1.3 - MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

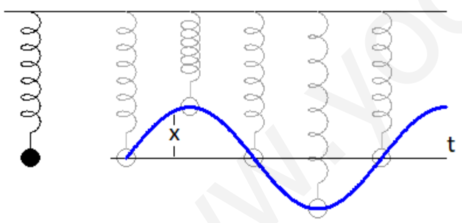
Movimiento periódico. Decimos que un movimiento es *periódico* cuando se repite de forma idéntica cada cierto intervalo de tiempo. En un movimiento periódico:

- Llamamos *periodo o tiempo de un ciclo* T al menor intervalo de tiempo que tarda en repetirse el movimiento. Así, para todo instante de tiempo t se verifica que $x(t) = x(t+T)$. El periodo se mide en segundos en el SI.
- Llamamos *frecuencia* f al número de ciclos que transcurren en cada unidad de tiempo; es, por tanto, la inversa del periodo. La frecuencia se mide en hercios (Hz, s^{-1}).

Movimiento armónico simple (MAS). Llamamos movimiento armónico simple MAS a aquel MR cuya aceleración (en x) en todo instante es igual a $-\omega^2$ multiplicada por su posición, donde ω es una constante positiva.

$$MAS = MR + [a_x = -\omega^2 x]\,,$$
siendo ω una cte positiva

Este movimiento se da, por ejemplo, cuando primero deformamos y luego soltamos un muelle. Esto es, un MAS es un movimiento rectilíneo de vaivén.



Las ecuaciones del MAS son las siguientes:

$$x = A \cdot sen(\omega t + \phi_0)$$
$$v_x = A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$$
$$a_x = -A\omega^2 \cdot sen(\omega t + \phi_0)$$
$$a_x = -\omega^2 x$$
$$x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$$
$$\left(\frac{a_x}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

Donde:

El parámetro A se conoce como *amplitud* o *elongación máxima*; es positivo y se mide en m en el SI.

El parámetro ω se conoce como *pulso*, *pulsación* o *frecuencia angular*; es positivo y se mide en rad/s en el SI.

El parámetro ϕ_0 se conoce como *fase inicial*; su valor es real y se mide en radianes en el SI. Se suele dar su valor en el intervalo (-π rad, π rad] o en el intervalo [0 rad, 2π rad).

La posición x también se conoce como *elongación*, mientras que $\omega t + \phi_0$ se conoce como *fase*. Tanto la elongación como la fase no son parámetros, sino que dependen del tiempo.

<u>*Demostración de las ecuaciones del MAS*</u>. Vamos a probar a partir de la expresión de la posición en función del tiempo de un MAS $x = A \cdot sen(\omega t + \phi_0)$ y de la definición de velocidad y de aceleración las demás expresiones.

Notar que A, ω y ϕ_0 son constantes y que t es la variable independiente.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(A \cdot sen(\omega t + \phi_0)\right)' = A \cdot cos(\omega t + \phi_0) \cdot \omega = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \phi_0)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \phi_0))' = A\omega\left(-sen(\omega t + \phi_0)\right)\omega = -A\omega^2 sen(\omega t + \phi_0)$$

$$a_x = -A\omega^2 sen(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 A sen(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x\,.$$

Vamos con la expresión $x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$. Tenemos, $x = Asen(\omega t + \phi_0)$ y $\frac{v_x}{\omega} = Acos(\omega t + \phi_0)$. Elevamos ambas expresiones al cuadrado y después las sumaremos obteniendo:

$$x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2 sen^2(\omega t + \phi_0) + A^2 cos^2(\omega t + \phi_0) = A^2[sen^2(\omega t + \phi_0) + cos^2(\omega t + \phi_0)] = A^2$$

Vamos con la expresión $\left(\frac{a_x}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$. Para ello despejamos x de la ecuación $a_x = -\omega^2 x$, obteniendo $x = \frac{-a_x}{\omega^2}$. Ahora sustituimos lo anterior en la ecuación $x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$, obteniendo $\left(\frac{-a_x}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$.

Vamos con la expresión $T = \frac{2\pi}{\omega}$. El periodo T debe cumplir $x(t) = x(t+T)$ para todo t, luego $A \cdot sen(\omega t + \phi_0) = A \cdot sen(\omega(t+T) + \phi_0)$. Así, $sen(\omega t + \phi_0) = sen((\omega t + \phi_0) + \omega T)$. Llamando $\alpha = \omega t + \phi_0$, se tiene $sen(\alpha) = sen(\alpha + \omega T)$.
Debemos recordar que la función seno es una función periódica de periodo 2π; esto es, $sen(\alpha) = sen(\alpha + 2\pi)$ para cualquier α. Por tanto, $\omega T = 2\pi$. Así, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. ■

Notar que un MAS está totalmente determinado si conocemos su amplitud A, pulsación ω y fase inicial ϕ_0. Observando las ecuaciones del MAS, si conocemos cualquiera de los tres parámetros ω, T o f, podemos calcular los otros dos.

Ejemplo. En un MAS la amplitud es 3 m, la pulsación es 5 rad/s y la fase inicial es −π/6 rad. ¿Cuál es la expresión de la posición en función del tiempo? Comprobar a partir de dicha expresión y de la definición de velocidad y de aceleración que, efectivamente, la aceleración es igual a menos la pulsación al cuadrado multiplicada por la posición.

Solución. Por los datos del enunciado $A = 3$ m, $\omega = 5$ rad/s y $\phi_0 = -\frac{\pi}{6}$ rad. Así:

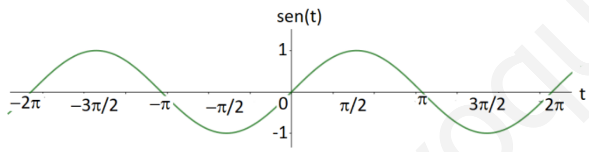
$x = A \cdot sen(\omega t + \phi_0) = 3sen\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$ (SI).

Ahora debemos comprobar que $a_x = -5^2 \cdot x$.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(3sen\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)\right)' =$$
$$= 3cos(5t - \pi/6) \cdot 5 = 15cos(5t - \pi/6) \text{ (SI)}.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(15cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)\right)' =$$
$$= 15 \cdot \left(-sen\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 5 = -75sen\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= -5^2 \cdot 3sen\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = -5^2 \cdot x.$$

Gráficas de un MAS. Comenzamos repasando la función seno. Tenemos que tener presente la gráfica de la función seno:

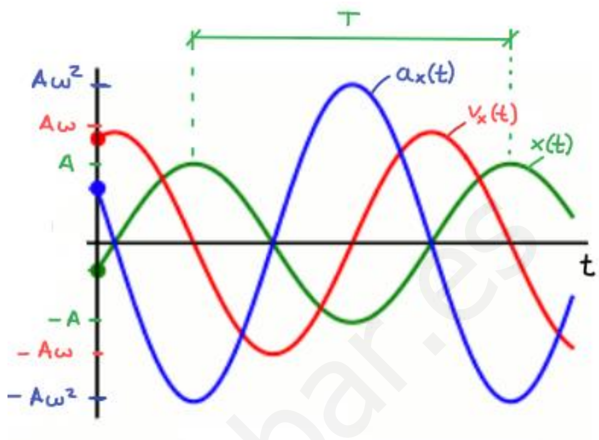


Recordamos que la función *seno*:

- Tiene por dominio el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- Es periódica de periodo 2π. Esto es, $sen(t) = sen(t + 2\pi)$ para cualquier t.
- Su valor máximo es 1. Los máximos tienen lugar en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero. Recuerda que los enteros son: …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …
- Su valor mínimo es −1. Los mínimos tienen lugar en $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
- Se anula en $k\pi$, siendo k cualquier valor entero.

Por tanto, para la posición instantánea $x = A\ sen(\omega t + \phi_0)$ inferimos lo siguiente:

- Es periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Su valor máximo es A. Los máximos tienen lugar en los instantes (no negativos) que verifiquen $\omega t + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
- Su valor mínimo es $-A$. Los mínimos tienen lugar en los instantes (no negativos) que verifiquen $\omega t + \phi_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
- Se anula en los instantes (no negativos) que verifiquen $\omega t + \phi_0 = k\pi$, siendo k cualquier valor entero.



Practicaremos en los ejercicios cómo sacar la gráfica de $x = x(t)$ a partir de la expresión y cómo sacar la expresión $x = x(t)$ a partir de la gráfica.

Estrategias para problemas de MAS.

- Los parámetros del MAS son A, ω y ϕ_0. Conocidos estos podemos hallar cualquier cosa del MAS en cuestión.
- Conociendo uno de ω, T o f, podemos calcular los otros dos mediante:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

- El valor máximo de la elongación es $x_{máx} = A$. El valor máximo de la velocidad es $v_{máx} = A\omega$. El valor máximo de la aceleración es $a_{máx} = A\omega^2$. Los valores mínimos son los opuestos de los máximos.
- La elongación es máxima en los instantes que verifican que $\omega t + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
  La elongación es mínima en los instantes que verifican que $\omega t + \phi_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
  La elongación es nula en los instantes que verifican que $\omega t + \phi_0 = k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
- x y a_x están relacionados mediante:
  $a_x = -\omega^2 x$.
  En un MAS x y a_x siempre tienen signos opuestos (en otros MR no es así). Así, si uno es positivo, el otro es negativo. Si uno está en su máximo, el otro está en su mínimo. Si uno crece, el otro decrece.
- x y v_x están relacionados mediante:
  $x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$.

$x \uparrow \Leftrightarrow v_x > 0$. Etc.
$v_x \uparrow \Leftrightarrow a_x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Etc.

- v_x y a_x están relacionados mediante:
$\left(\frac{a_x}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$.
$v_x \uparrow \Leftrightarrow a_x > 0$. Etc.
$a_x \uparrow \Leftrightarrow x \downarrow \Leftrightarrow v_x < 0$. Etc.

Problema tipo. Nos dicen de un MAS su pulsación ω, su posición inicial x_0 y su velocidad inicial $v_{x,0}$. Nos piden su posición instantánea. Solo necesitaremos hallar la amplitud A y la fase inicial ϕ_0.

(1) $A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_{x,0}}{\omega}\right)^2$.

(2) $\phi_0 = arc\ sen(x_0/A)$.

Salvo que $x_0/A = 1$ o $x_0/A = -1$ habrá dos ángulos en la circunferencia cuyo seno valga x_0/A. Sin embargo, la calculadora solo nos dice uno de ellos, que llamaremos α; el otro será $(\pi - \alpha)$. Para saber si ϕ_0 es α o $(\pi - \alpha)$ debemos usar el signo de $v_{x,0}$:

$$\begin{cases} \phi_0 \ es\ del\ 1^{\underline{o}}\ o\ 4^{\underline{o}}\ cuadrante\ si\ v_{x,0} > 0 \\ \phi_0\ es\ del\ 2^{\underline{o}}\ o\ 3^{\underline{o}}\ cuadrante\ si\ v_{x,0} < 0 \end{cases}$$

Demostración. De la expresión (1) no hay nada que probar, pues es una de las ecuaciones del MAS ya vistas. Para la expresión (2) acudimos a la posición instantánea del MAS: $x = A \cdot sen(\omega t + \phi_0)$.

$x_0 = A \cdot sen(\omega 0 + \phi_0) \Longrightarrow x_0 = A \cdot sen(\phi_0) \Longrightarrow$
$\phi_0 = arc\ sen(x_0/A)$.

Si $x_0/A = 1$, entonces $arc\ sen(x_0/A) = \pi/2$.
Si $x_0/A = -1$, entonces $arc\ sen(x_0/A) = -\pi/2$.

En caso de que x_0/A no sea 1 ni -1 sabemos que hay dos ángulos distintos en la circunferencia que verifican que su seno es x_0/A. La calculadora solo nos dice uno de ellos. Hallamos el otro ángulo usando la siguiente propiedad: para cualquier ángulo α en radianes, se cumple que $sen(\alpha) = sen(\pi - \alpha)$. Por tanto, si llamamos α al ángulo que nos da la calculadora, el otro ángulo será $(\pi - \alpha)$. Una vez que tenemos los dos ángulos α y $(\pi - \alpha)$, para saber cuál es el bueno acudimos a la velocidad instantánea del MAS: $v_x = A\omega \cdot cos(\omega t + \phi_0)$.

$v_{x,0} = A\omega \cdot cos(\omega 0 + \phi_0) = A\omega \cdot cos(\phi_0)$.

Como vemos el signo de $v_{x,0}$ coincide con el signo de $cos(\phi_0)$.

$v_{x,0} > 0 \Longrightarrow cos(\phi_0) > 0 \Longrightarrow 1^{\underline{o}}\ o\ 4^{\underline{o}}\ cuadrante.$

$v_{x,0} < 0 \Longrightarrow cos(\phi_0) < 0 \Longrightarrow 2^{\underline{o}}\ o\ 3^{\underline{o}}\ cuadrante.$ ■

EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1. Del siguiente MAS $x(t) = 4\ sen(2t + \frac{\pi}{3})$ (SI) se pide:

a) Hallar la elongación máxima, la fase inicial, la pulsación, el periodo y frecuencia del movimiento.
b) Representar gráficamente su posición instantánea.
c) Instante en el que se produce el séptimo máximo.

Solución

a)

En un MAS tenemos $x(t) = A\ sen(\omega t + \phi_0)$, luego:

Elongación máxima o amplitud: $A = \mathbf{4}$ **m**.

Fase inicial: $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ **rad**.

Pulsación, pulso o frecuencia angular: $\omega = \mathbf{2}$ **rad/s**.

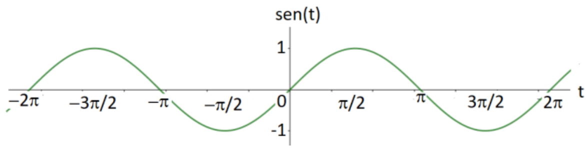
Pulsación ω, periodo T y frecuencia f contienen la misma información, pues si conocemos uno de los tres podemos hallar los otros dos:

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ s \approx \mathbf{3.142}$ **s**. Recordamos que el periodo es el tiempo que tarda en repetiré el movimiento.

Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \approx \mathbf{0.318}$ **Hz**. Recordamos que la frecuencia es la cantidad de periodos que tienen lugar en la unidad de tiempo; por ejemplo, una frecuencia de 50 Hz significaría que tienen lugar 50 periodos cada segundo.

b)

Tenemos que tener presente la gráfica de la función seno:



Recordamos que la función seno:

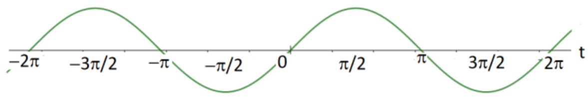
- Tiene por dominio el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- Es periódica de periodo 2π. Esto es, $sen(t) = sen(t + 2\pi)$ para cualquier t.
- Su valor máximo es 1. Los máximos tienen lugar en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo *k* cualquier valor entero. Recuerda que los enteros son: …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …
- Su valor mínimo es –1. Los mínimos tienen lugar en $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo *k* cualquier valor entero.
- Se anula en $k\pi$, siendo k cualquier valor entero.

Por tanto, para la posición instantánea $x(t) = A\ sen(\omega t + \phi_0)$ con $t \geq 0$, inferimos lo siguiente:

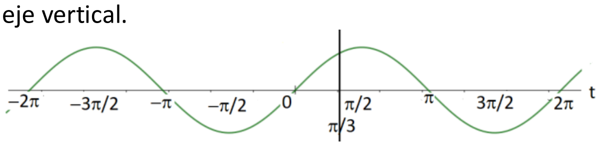
- Es periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- Su valor máximo es A. Los máximos tienen lugar en los instantes que verifiquen $\omega t + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo *k* cualquier valor entero.

- Su valor mínimo es $-A$. Los mínimos tienen lugar en los instantes que verifiquen $\omega t + \phi_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero.
- Se anula en los instantes que verifiquen $\omega t + \phi_0 = k\pi$, siendo k cualquier valor entero.

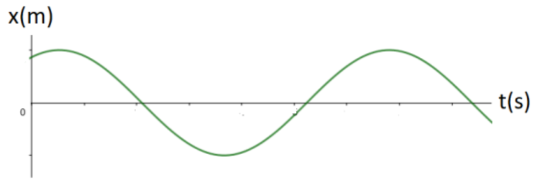
Volvamos a la representación de nuestra gráfica. Avisamos de antemano que los ejes horizontal y vertical no estarán a la misma escala. Para dibujar la gráfica pedida comenzamos esbozando la función seno sin poner el eje vertical:



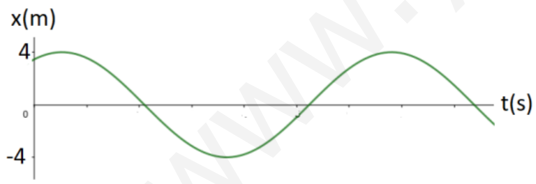
Ahora señalamos en el eje horizontal la fase inicial, que en nuestro caso es $\phi_0 = +\pi/3$ rad. Ahí estará el eje vertical.



Dibujamos el eje vertical y borramos los números del eje horizontal. Como la gráfica dice SI, el tiempo estará en segundos y la elongación en metros. Como $t \geq 0$, nos quedamos con la parte positiva del eje horizontal.



Sólo queda escalar el eje de tiempos (horizontal) y el de elongaciones (vertical). Para el eje vertical usamos la elongación máxima, que en nuestro caso es $A = 4$ m. Así, el máximo de nuestra gráfica será 4 m y el mínimo –4m.



Para escalar el eje horizontal recordamos que los máximos de la función seno (cuando el seno vale 1) se producen en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, siendo k cualquier valor entero. Así, los máximos de la función $4sen(2t + \frac{\pi}{3})$ con $t \geq 0$ se producirán cuando:

$$2t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{con } k \text{ entero y } t \geq 0$$

Despejando t obtenemos:

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

En este caso, el menor k entero que hace $t \geq 0$ es $k = 0$, luego el primer máximo tendrá lugar en:

$$t_1 = \frac{\pi}{12} + 0\pi = \frac{\pi}{12} \approx 0.262 \text{ s}$$

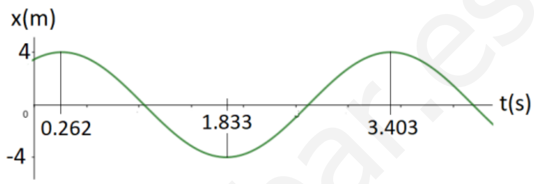
El segundo máximo se producirá, por tanto, para $k = 1$, luego:

$$t_2 = \frac{\pi}{12} + 1\pi = \frac{13\pi}{12} \approx 3.403 \text{ s}$$

Viendo la gráfica, el primer mínimo está a medio camino entre los dos primeros máximos luego valdrá:

$$t_{1'} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{7\pi}{6} \approx 1.833 \text{ s.}$$

Finalmente, la gráfica es:



c)

Hemos visto que los instantes de los máximos eran del tipo $t = \frac{\pi}{12} + k\pi$ para k entero, teniendo lugar el primer máximo en este caso en $k = 0$. Luego el q-ésimo máximo tendrá lugar para $k = q - 1$. Por tanto,

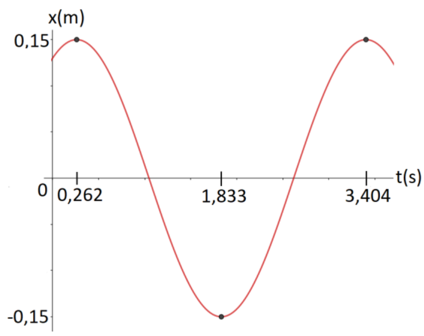
$$t_q = \frac{\pi}{12} + (q-1)\pi$$

Así, el séptimo máximo se producirá en el instante

$$t_7 = \frac{\pi}{12} + (7-1)\pi \approx \mathbf{19.111\ s.}$$

Ejemplo 2. Sabiendo que la figura representa un MAS, se pide:

a) Amplitud, periodo, frecuencia, pulsación y fase inicial.
b) Posición a los 3 s.
c) Instante en que la elongación se anula por sexta vez.
d) Distancia recorrida desde el instante inicial hasta los 3 s.



Solución

a)

En un MAS tenemos $x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0)$. Primero hallaremos la amplitud. Después, el periodo; con el periodo hallaremos la pulsación y la frecuencia, pues periodo, pulsación y frecuencia contienen la misma información. Finalmente hallaremos la fase inicial.

Elongación máxima o amplitud. Es el valor máximo de la gráfica: $A = \mathbf{0.15}$ **m**.

Periodo. Es el intervalo de tiempo entre dos máximos consecutivos o dos mínimos consecutivos. Tomamos dos máximos consecutivos: $T = 3.404 - 0.262 = \mathbf{3.142}$ **s**.

Pulsación: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.142} \approx$ **2 rad/s**.

Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.142} \approx \mathbf{0.318}$ **Hz**.

Para calcular la fase inicial necesitamos un máximo en la gráfica. Recordamos que los máximos de la posición se producen cuando $\omega t + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Tomamos el instante 0.262 s como instante donde se produce un máximo. Tenemos:

$$2 \cdot 0.262 + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - 2 \cdot 0.262 = 1.047 + 2k\pi$$

Aquí podemos elegir el k entero que queramos y la fase inicial será válida, lo que significa que hay infinitas fases iniciales válidas. Sin embargo, es una buena práctica dar la fase inicial en el intervalo $[0, 2\pi)$ rad o en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Eligiendo $k = 0$ estamos en ambos intervalos, luego $\phi_0 = \mathbf{1.047}$ **rad**.

b)

Tenemos $x(t) = 0.15\,sen(2t + 1.047)$ (SI). Ojo, que el argumento del seno está en radianes; así que debemos poner la calculadora en radianes.
$x(3s) = 0.15\,sen(2 \cdot 3 + 1.047) = \mathbf{0.104}$ **m**.

c)

La elongación se anula en los instantes (no negativos) que verifiquen $\omega t + \phi_0 = k\pi$, siendo k cualquier valor entero. En nuestro caso,

$$2t + 1.047 = k\pi$$

$$t = \frac{k\pi - 1.047}{2} = -0.524 + \frac{k\pi}{2}$$

El primer instante en el que se anula será cuando usemos el menor k que haga t no negativo; esto es, la primera anulación se produce para $k = 1$. Por tanto, la sexta anulación se producirá para $k = 6$. Luego se anula por sexta vez a los $-0{,}524 + \frac{6\pi}{2} = \mathbf{8.90}$ **s**.

Este apartado también lo podríamos haber hecho directamente a través de la gráfica.

d)

Observando la gráfica, vemos que entre los 0 s y los 3 s cambia de sentido de movimiento en 0.262 s y en 1.833 s; luego:

$$\Delta s = |x(0.262) - x(0)| + |x(1.833) - x(0.262)| + \\ +|x(3) - x(1.833)|$$

Hallamos $x(0)$ y $x(3)$, pues el resto son conocidos (recuerda que aquí la calculadora en radianes):

$$x(0) = 0.15\,sen(2 \cdot 0 + 1.047) = 0.130 \text{ m.}$$

$$x(3) = 0.15\,sen(2 \cdot 3 + 1.047) = 0.104 \text{ m.}$$

$$\Delta s = |0.15 - 0.13| + |-0.15 - 0.15| + \\ +|0.104 - (-0.15)| = \\ = |0.02| + |-0.3| + |0.254| = \\ = 0.02 + 0.3 + 0.254 = \mathbf{0.574} \text{ m.}$$

Ejemplo 3. De un MAS sabemos que su amplitud es 30 cm su frecuencia 5 Hz y su fase inicial $\frac{3\pi}{4}$ rad. Se pide:

a) Posición a los 0.1 s.
b) Velocidad a los 0.2 s.
c) Aceleración a los 0.4 s.

Solución

a)

Primero obtenemos los tres parámetros de la posición instantánea.

$A = 0.30\,m.$

$\omega = 2\pi f = 2\pi 5 = 10\pi \frac{rad}{s} \approx 31.416\,rad/s.$

$\phi_0 = \frac{3\pi}{4}\,rad.$

$x = Asen(\omega t + \phi_0) = 0.3sen(10\pi t + \frac{3\pi}{4})$ (SI).

$x(0.1s) = 0.3sen\left(10\pi 0.1 + \frac{3\pi}{4}\right) = \boldsymbol{-0.21\,m}.$

b)

$$v_x = A\omega \cdot cos(\omega t + \phi_0) = \\ = 0.3 \cdot 10\pi \cdot cos\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ (SI).}$$

$$v_x(0.2s) = 0.3 \cdot 10\pi \cdot cos\left(10\pi 0.2 + \frac{3\pi}{4}\right) = \\ = \boldsymbol{-6.66\,m/s}.$$

c)

$$a_x = -A\omega^2 \cdot sen(\omega t + \phi_0) = \\ = -0.3 \cdot (10\pi)^2 \cdot sen\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ (SI).}$$

$$a_x(0.4s) = -0.3 \cdot (10\pi)^2 \cdot sen\left(10\pi 0.4 + \frac{3\pi}{4}\right) = \\ = \boldsymbol{-209.37\,m/s^2}.$$

Ejemplo 4. Del siguiente MAS vertical $x = 0.8sen(5t - \frac{3\pi}{4})$ (SI) se pide:

a) Velocidad y aceleración cuando la elongación es nula.
b) Posición y aceleración cuando la velocidad es de $+3\ m/s$.

Solución

a)

La velocidad y la elongación están relacionadas mediante:

$x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2 \Rightarrow \frac{v_x^2}{\omega^2} = A^2 - x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow v_x^2 = (A^2 - x^2)\omega^2 \Rightarrow v_x = \pm\sqrt{(A^2 - x^2)\omega^2}.$

Para $x = 0\ m$ tenemos:

$v_x = \pm\sqrt{(0.8^2 - 0^2)5^2} = \pm \boldsymbol{4\ m/s}.$

Como vemos, cuando la elongación es nula, puede haber dos velocidades distintas: una de 4 m/s hacia arriba y otra de 4 m/s hacia abajo.

La aceleración y la elongación están relacionadas mediante: $a_x = -\omega^2 x$.

Para $x = 0\ m$ tenemos:

$a_x = -5^2 \cdot 0 = \boldsymbol{0\ m/s^2}.$

Como vemos por la fórmula, la elongación y la aceleración siempre tienen signos contrarios, luego ambas se anulan a la vez.

b)

La posición y la velocidad están relacionadas mediante:

$x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2 \Rightarrow x^2 = A^2 - \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2}$

Para $v_x = +3\ m/s$ tenemos:

$x = \pm\sqrt{0.8^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \boldsymbol{0.53\ m}.$

Como vemos, el móvil puede ir a 3 m/s hacia arriba tanto a 53 cm por encima del origen como a 53 cm por debajo del origen.

La aceleración y la velocidad están relacionadas mediante:

$\left(\frac{a_x}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2 \Rightarrow \frac{a_x^2}{\omega^4} = A^2 - \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_x^2 = \left[A^2 - \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2\right]\omega^4 \Rightarrow a_x = \pm\sqrt{\left[A^2 - \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2\right]\omega^4}.$

Para $v_x = +3\ m/s$ tenemos:

$a_x = \pm\sqrt{\left[0.8^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]5^4} = \pm \boldsymbol{13.23\ m/s^2}.$

Hay dos puntos en los que la velocidad es de 3 m/s hacia arriba: uno por encima del origen y otro por debajo del origen. Cuando está en el punto por encima del origen, la aceleración es de 13.23 m/s^2 hacia abajo. Cuando está en el punto por debajo del origen, la aceleración es de 13.23 m/s^2 hacia arriba.

Ejemplo 5*. De un MAS horizontal sabemos que su elongación inicial es 9 cm a la derecha del origen, su velocidad inicial es 0.45 m/s hacia la izquierda y su pulsación es de 10 rad/s. ¿Cuál es la expresión de la elongación instantánea?

Solución

Tenemos que $x_0 = +0.08\ m,\ v_x = -0.4\ m/s$ y $\omega = 10\ rad/s$. De los tres parámetros de un MAS nos falta hallar A y ϕ_0.

Vamos por A. Como $x^2 + \left(\frac{v_x}{\omega}\right)^2 = A^2$, se tiene que

$x_0^2 + \left(\frac{v_{x,0}}{\omega}\right)^2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x,0}}{\omega}\right)^2}.$

$A = \sqrt{0.08^2 + \left(\frac{-0.45}{10}\right)^2} = 0.1\ m.$

Vamos por ϕ_0. Como $x = A \cdot sen(\omega t + \phi_0)$ se tiene:

$x_0 = A \cdot sen(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow x_0 = A \cdot sen(\phi_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \phi_0 = arc\ sen\left(\frac{x_0}{A}\right) = arc\ sen(0.8) \Rightarrow$
$\Rightarrow \phi_0 = \begin{cases} 0.927\ rad \\ 2.214\ rad \end{cases}.$

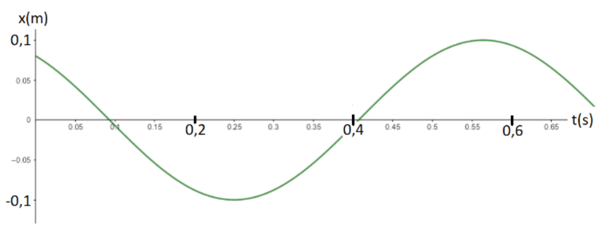
La calculadora nos da el valor 0.927 rad, del primer cuadrante, pues cuando hacemos el arco seno con la calculadora nos va a dar un valor del primer cuadrante (si el seno es positivo) o del cuarto cuadrante (si el seno es negativo). Sin embargo, el seno también es positivo en el segundo cuadrante y también es negativo en el tercer cuadrante, por lo que falta añadir una solución a la de la calculadora. Recordar que $sen(\alpha) = sen(\pi - \alpha)$, luego si 0.927 rad es solución, también lo será π-0.927 = 2.215 rad. ¿Cuál de las dos soluciones será la correcta? Para saberlo, debemos ir al signo de la velocidad.

Como $v_x = A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$ se tiene:

$v_{x,0} = A\omega \cdot \cos(\omega 0 + \phi_0) \Rightarrow v_{x,0} = A\omega \cdot \cos(\phi_0)$

Esto significa que el signo de la velocidad inicial es igual al signo de $\cos(\phi_0)$. Como la velocidad inicial es negativa, entonces $\cos(\phi_0)$ es negativo, luego ϕ_0 se encuentra en el segundo o tercer cuadrante, que es donde el coseno es negativo. Como antes hemos visto que ϕ_0 está en el primer o segundo cuadrante, inferimos que ϕ_0 está en el segundo cuadrante. Por tanto, la solución es $\phi_0 = 2.214\ rad$.

$\boldsymbol{x = 0.1 \cdot sen(10t + 2,214)}$ **(SI)**.



EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Representa las gráficas:

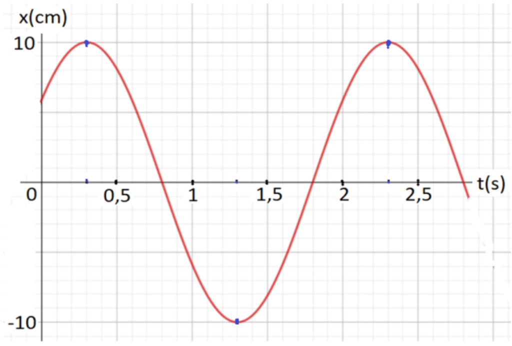
a) *$x(t) = 3\cdot sen(0{,}5t - \pi/4)$* (SI).

b) *$x(t) = 5\cdot sen(6\pi t - 2\pi/3)$* (SI).

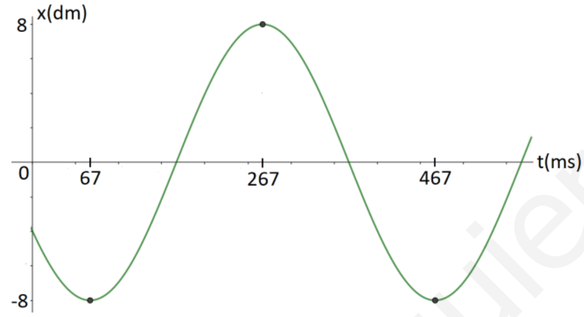
Sol. Ver video de YouTube.

3.2. Sabiendo que las gráficas se corresponden con un MAS, se pide obtener la expresión de la posición instantánea en cada caso:

a)



b)



Sol. a) $x = 0{,}1sen(\pi t+0{,}2\pi)$ (SI); b) $x = 0{,}8sen(5\pi t-2{,}623)$ (SI) [también valdría $x = 0{,}8sen(5\pi t+3{,}660)$ (SI)].

3.3. Una partícula sigue un MAS de amplitud 80 cm, pulsación $\pi/2$ rad/s y fase inicial +30°. Se pide:

a) Periodo y frecuencia.

b) Posición en el instante 1 s.

c) Elongación máxima y cuándo se produce por quinta vez.

d) Elongación mínima y cuándo se produce por cuarta vez.

Sol. a) 4 s y 0,25 Hz; b) 0,693 m; c) 0,8 m y 16,667 s; d) −0,8 m y 14,667 s.

3.4*. Un MAS viene dado por:

$x = 0{,}6\cdot sen(2{,}5t - 120°)$ (SI). Se pide:

a) Amplitud, periodo, frecuencia, pulsación y fase inicial.

b) Elongación, velocidad y aceleración a los 3 s.

c) Elongación, velocidad y aceleración máximas.

d) Instante en que la velocidad (en x) es mínima por cuarta vez.

Sol. a) 0,6 m, 2,513 s, 0,398 Hz, 2,5 rad/s y $(-2\pi/3)$ rad;
b) −0,462 m, 0,959 m/s y 2,884 m/s^2;
c) 0,6 m, 1,5 m/s y 3,75 m/s^2; d) 9,633 s.

3.5. Un MAS tiene una amplitud de 18 cm, una frecuencia de 5 Hz y una fase inicial de −30°. Obtenga las gráficas: *$x = x(t)$, $v_x = v_x(t)$, $a_x = a_x(t)$*.

Sol. Ver video de YouTube.

3.6*. De un MAS sabemos que su amplitud es 16 cm y su pulsación 20 rad/s. Se pide:

a) Aceleración para una elongación de +5 cm.

b) Elongación para una velocidad de +1 m/s creciente.

c) Velocidad para una elongación de −8 cm creciente.

d) Velocidad para una aceleración de valor absoluto 40 m/s^2 y decreciente.

Sol. a) −20 m/s^2; b) −0,152 m; c) 2,771 m/s; d) 2,498 m/s.

3.7*. De un MAS vertical sabemos que de extremo a extremo recorre 10 cm, su aceleración máxima es 80 m/s^2 y a los 2 s dicha aceleración presenta un máximo. Se pide:

a) Amplitud, periodo, frecuencia, pulsación y fase inicial. Esta última darla en el intervalo (-π rad, π rad].

b) Velocidades posibles 2cm por debajo del punto más alto.

c) Aceleraciones posibles para una velocidad de −1 m/s.

*Sol. a) 0,05 m, 0,157 s, 6,366 Hz, 40 rad/s, 0,110 rad;
b) ±1,6 m/s; c) ±69,282 m/s^2.*

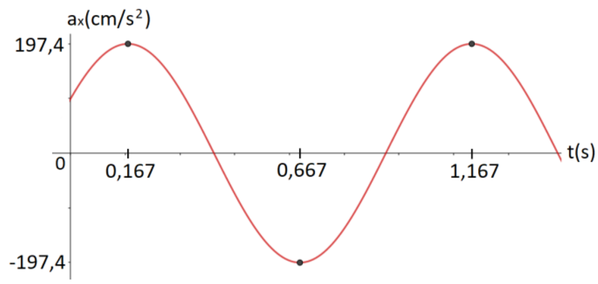
3.8*. Sabiendo que la figura representa la aceleración instantánea de un MAS, se pide:

a) Amplitud, pulsación y fase inicial.

b) Elongación, velocidad y aceleración iniciales.

c) Velocidad para una elongación de +2 cm decreciente.

d) Posición para una aceleración de +40 cm/s^2.



Sol. a) 0,05 m, 2π rad/s, −2,620 rad [también vale 3,663 rad]; b) −0,025 m, −0,272 m/s, 0,984 m/s^2; c) −0,288 m/s; d) −0,01m.

3.9*.

a) En un MAS vertical, de extremo a extremo hay 16 cm. Inicialmente se encuentra a 4 cm de la posición de equilibrio y por encima de ella, moviéndose hacia abajo. En el primer segundo de movimiento alcanza la elongación máxima por quinta vez. Se pide la expresión de la posición instantánea.

b) Encontrar situaciones en un MAS con aceleración positiva pero rapidez decreciente.

Sol. a) $x = 0{,}08sen\left(\frac{29\pi}{3}t + \frac{5\pi}{6}\right)$ *(SI); b) Cuando la fase se encuentre en el tercer cuadrante; esto es, cuando se encuentra en la parte negativa moviéndose en sentido negativo.*

3.10*. De un MAS sabemos que su elongación inicial es –2,5 m, su velocidad inicial es +8,66 m/s y su aceleración inicial es +10 m/s^2. Se pide:

a) Amplitud, pulsación y fase inicial (esta última darla en el intervalo de -π rad y π rad).
b) Instante en que se produce la máxima aceleración por séptima vez.
c) Distancia recorrida durante el primer minuto.

Nota. El apartado c) tiene **.

Sol. a) 5 m, 2 rad/s y (–π/6) rad; b) 21,467 s; c) 382,98 m.

3.11*. La partícula de la figura presenta un MAS de pulsación 4 rad/s. Hallar la expresión instantánea de la posición $x = x(t)$ en los siguientes casos:

a) Inicialmente el muelle está estirado 30 cm y la velocidad de la partícula es nula.
b) Inicialmente el muelle está comprimido 30 cm y la velocidad de la partícula es nula.
c) Inicialmente el muelle tiene su longitud natural y la velocidad de la partícula es de 2 m/s en el sentido de la tracción.
d) Inicialmente el muelle tiene su longitud natural y la velocidad de la partícula es de 2 m/s en el sentido de la compresión.
e) Inicialmente el muelle está traccionado 10 cm y la velocidad de la partícula es de 0,7m/s en el sentido de la tracción.
f) Inicialmente el muelle está traccionado 10 cm y la velocidad de la partícula es de 0,7m/s en el sentido de la compresión.
g) Inicialmente el muelle está comprimido 10 cm y la velocidad de la partícula es de 0,7m/s en el sentido de la tracción.
h) Inicialmente el muelle está comprimido 10 cm y la velocidad de la partícula es de 0,7m/s en el sentido de la compresión.

Sol. a) $x = 0{,}3\,sen\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)$ *(SI);*
b) $x = 0{,}3\,sen\left(4t - \frac{\pi}{2}\right)$ *(SI);*
c) $x = 0{,}5\,sen(4t)$ *(SI);*
d) $x = 0{,}5\,sen(4t + \pi)$ *(SI);*
e) $x = 0{,}2\,sen\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$ *(SI);*
f) $x = 0{,}2\,sen\left(4t + \frac{5\pi}{6}\right)$ *(SI);*
g) $x = 0{,}2\,sen\left(4t - \frac{\pi}{6}\right)$ *(SI);*
h) $x = 0{,}2\,sen\left(4t - \frac{5\pi}{6}\right)$ *(SI).*