

1. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+2}{x^2-x-2} & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
2. Responde a las siguientes cuestiones:
- a) Determina la monotonía y los extremos relativos de $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$
- b) Determina la curvatura y los puntos de inflexión y de $f(x) = x \cdot e^{1-2x}$
3. Determina a y b para que $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + 1 & \text{si } x < 2 \\ b + \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea continua y derivable en su dominio.
4. Halla a y b sabiendo que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tiene un punto de inflexión en $x = -1$ y que la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es paralela a $r: 5x + y + 1 = 0$
5. Responde a las siguientes cuestiones:
- a) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ en el punto de abscisa $x = -1$.
- b) Determina el valor de a para que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - ax + 3}) = -\frac{1}{2}$

EJERCICIO 1

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \begin{matrix} x=2 \\ x=-1 \end{matrix}$$

$$* \text{ Dom } \left(y = \frac{2x+2}{x^2-x-2} \right) = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \neq 0 \right\} \downarrow \mathbb{R} - \{-1, 2\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{(-\infty, 0) - \{-1\} \in \text{Dom}(f)}$$

$$* \text{ Dom}(y = e^{-x} - 2) = \mathbb{R} \rightarrow \underline{[0, +\infty) \in \text{Dom}(f)}$$

$$\text{Por tanto, } \underline{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

- Las funciones parciales son continuas en su dominio por ser racional y exponencial $\rightarrow f(x)$ es continua en su dominio salvo quizás en $x=0$.

Tenemos que clasificar la discontinuidad de $x=-1$ y estudiar que ocurre en $x=0$.

$$x = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-x-2} = \left[\frac{0}{0} \text{ (I)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cdot (x+1)}{(x+1)(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Factorizamos

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= -\frac{2}{3} \\ \nexists f(-1) \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{f(x) \text{ presenta en } x=-1 \text{ una discontinuidad evitable}}$$

$$x=0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+2}{x^2-x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - 2) = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1}$$

$$* f(0) = e^0 - 2 = -1 \rightarrow \underline{\exists f(0) = -1}$$

$$* \underline{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)}$$

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } x=0} \quad \left(\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \exists f(0) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \right)$$

Solución

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

$x=1$ discontinuidad evitable

EJERCICIO 2

$$a) f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$* \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{x / (x+1)^2 = 0\} \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$f(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser racional.

$$* f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) \cdot [3x^2 \cdot (x+1) - 2x^3]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3} \rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

Puntos críticos $\begin{cases} x \in \text{Dom}(f) / \nexists f'(x) \rightarrow \text{No hay} \\ x \in \text{Dom}(f') / f'(x) = 0 \rightarrow x=0, x=-3 \end{cases}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3} = 0 \rightarrow x^3 + 3x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

* Estudiamos el signo de $f'(x)$

	$-\infty$	-3	-1	0	$+\infty$
Signo $f'(x)$	+	-	+	+	
$f(x)$ es	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

$f(x)$ crece si $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

$f(x)$ decrece si $x \in (-3, -1)$

$(-3, f(-3)) = (-3, -\frac{27}{4})$ máximo relativo

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3+1)^2} = -\frac{27}{4} \end{array}$$

b) $f(x) = x \cdot e^{1-2x}$

* $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser producto de funciones continuas.

* $\boxed{f'(x) = 1 \cdot \underline{e^{1-2x}} + x \cdot (-2) \cdot \underline{e^{1-2x}} = \underline{e^{1-2x} \cdot (1-2x)}}$

$$f''(x) = \underline{e^{1-2x}} \cdot (-2) \cdot (1-2x) + \underline{e^{1-2x}} \cdot (-2)$$

$$f''(x) = e^{1-2x} \cdot (-2 + 4x - 2) \Rightarrow \boxed{f''(x) = e^{1-2x} \cdot (4x - 4)}$$

$$\begin{cases} x \in \text{Dom}(f) / \nexists f''(x) \rightarrow \text{no hay} \\ x \in \text{Dom}(f'') / f''(x) = 0 \rightarrow \textcircled{x=1} \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{1-2x} \cdot (4x - 4) = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow \textcircled{x=1}$$

$\uparrow$
 $e^A > 0 \forall A$

	$-\infty$	1	$+\infty$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$ es			

$f(x)$ es cóncava hacia abajo si $x \in (-\infty, 1)$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba si $x \in (1, +\infty)$

$(1, f(1)) = (1, 1/e)$ punto de inflexión

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ f(1) = 1 \cdot e^{1-2 \cdot 1} = e^{-1} = 1/e \end{array}$$

EJERCICIO 3

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + 1 & \text{si } x < 2 \\ b + \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dom}(y = 2x^2 + ax + 1) = \mathbb{R} \quad \forall a \rightarrow (-\infty, 2) \in \text{Dom}(f) \\ \text{Dom}(y = b + \ln(x-1)) = \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0\} = (1, +\infty) \rightarrow [2, +\infty) \in \text{Dom}(f) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad \forall a, b}$$

Las funciones parciales son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ por ser polinómica y logarítmica $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua y derivable en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \quad \forall a, b$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Tenemos que hallar a y b para que $f(x)$ también sea continua y derivable en $(x=2)$.

CONTINUIDAD

$$f(x) \text{ es continua en } x=2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + ax + 1) = 8 + 2a + 1 = 2a + 9 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} b + \ln(x-1) = b + \underbrace{\ln 1}_0 = b \\ f(2) &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2a + 9 &= b \\ 2a - b &= -9 \end{aligned}$$

DERIVABILIDAD

$$f(x) \text{ es derivable en } x=2 \Leftrightarrow f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + a) = 8 + a \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 8 + a &= 1 \\ a &= -7 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\left. \begin{aligned} 2a - b &= -9 \\ a &= -7 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} 2 \cdot (-7) - b &= -9 \\ -14 + 9 &= b \\ -5 &= b \end{aligned}$$

Solución

$f(x)$ es continua y derivable en su dominio si $a = -7$ y $b = -5$

EJERCICIO 4

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

* $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es continua y derivable en su dominio.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x + 2a$$

* $x = -1$ punto de inflexión $\rightarrow f''(-1) = 0 \rightarrow$

$$\Rightarrow 6 \cdot (-1) + 2a = 0 \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3$$

* Recta tg en $x = 2$ paralela a $r: y = -5x - 1 \rightarrow$

$$\Rightarrow m_t = m_r \Rightarrow f'(2) = -5 \Rightarrow 3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) + b = -5$$

$$12 + 4a + b = -5$$

$$4a + b = -17$$

$$a = 3$$

$$4a + b = -17 \rightarrow 12 + b = -17 \rightarrow b = -29$$

Solución

$$\boxed{a = 3 \text{ y } b = -29}$$

EJERCICIO 5

a) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$

* Punto de tangencia $P(-1, f(-1)) \rightarrow P(-1, 2)$

$$f(-1) = \sqrt{5 - (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

* Pendiente $m_t = f'(-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$\rightarrow m_t = \frac{-(-1)}{\sqrt{5 - (-1)^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow m_t = \frac{1}{2}$$

* Recta tangente $y = 2 + \frac{1}{2} \cdot (x+1)$

$$y = 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - ax + 3}) = [\infty - \infty (I)] =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2 - ax + 3})(2x + \sqrt{4x^2 - ax + 3})}{2x + \sqrt{4x^2 - ax + 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{4x^2 - ax + 3})^2}{2x + \sqrt{4x^2 - ax + 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + ax - 3}{2x + \sqrt{4x^2 - ax + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - 3}{2x + \sqrt{4x^2 - ax + 3}} =$$

$$= \left[\frac{+\infty}{+\infty} \text{ (I)} \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dividimos numerador} \\ \text{y denominador por } x}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{2x}{x} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{ax}{x^2} + \frac{3}{x^2}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simplificamos}}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a - \frac{3}{x}}{2 + \sqrt{4 - \frac{a}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{a}{2+2} = \frac{a}{4}$$

Luego $\frac{a}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$