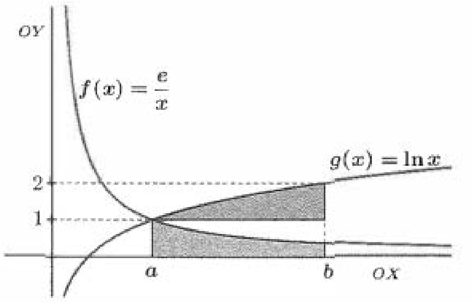
Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



Solución:

El valor $x=a$ es donde ambas funciones se cortan $f(a)=g(a)=1$:

$$\frac{e}{a}=1\ ;$$

$$\boxed{a=e}$$

Por otro lado observamos que $g(b)=2$:

$$\ln b=2\ ;$$

$$\boxed{b=e^2}$$

El área bajo la curva $y=f(x)$ es:

$$\int_e^{e^2}\frac{e}{x}\,dx=\Big[e\ln|x|\Big]_e^{e^2}=e\ln|e^2|-e\ln|e|=$$
$$=2e-e=\boxed{e\text{ u.a.}}$$

Al área bajo la curva de g es la siguiente integral menos el rectángulo de base $b-a$ y de altura 1:

$$\int_e^{e^2}\ln|x|\,dx$$

Esta integral se calcula con el método de integración por partes:

$$\int_e^{e^2}\ln|x|\,dx=\Big[x\ln x-x\Big]_e^{e^2}=$$
$$=(e^2\ln e^2-e^2)-(e\ln e-e)=e^2$$

El área del rectángulo es:

$$(e^2-e)\cdot 1=e^2-e$$

Restando estos dos resultados obtenemos el área sombreada de arriba:

$$e^2-(e^2-e)=\boxed{e\text{ u.a.}}$$

Dada la función $f(x)=\frac{ax}{3x^2+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0)=0$ y $F(1)=\frac{4}{3}\cdot\ln(4)$, donde F denota una primitiva de *f*.
b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre x=-1 y x=1.

Solución:

a) Observamos que la integral $\int f(x)$ es inmediata de tipo logarítmico (recordar la tabla de integrales inmediatas):

$$F(x)=\int\frac{ax}{3x^2+1}\,dx=\frac{a}{6}\int\frac{6x}{3x^2+1}\,dx=\frac{a}{6}\cdot\ln|3x^2+1|+k$$

Tenemos que $F(0)=0$:

$$F(0)=\frac{a}{6}\cdot\ln|3\cdot 0^2+1|+k=0\ ;$$

$$k=0$$

Y tenemos que $F(1)=\dfrac{4}{3}\cdot\ln(4)$. Sabemos que *k*=0:

$$F(1)=\frac{a}{6}\cdot\ln|3\cdot 1^1+1|+0=\frac{4}{3}\cdot\ln(4)\ ;$$

$$\frac{a}{6}\cdot\ln(4)=\frac{4}{3}\cdot\ln(4)\ ;$$

$$\frac{a}{6}=\frac{4}{3}\ ;$$

$$a=\frac{24}{3}\ ;$$

$$\boxed{a=8}$$

b) Dada la función racional $f(x)=\frac{8x}{3x^2+1}$ sabemos que su dominio es $\mathbb{R}$ ya que el denominador $3x^2+1$ no se anula para ningún valor real. Además, tiene simetría impar ya que:

$$f(-x)=\frac{8(-x)}{3(-x)^2+1}=-\frac{8x}{3x^2+1}=-f(x)$$

Para representar gráficamente la función tenemos que calcular al menos:

1. Puntos de corte con los ejes:

   - Punto de corte con el eje *x* (*y*=0):
     $\dfrac{8x}{3x^2+1}=0\ ;$
     $8x=0\ ;$
     $x=0$
     Corta al eje *x* en el punto (0,0). También es punto de corte con el eje *y* (*x*=0).

2. Asíntotas:

   - Asíntota vertical no tiene ya que el dominio de *f* es $\mathbb{R}$.
   - Asíntota horizontal:
     $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{3x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{3x}=0$
     f tiene asíntota horizontal de ecuación *y*=0.
   - No tiene asíntota oblicua.

3. Monotonía:

   Comenzamos calculando los puntos críticos de *f*:
   $f'(x)=\dfrac{8(3x^2+1)-8x(6x)}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{24x^2+8-48x^2}{(3x^2+1)^2}=0\ ;$

   $-24x^2+8=0\ ;$

   $x^2=\dfrac{1}{3}\ ;$

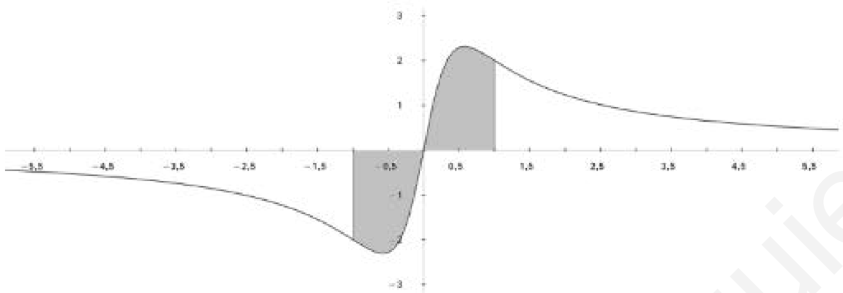
   $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Con estos puntos críticos estudiamos la monotonía de f en la siguiente tabla:

x	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
Monotonía $f(x)$	Decrece	Crece	Decrece

- f crece en $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$
- f decrece en $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
- f tiene un mínimo en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f(-\frac{\sqrt{3}}{3})) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$
- f tiene un máximo en $(\frac{\sqrt{3}}{3}, f(\frac{\sqrt{3}}{3})) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3})$

Con todos estos datos podemos hacer un esbozo semejante a la siguiente gráfica:



Hemos de calcula el área de la región sombreada. Al ser una función impar el área buscada es:

$$2\int_0^1 \frac{8x}{3x^2+1}\,dx = 2 \cdot \frac{8}{6} \cdot \ln|3x^2+1|\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{8}{3}\Big(\ln(3 \cdot 1^1 + 1) - \ln(3 \cdot 0^2 + 1)\Big) =$$
$$= \boxed{\frac{8}{3}\ln(4) \text{ u.a.}}$$