo 1:** El monomio $3a$ tiene como coeficiente "3", parte literal "a" y es de grado "1".
>
> **Ejemplo 2:** El monomio $\frac{2}{3}xy^2$ tiene como coeficiente "$\frac{2}{3}$", parte literal "xy^2", es de grado "3" y el grado respecto la variable "y" es "2".

Se dice que dos monomios son **semejantes** cuando tienen la parte literal idéntica

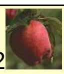
> **Ejemplo 1:** Los monomios "$3a^2b$" y "$7a^2b$" son semejantes porque tienen la misma parte literal "a^2b".
>
> **Ejemplo 2:** Los monomios "$3ab$" y "$7a^2b$" no son semejantes porque no tienen la misma parte literal.

Suma de monomios:

Dos monomios solo se pueden sumar si son semejantes. En ese caso, se suman los coeficientes, dejando la misma parte literal.

Si los monomios no son semejantes, la suma queda indicada y esta operación no puede expresarse de manera más simplificada.

El siguiente ejemplo con peras y manzanas puede aclararte cuando dos monomios se pueden sumar:

> 3  +2  = 5  pero en cambio 3  +2  no es igual a 5 peras ni a 5 manzanas

> **Ejemplos:**
>
> **a)** $5a+2a=7a$
>
> **b)** $8x^2-3x^2=5x^2$
>
> **c)** $3x+2x^2$ no puede simplificarse
>
> **d)** $a^2-a+a^2=2a^2-a$

Multiplicación de monomios.

El producto de dos monomios es un monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales (recuerda la propiedad: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$).

Ejemplos:

a) Multiplica los monomios "$3a^2b$" y "$2a$". Es $(3a^2b)\cdot(2a)=(3\cdot 2)a^2ba=6a^{2+1}b=6a^3b$

b) $(-3x^2)\cdot(\frac{5}{6}x^3y^2)=(-3\cdot\frac{5}{6})x^2x^3y^2=\frac{-15}{6}x^{2+3}y^2=-\frac{5}{2}x^5y^2$

c) $(2x^4y)^3=(2x^4y)\cdot(2x^4y)\cdot(2x^4y)=(2^3)x^4yx^4yx^4y=2^3x^{12}y^3=8x^{12}y^3$ o bien
$(2x^4y)^3=2^3(x^4)^3y^3=2^3x^{12}y^3=8x^{12}y^3$

División de monomios.

El cociente de dos monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción algebraica.

Ejemplos:

a) $(6a^2b):(3a^2b)=\frac{6\cancel{a^2}\cancel{b}}{3\cancel{a^2}\cancel{b}}=\frac{6}{3}=2$ (un número)

b) $(6x^5y):(15x^3)=\frac{6x^5y}{15x^3}=\frac{3\cdot 2\cdot x^3x^2y}{3\cdot 5\cdot x^3}=\frac{2}{5}x^2y$ (un monomio)

c) $(6x^5y):(2x^3y^2)=\frac{6x^5y}{2x^3y^2}=\frac{3\cdot 2\cdot x^3x^2y}{2\cdot x^3y\,y}=3\frac{x^2}{y}$ (es una fracción algebraica pero no un monomio)

4. POLINOMIOS

¿Qué son? Un **polinomio** es la suma de varios monomios no semejantes también llamados términos del polinomio.

Los **coeficientes** del polinomio son los números que multiplican a cada monomio.

Si uno de los monomios no tiene parte literal se llama **término independiente**.

El mayor grado de todos los monomios se llama **grado** del polinomio.

Nombramos los polinomios con una letra mayúscula y entre paréntesis las variables que lo integran.

Ejemplo 1: El polinomio $P(x)=x^5+2x-4$ tiene una variable (la "x"), es de grado 5, los coeficientes son el 1, el 2 y el –4 y el término independiente es –4.
Este polinomio también se llama trinomio porque tiene tres monomios o términos.

Ejemplo 2: El polinomio $Q(a,b)=4a^2b-5a$ tiene dos variables (la "a" y la "b"), es de grado 3, los coeficientes son 4 y –5, no hay término independiente.
Este polinomio también se llama binomio porque tiene dos monomios o términos.

El valor **numérico** de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir la variables o variables por números concretos y efectuar las operaciones.

Los números cuyo valor numérico en el polinomio es cero se llaman **raíces** del polinomio.

Ejemplo 1: Dado el polinomio $P(x)=x^2-5x+6$, el valor numérico para $x=-1$ es el número $P(-1)=(-1)^2-5\cdot(-1)+6=12$ y para $x=2$ el valor numérico es $P(2)=(2)^2-5\cdot(2)+6=0$.
Observa que el número "2" es una raíz del polinomio $P(x)=x^2-5x+6$.

Ejemplo 2: Dado el polinomio $Q(x,y)=3x^2y-5x+6y$, el valor numérico para $x=2$, $y=-1$ es el número $Q(2,-1)=3\cdot 2^2\cdot(-1)-5\cdot 2+6\cdot(-1)=-12-10-6=-28$.

5. SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para sumar dos o más polinomios o bien restar dos polinomios tendremos en cuenta lo que ya sabemos sobre la suma y resta de monomios.

Ejemplo 1: Dados los polinomios $A = 2x^3 - 3x^2 + 6$ y $B = x^2 - 5x + 4$ de una sola variable, halla su suma:

Es $A + B = (2x^3 - 3x^2 + 6) + (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 + x^2 - 5x + 4 = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10$

(hemos sumado los monomios semejantes.

También se puede sumar colocando los polinomios uno debajo del otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes. Observa la imagen

$$\begin{array}{rl} A \rightarrow & 2x^3 - 3x^2 + 0x + \ 6 \\ B \rightarrow & \qquad\quad x^2 - 5x + \ 4 \\ \hline A + B \rightarrow & 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \end{array}$$

Ejemplo 2: Dados los polinomios $A = 2x^3 - 3x^2 + 6$ y $B = x^2 - 5x + 4$ de una sola variable, halla la resta $A - B$:

Es $A - B = (2x^3 - 3x^2 + 6) - (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 - x^2 + 5x - 4 = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2$ (el signo menos delante del paréntesis cambia de signo todos los términos del polinomio B; después hemos sumado los monomios semejantes).

También se puede sumar colocando los polinomios uno debajo del otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes y cambiando de signo los término del sustraendo. Observa la imagen

$$\begin{array}{rl} A \rightarrow & 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ -B \rightarrow & \qquad\ - x^2 + 5x - 4 \\ \hline A - B \rightarrow & 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

6. PRODUCTO DE POLINOMIOS

6.1. PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN NÚMERO

Recuerda que para multiplicar un número por una suma, debemos multiplicar el número por cada sumando.
Es la propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo: $5 \cdot (2x^3 - 3x - 4) = 10x^3 - 15x - 20$

6.2. PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Observa el siguiente ejemplo en el que se vuelve a aplicar la propiedad distributiva.

Ejemplo: $5x^2 \cdot (2x^3 - 3x - 4) = 10x^5 - 15x^3 - 20x^2$

6.3. PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS

Combinando los productos de un polinomio por un número y por un monomio, como hemos visto más arriba, podemos calcular el producto de dos polinomios.

Para calcular el producto de dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y se suman los monomios obtenidos, reduciendo los que sean semejantes.

Ejemplo: Realiza el producto $(x^3-4x^2+5x-1)\cdot(x^2-3x+2)$

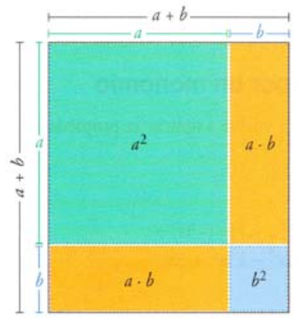
$$\begin{array}{r} x^3-4x^2+5x-1 \\ \times\quad x^2-3x+2 \\ \hline 2x^3-\ 8x^2+10x-2 \\ -3x^4+12x^3-15x^2+\ 3x \quad \\ x^5-4x^4+\ 5x^3-\ x^2 \qquad\quad \\ \hline x^5-7x^4+19x^3-24x^2+13x-2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} (x^3-4x^2+5x-1)\cdot(x^2-3x+2)= \\ =(x^3-4x^2+5x-1)\cdot x^2+ \\ +(x^3-4x^2+5x-1)\cdot(-3x)+ \\ +(x^3-4x^2+5x-1)\cdot 2 \end{cases}$$

$$(x^3-4x^2+5x-1)\cdot(x^2-3x+2)=x^5-7x^4+19x^3-24x^2+13x-2$$

En el próximo curso estudiarás la división de polinomios.

7. Productos notables

Llamamos productos notables a ciertos productos de binomios cuya memorización resulta útil para abreviar los cálculos con expresiones algebraicas.



Interpretación gráfica del cuadrado de la suma

7.1. Cuadrado de una suma

Se verifica $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Para demostrarlo basta multiplicar:

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$ pues es $ab=ba$

Se lee: "*El cuadrado de una suma es igual ... al cuadrado del primer sumando .... más el doble del primero por el segundo ... más el cuadrado del segundo*".

Ejemplo 1: $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$

Ejemplo 2: $(2+3x)^2=2^2+2\cdot 2\cdot 3x+(3x)^2=4+12x+9x^2$

7.2. Cuadrado de una diferencia

Se verifica $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Para demostrarlo basta multiplicar:

$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$ pues es $ab=ba$

Se lee: "*El cuadrado de una diferencia es igual ... al cuadrado del primer sumando .... menos el doble del primero por el segundo ... más el cuadrado del segundo.*"

Ejemplo 1: $(x-1)^2=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2=x^2-2x+1$

Ejemplo 2: $(x^2-3x)^2=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 3x+(3x)^2=x^4-6x^3+9x^2$

7.3. Suma por diferencia

Se verifica $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$. Para demostrarlo basta multiplicar:

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-\cancel{a}b+\cancel{b}a-b^2=a^2-b^2$

Se lee: "*La suma de dos monomios por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados*"

Ejemplo 1: $(x+2)\cdot(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$

Ejemplo 2: $(3-4x)\cdot(3+4x)=3^2-(4x)^2=9-16x^2$

8. APLICACIONES DE LOS PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables se aplican, entre otras situaciones de cálculo, en la descomposición de polinomios en factores y en la simplificación de fracciones algebraicas.

Ejemplos:

a) Descomponemos en factores el polinomio x^2-4x+4:

$$x^2-4x+4=\underbrace{x^2}_{\text{CUADRADO DEL PRIMERO}}-\underbrace{2\cdot 2\cdot x}_{\text{DOBLE DEL PRIMERO POR EL SEGUNDO}}+\underbrace{2^2}_{\text{CUADRADO DEL SEGUNDO}}=(x-2)^2$$

b) Descomponemos en factores x^2-4:

$$x^2-4=\underbrace{x^2-2^2}_{\text{DIFERENCIA DE CUADRADOS}}=(x+2)\cdot(x-2)$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS = SUMA · DIFERENCIA

c) Simplificamos la fracción $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$:

$$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{x+2}{x-2}$$

9. EXTRACCIÓN DE FACTOR COMÚN

Consiste en aplicar la propiedad distributiva pero al revés de como la utilizamos cuando multiplicamos, es decir:

$$p\cdot a+p\cdot b+p\cdot c+\cdots=p\cdot(a+b+c+\cdots)$$

El monomio " p " que se extrae tiene como coeficiente el MCD de los coeficientes y como parte literal, las variables comunes elevadas al menor exponente.

Ejemplos:

a) $3x-3y=3(x-y)$ **b)** $6x^2+8x=2x(3x+4)$ **c)** $12x^3+18x^2=6x^2(2x+3)$

d) $12x^2-4x=4x(3x-1)$ **e)** $12x^3-4x^2+x=x(12x^2-4x+1)$ **f)** $6x^2y+9xy^2=3xy(2x+3y)$

La extracción de factor común se emplea, entre otras situaciones de cálculo, en la descomposición de polinomios en factores y en la simplificación de fracciones algebraicas.

Ejemplos:

a) $\dfrac{5a+5b}{a^2+ab}=\dfrac{5\cdot\cancel{(a+b)}}{a\cdot\cancel{(a+b)}}=\dfrac{5}{a}$

b) $\dfrac{x^3}{x^2+x^3}=\dfrac{\cancel{x^2}\cdot x}{\cancel{x^2}\cdot(1+x)}=\dfrac{x}{1+x}$

c) $\dfrac{m^3-mn}{m^2-n^2}=\dfrac{m\cdot\cancel{(m-n)}}{(m+n)\cdot\cancel{(m-n)}}=\dfrac{m}{m+n}$