MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álxebra:

Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{se} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j, e I é a matriz identidade.)

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:

De entre tódolos rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.

4. Análise:

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(10, -5, 5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Xeometría:

a) Ache o valor de a se o plano $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función do parámetro m.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{e} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

a) A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.

b) A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
2021 - ordinaria
Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{si} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
b) Calcule el punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

a) Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.
b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:
a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

MATEMÁTICAS II

1. $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$. Ao ter unha fila de ceros, **a matriz A non ten inversa**.

$a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1$, $a_{31} = -2$, $a_{32} = 2$ e $a_{33} = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A+I) = -2 - 2 = -4 \neq 0$, polo que **a matriz $A + I$ si que ten inversa**.

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1/4} \\ \mathbf{-3/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/2} \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & m\\ 0 & m & 3 & 1\\ 1 & m+2 & m+1 & m+1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & m\\ 0 & m & 3 & 1\\ 0 & m & m+1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & m\\ 0 & m & 3 & 1\\ 0 & 0 & m-2 & 0\end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & m,\\ & & my & + & 3z & = & 1,\\ & & & & (m-2)z & = & 0.\end{array}\right.$$

Discusión:

- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}\setminus\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{2}\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é $z=0,\quad y=\frac{1}{m},\quad x=m-2y.$

- **Se $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}$,** temos $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0,\\ & & 3z & = & 1,\\ & & -2z & = & 0.\end{array}\right.$
  O sistema é incompatible, porque as dúas últimas ecuacións non se poden cumprir á vez.

- **Se $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{2}$,** temos $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 2,\\ & & 2y & + & 3z & = & 1,\\ & & & & 0 & = & 0.\end{array}\right.$
  O sistema é compatible indeterminado, xa que ten as seguintes infinitas solucións:
  $$\left[z=\lambda,\qquad y=\frac{1-3\lambda}{2},\qquad x=2-(1-3\lambda)=1+3\lambda\right],\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN ALTERNATIVA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array}\right), \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m$$
$$= m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m \in \{0,2\}.$$

Discusión:

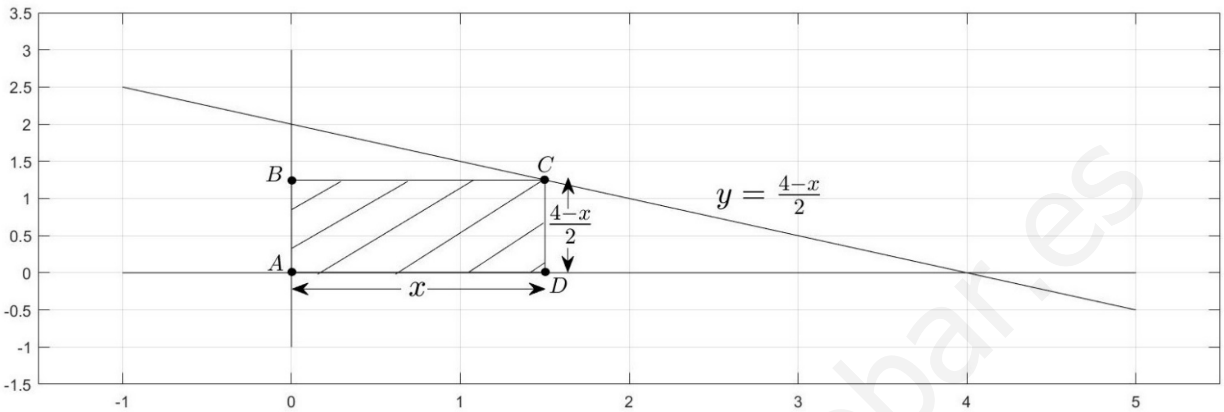
- **Caso $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.

- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

- **Caso $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2 = \operatorname{rank} A < 3 =$ n.º de incógnitas, situación na que **o sistema é compatible indeterminado**.

MATEMÁTICAS II

3.



Corte da recta $x + 2y = 4$ co eixe de abscisas:

$$x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4-x}{2}.$$
$$\frac{4-x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Así pois, hai que achar o máximo de $A(x) = x\left(\frac{4-x}{2}\right)$, $x \in (0,4)$.

$$A(x) = \frac{1}{2}(4x - x^2), \qquad A'(x) = \frac{1}{2}(4 - 2x) = 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Hai máximo en $x = 2$ porque $A''(2) = -1 < 0$ (ou porque $y = A(x)$ é a ecuación dunha parábola cóncava con vértice en $x = 2$).

Posto que $\frac{4-2}{2} = 1$, os vértices pedidos son

$$\boldsymbol{A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0).}$$

NOTA: como é frecuente facer, neste exercicio sobreentendemos que o vértice que ten que estar sobre a recta $r: x + 2y = 4$ é o C (ver debuxo, arriba), que vai escorregando sobre r. Certamente, tamén se poderían engadir ao estudo os casos nos que

- é o punto $B(0,2)$, fixo, o que está sobre r, e
- é o punto $D(4,0)$, fixo, o que está sobre r,

e, entón, non hai rectángulo de área máxima. En efecto, consideremos por exemplo o primeiro destes dous casos. Entón, a función pasa a ser $A(x) = 2x$, con $x \in (0, \infty)$ ou, dependendo de interpretacións, $x \in (0, \infty) \setminus \{4\}$. Tanto cun dominio coma co outro, esa función non ten máximo. Esta aproximación ao problema tamén se considerará válida.

MATEMÁTICAS II

4.

$$y = x^2 - x - 1, \quad y' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \qquad y'' = 2 > 0.$$

Logo $y = x^2 - x - 1$ é unha parábola convexa con vértice en $x = \frac{1}{2}$.

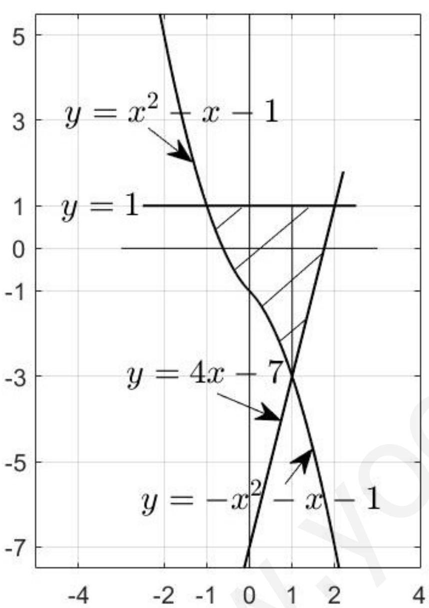
$$y = -x^2 - x - 1, \quad y' = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y'' = -2 < 0.$$

Logo $y = -x^2 - x - 1$ é unha parábola cóncava con vértice en $x = -\frac{1}{2}$.

x	$y = x^2 - x - 1$
0	-1
-1	1
-2	5

x	$y = -x^2 - x - 1$
0	-1
1	-3
2	-7

x	$y = 4x - 7$
0	-7
1	-3
2	1



Como vemos, ao buscar puntos para a representación gráfica xa poden saír os puntos de corte. Se non, procédese como segue.

- <u>Corte de $y = 1$ con $y = x^2 - x - 1$</u>:
$$x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \in \{-1,2\}.$$
Só nos interesa $x = -1$.
- <u>Corte de $y = 1$ con $y = 4x - 7$</u>:
$$4x - 7 = 1 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$
- <u>Corte de $y = 4x - 7$ con $y = -x^2 - x - 1$</u>:
$$-x^2 - x - 1 = 4x - 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x \in \{-6,1\}.$$
Só nos interesa $x = 1$.

A área pedida é

$$\boldsymbol{A} = \int_{-1}^{0} [1 - (x^2 - x - 1)]\, dx + \int_{0}^{1} [1 - (-x^2 - x - 1)]\, dx + \begin{bmatrix}\text{área dun triángulo}\\ \text{de base 1 e altura 4}\end{bmatrix} =$$

$$\int_{-1}^{0} (-x^2 + x + 2)\, dx + \int_{0}^{1} (x^2 + x + 2)\, dx + \frac{1 \cdot 4}{2} =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} + 2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) + 2 = \mathbf{6}.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Plano π que pasa por $A(1,0,0), B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$:

π pasa por $A(1,0,0)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(-1,2,0)$ e $\overrightarrow{AC}(-1,0,3)$. Logo $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-1) + 2z + 3y = 6x + 3y + 2z - 6 \Rightarrow \boldsymbol{\pi}: \mathbf{6x + 3y + 2z - 6 = 0}.$$

5.b) Punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$:

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(10,-5,5)$ e é perpendicular a π:
  $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(6,3,2)$, co cal $r: \begin{cases} x = 10 + 6\lambda, \\ y = -5 + 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 5 + 2\lambda, \end{cases}$
- Corte de r con π:
  $$6(10 + 6\lambda) + 3(-5 + 3\lambda) + 2(5 + 2\lambda) - 6 = 60 + 36\lambda - 15 + 9\lambda + 10 + 4\lambda - 6 = 49\lambda + 49 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$
  Logo o punto de corte é $Q(10-6, -5-3, 5-2) = Q(4,-8,3)$.
- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x', y', z')$ ao punto,
  $$\frac{10 + x'}{2} = 4 \Leftrightarrow 10 + x' = 8 \Leftrightarrow x' = -2,$$
  $$\frac{-5 + y'}{2} = -8 \Leftrightarrow -5 + y' = -16 \Leftrightarrow y' = -11,$$
  $$\frac{5 + z'}{2} = 3 \Leftrightarrow 5 + z' = 6 \Leftrightarrow z' = 1.$$
  Tense logo $\boldsymbol{P'}(-\mathbf{2}, -\mathbf{11}, \mathbf{1})$.

MATEMÁTICAS II

6.

6.a) Como $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo a $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{n}_\pi(a, 1,1)$ debe ser perpendicular a $\vec{d}_r(1,1,1)$:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r = a + 1 + 1 = a + 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{-2}.$$

6.b) Posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$.

$$\left[\frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3}\right] \Leftrightarrow m = 3.$$

Como non son o mesmo plano cando $m = 3$,

- **Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$, son paralelos** (non coincidentes),
- **Se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{3}\}$, son secantes** (córtanse nunha recta).

MATEMÁTICAS II

7.

7.a) $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 0.8 = 3P(A) - 0.1 \Leftrightarrow 3P(A) = 0.9 \Leftrightarrow \boldsymbol{P(A) = 0.3}.$$

7.b) $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$.

$$0.82 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18.$$

Como $P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = P(A \cap B)$, **os sucesos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ son independentes**.

MATEMÁTICAS II

8. $X =$ "n.º de persoas contaxiadas, de entre as 8".

$X \to B(n,p)$, con $n = 8$ e $p = 0.1$ (logo $q = 1 - p = 0.9$).

8.a)

$$\boldsymbol{P(X \leq 2)} = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$\binom{8}{0}(0.1)^0(0.9)^8 + \binom{8}{1}(0.1)^1(0.9)^7 + \binom{8}{2}(0.1)^2(0.9)^6 =$$

$$(0.9)^8 + 8(0.1)(0.9)^7 + 28(0.1)^2(0.9)^6 = \mathbf{0.9619}.$$

8.b)

$$\boldsymbol{P(X \geq 2)} = 1 - P(X<2) = 1 - \{P(X=0) + P(X=1)\} = 1 - (0.9)^8 - 8(0.1)(0.9)^7$$
$$= \mathbf{0.1869}.$$

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álxebra:
Despexe X na ecuación matricial $B(X - I) = A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:
a) Enuncie o teorema de Bolzano.
b) Obteña os valores de a, b e c que fan que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpra $f(0) = 1$ e teña extremos relativos en $x = \pm 1$. Dicir logo se os extremos son máximos ou mínimos.

4. Análise:
a) Enuncie o teorema de Rolle.
b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de $f(x) = x + 6$ e $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita do plano π con ecuacións paramétricas $\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$
b) Calcule o valor de m para que os seguintes puntos sexan coplanarios: $A(0, m, 0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$. Obteña a ecuación implícita do plano π que os contén.

6. Xeometría:
Calcule o punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

7. Estatística e Probabilidade:
Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:
a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.
b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

8. Estatística e Probabilidade:
O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 20

2021 - extraordinaria

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:
Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0, \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}$

5. Geometría:
a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$
b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:
Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estadística y Probabilidad:
En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:
a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:
El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

MATEMÁTICAS II

1.

$$B(X-I)=A \Leftrightarrow X-I=B^{-1}A \Leftrightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B^{-1}A}.$$

Se $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$,

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X}=I+B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{6} & \mathbf{6} & -\mathbf{5} \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & m & 1 & 1-m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ 0 & m & 0 & 1-2m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right).$$

Sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ my = 1-2m, \\ z = m. \end{cases}$$

Discusión:

- **Se $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, entón o sistema é compatible determinado**, xa que a súa única solución é
$$z = m, \quad y = \frac{1-2m}{m}, \quad x = \frac{2m-y-z}{m}.$$
- **Se $m = 0$, o sistema é incompatible**, porque a segunda ecuación queda $0 = 1$.

<u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>:

$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & m+1 \end{array}\right)$, $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3 \ \forall m \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m - 1 = -m$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m - 1 = 1 - m$ non se anulan á vez, é seguro que $\operatorname{rank} A \geq 2 \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0]$.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m^2 + 2m + m + m^2 + m - m^2 - m - 2m - m^2 - m = m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Discusión:

- **Caso $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$**: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que **o sistema é compatible determinado**.
- **Caso $m = 0$**: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Ao ser $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que **o sistema é incompatible**.

MATEMÁTICAS II

3.

3.a)

<u>Teorema de Bolzano</u>:
Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

3.b) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$, $f(0) = 1$, e f ten extremos relativos en $x = \pm 1$.

- $$f(0) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{c = 1}.$$

- $$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3,$$
$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 3 = 0,$$
$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b - 3 = 0.$$

$$\begin{rcases} \begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases} \end{rcases} \Rightarrow 6a - 6 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 1},$$

$$3 + 2b - 3 = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = 0}.$$

- $$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

$$[f'(-1) = 0, \qquad f''(-1) = -6 < 0] \Rightarrow \textbf{máximo en } \boldsymbol{x = -1},$$

$$[f'(1) = 0, \qquad f''(1) = 6 > 0] \Rightarrow \textbf{mínimo en } \boldsymbol{x = -1}.$$

MATEMÁTICAS II

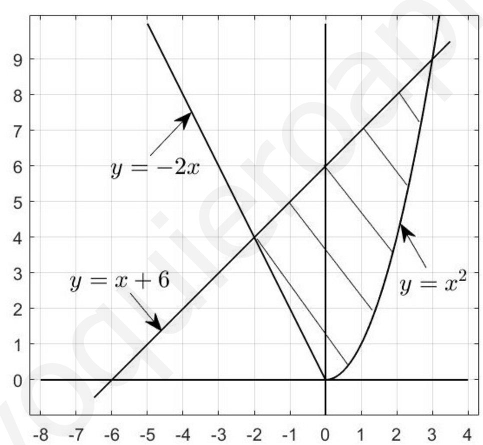
4.

4.a)

Teorema de Rolle:
Se $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ é continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e $f(a)=f(b)$, entón existe polo menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

4.b)

- $x^2=x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\Leftrightarrow x\in\{-2{,}3\}$.
  Só nos interesa $x=3$.
- $-2x=x+6 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2$.



$$A=\begin{bmatrix}\text{área dun triángulo}\\ \text{de base 6 e altura 2}\end{bmatrix}+\int_0^3 (x+6-x^2)\,dx.$$

$$\int_0^3(-x^2+x+6)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^3=-9+\frac{9}{2}+18=\frac{-18+9+36}{2}=\frac{27}{2}.$$

$$\boldsymbol{A}=6+\frac{27}{2}=\frac{12+27}{2}=\boldsymbol{\frac{39}{2}}=\mathbf{19.5}.$$

MATEMÁTICAS II

5.

5.a) Ecuación implícita de π: $\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \mu, \\ z = 1 + \lambda + 2\mu, \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

π pasa por $P(1,2,1)$ e está xerado por $\vec{u}(-1,0,1)$ e $\vec{v}(0,1,2)$. Logo π: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -z + 1 - x + 1 + 2y - 4 = -x + 2y - z - 2.$$

$$\pi: \boldsymbol{-x + 2y - z - 2 = 0}.$$

5.b) Valor de m para que $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$ sexan coplanarios. Ecuación implícita do plano π que os contén.

$\overrightarrow{BC}(1,2,1)$ e $\overrightarrow{BD}(2,-2,0)$ son linealmente independentes, polo que os puntos B, C e D determinan o plano que pasa por B e está xerado por $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Logo π: $\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2y - 4 - 2z + 4 - 4z + 8 - 2x = 2x + 2y - 6z + 8,$$

de onde $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{x + y - 3z + 4 = 0}$. Finalmente, $A \in \pi \Leftrightarrow m + 4 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m = -4}$.

5.b) SOLUCIÓN ALTERNATIVA: $\overrightarrow{BA}(0, m-2, -2), \overrightarrow{BC}(1,2,1), \overrightarrow{BD}(2,-2,0)$. Ao ser $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ linealmente independentes, a condición para ser coplanarios é $\operatorname{rank} M = 2$, sendo $M = (\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{BD})$.

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0$, é seguro que $\operatorname{rank} M \geq 2 \ \forall m \in \mathbb{R}$ e que $[\operatorname{rank} M = 2 \Leftrightarrow \det M = 0]$.

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2m - 4 + 8 = 2m + 8 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m = -4}.$$

Por último, habería que calcular a ecuación que contén aos catro puntos, por exemplo como se fixo arriba.

MATEMÁTICAS II

6. Punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

- Ecuacións paramétricas da recta r que pasa por $P(1,1,2)$ e é perpendicular a π:
  $\vec{d}_r=\vec{n}_\pi(2,-1,1)$, co cal $r:\begin{cases} x=1+2\lambda, \\ y=1-\lambda, \\ z=2+\lambda, \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}.$

- Corte de r con π:
  $$2(1+2\lambda)-(1-\lambda)+2+\lambda+3=2+4\lambda-1+\lambda+5+\lambda=6\lambda+6=0 \Leftrightarrow \lambda=-1.$$
  Logo o punto de corte é $Q(1-2,1+1,2-1)=Q(-1,2,1)$.

- Punto simétrico pedido: se chamamos $P'(x',y',z')$ ao punto,
  $$\frac{1+x'}{2}=-1\Leftrightarrow 1+x'=-2\Leftrightarrow x'=-3,$$
  $$\frac{1+y'}{2}=2\Leftrightarrow 1+y'=4\Leftrightarrow y'=3,$$
  $$\frac{2+z'}{2}=1\Leftrightarrow 2+z'=2\Leftrightarrow z'=0.$$
  Tense logo $\boldsymbol{P'(-3,3,0)}$.

MATEMÁTICAS II

7. $I =$ "practicar ioga", $M =$ "ter mascota".

$$P(I) = 0.08, \qquad P(M) = 0.20, \qquad P(I \cap M) = 0.03.$$

	M	$\bar{M}$	
I	$100 \cdot 0.03 = 3$		$100 \cdot 0.08 = 8$
$\bar{I}$	17		
	$100 \cdot 0.20 = 20$		100

7.a) Pola táboa de continxencia:

$$\boldsymbol{P(\bar{I} \cap M)} = \frac{17}{100} = \mathbf{0.17}.$$

7.a) <u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>:

$$P(M) = P(I \cap M) + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow 0.20 = 0.03 + P(\bar{I} \cap M) \Leftrightarrow \boldsymbol{P(\bar{I} \cap M) = 0.17}.$$

7.b) Pola táboa de continxencia:

$$\boldsymbol{P(M|I)} = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}.$$

7.b) <u>SOLUCIÓN ALTERNATIVA</u>:

$$\boldsymbol{P(M|I)} = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0.03}{0.08} = \mathbf{0.375}.$$

MATEMÁTICAS II

8. $X =$ "grosor en mm dunha prancha de aceiro".

$$X \to N(8{,}0.5) \Rightarrow Z = \frac{X-8}{0.5} \to N(0{,}1).$$

$$\boldsymbol{P(7.6 \leq X \leq 8.2)} = P\left(-\frac{0.4}{0.5} \leq Z \leq \frac{0.2}{0.5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.4) = P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.8)$$

$$= P(Z \leq 0.4) - P(Z \geq 0.8) = P(Z \leq 0.4) - \{1 - P(Z \leq 0.8)\} = P(Z \leq 0.4) + P(Z \leq 0.8) - 1 =$$

$$0.6554 + 0.7881 - 1 = \mathbf{0.4435}.$$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **CONVOCATORIA ORDINARIA 2020**	**Código: 20**

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corrixirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:
Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Pídese:
a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: neste caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)
b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA+(A+B)^T=2I+XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $A+B$.

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

3. Análise:
a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.
b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

4. Análise:
a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x=0$.
b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.
b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ e que pasa polo punto $P(-1,-2,2)$.

6. Xeometría:
Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:
Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

8. Estatística e Probabilidade:
Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **CONVOCATORIA ORDINARIA 2020**	**Código: 20**

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $A+B$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

3. Análisis:

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+c & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$.

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

MATEMÁTICAS II
CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionalos.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.25 puntos polo cálculo de A, 0.25 puntos polo cálculo de B e 0.5 puntos polo cálculo de $A^2 - B^2$.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por despexar X e calcular a inversa que naturalmente xurde e 0.5 puntos polo cálculo final de X.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos): 0.5 puntos por chegar a que os valores críticos son $m = \pm 1$ e 0.5 puntos polo estudo de cada un dos tres casos que se presentan.

3. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos por cada unha das dúas veces que se aplica a regra de L'Hôpital.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por determinar os intervalos nos que a derivada ten signo constante e 0.5 puntos por encontrar o mínimo.

4. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos polo estudo da continuidade e 0.5 puntos polo estudo da derivabilidade.
   b) 1 punto: 0.5 puntos polo cálculo da primitiva e 0.5 puntos polo cálculo do valor da integral definida.

5. **Xeometría** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos por dar a ecuación pedida.
   b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan a recta e 0.5 puntos por dar as ecuacións pedidas.

6. **Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): se M é "tomar o medicamento" e C é "curarse", 1 punto por chegar a $P(\overline{M \cap C})$ e 1 punto polo cálculo final.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto por chegar a $P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1)$ e 1 punto polo resto do exercicio.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álxebra:

Sexan A e B as dúas matrices que cumpren $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}$. Pídese:
a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: neste caso, $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$.)
b) Calcular a matriz X que cumpre a igualdade $XA+(A+B)^T=2I+XB$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e $(A+B)^T$ a trasposta de $A+B$.

Solución:

1.a) Nótese que $2A=A+B+A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & -2\end{pmatrix}$, de onde $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}$. Polo tanto, $B=A+B-A=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}$.

Como $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ e $B^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 8\\-4 & -7\end{pmatrix}$, tense finalmente que

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 8\\-4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -8\\4 & 8\end{pmatrix}.$$

1.b) En primeiro lugar, imos despexar X:

$$XA+(A+B)^T=2I+XB \Leftrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T \Leftrightarrow X=[2I-(A+B)^T](A-B)^{-1}.$$

Non hai ningún problema no último paso porque $A-B$ é invertible: $\det(A-B)=16\neq 0$.

- Cálculo de $2I-(A+B)^T$: como $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$,
$$2I-(A+B)^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix}.$$
- Cálculo de $(A-B)^{-1}$: ao ser $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & -2\end{pmatrix}$ e $\det(A-B)=16$,
$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & -4\\4 & 0\end{pmatrix}^T=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 4\\-4 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix}.$$

Tras estes cálculos, resulta

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 0\\-4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\overset{F_2 - mF_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & m & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 - mF_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -m & 2m \\ 0 & 0 & -1+m^2 & -2m^2 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y - mz = 2m, \\ (-1+m^2)z = -2m^2, \end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión, que queda como segue:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
$$z = \frac{-2m^2}{-1+m^2}, \quad y = 2m + mz, \quad x = -z.$$
- Se $m \in \{-1,1\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación queda $0 = -2$.

Solución alternativa:

Sexan $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, cúmprese que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 2$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1,1\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m \in \{-1,1\}$: $\operatorname{rank} A = 2$. Por outra banda, ao ser $\begin{vmatrix} m & 0 & 2m \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & \pm 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mp 2 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 3 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA ORDINARIA 2020

Código: 20

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

a) Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine os intervalos de crecemento e de decrecemento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, se existen, os máximos e mínimos relativos da función f.

Solución:

3.a)

indeterminación $\frac{0}{0}$, L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{2-2e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x}{2e^{2x}}=\frac{1}{2}.$$

Falando con rigor, o límite $\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{2-2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x}{2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$, e, analogamente, o límite $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$ porque $\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\sin x}{2-2e^{2x}}$ existe e vale $\frac{1}{2}$.

3.b)

$$f(x)=x(\ln x-1),\ \mathrm{Dom}(f)=(0,\infty).$$
$$f'(x)=\ln x-1+x\frac{1}{x}=\ln x.$$

Vese que f' ten signo negativo en $(0,1)$ e positivo en $(1,\infty)$:

SIGNO DE f'.

Segundo esta análise, f é estritamente decrecente en $(0,1)$ e estritamente crecente en $(1,\infty)$. Dado que ademais é continua en $(0,\infty)$, conclúese que ten un mínimo absoluto (logo relativo) en $x=1$ e que non ten outros extremos.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

4. Análise:

a) Calcule os valores de b e c para que a función $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+c & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x=0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Solución:

4.a)

- Continuidade: nótese que $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{2x}=1$, e, para calquera valor de $b\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+bx+c=c$. Por conseguinte, f é continua en $x=0$ se, e soamente se, $(b,c)\in\mathbb{R}\times\{1\}$.
- Derivabilidade: posto que f ten que ser continua para poder ser derivable, é obrigado que $c=1$, e así
$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x>0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{2x} & \text{se} \quad x<0, \\ 2x+b & \text{se} \quad x>0. \end{cases}$$
Como f é continua, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2\mathrm{e}^{2x}=2$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b$, a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $b=2$ e $c=1$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Do mesmo xeito que na solución anterior, chégase a $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} & \text{se} \quad x\le 0, \\ x^2+bx+1 & \text{se} \quad x>0, \end{cases}$ xa que c ten que valer 1. Agora, como $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 0^-} 2\mathrm{e}^{2x}=2$ (o asterisco * indica o uso da regra de L'Hôpital) e $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+bx+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+b)=b$, conclúese que a función f é derivable en $x=0$ se, e soamente se, $b=2$ e $c=1$.

4.b) Aplicando a fórmula de integración por partes con
$$u=\ln x-1, \quad du=\frac{1}{x}dx,$$
$$dv=xdx, \quad v=\frac{1}{2}x^2,$$
obtense
$$\int x(\ln x-1)dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+C,$$
e polo tanto
$$\int_1^2 x(\ln x-1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]_1^2=2\left(\ln 2-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)=2\ln 2-3+\frac{3}{4}=\ln 4-\frac{9}{4}\approx -0.8637.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ e $C(7,1,5)$.

b) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que é perpendicular ao plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ e que pasa polo punto $P(-1,-2,2)$.

Solución:

5.a) Se π é o plano pedido, π pasa por $A(3,0,-1)$ e está xerado por $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ e $\overrightarrow{AC}(4,1,6)$, co cal

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Posto que $\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6x-18+8y+z+1-4z-4-2x+6-6y = 4x+2y-3z-15$, a ecuación implícita do plano é $\pi: 4x+2y-3z-15=0$.

5.b) O vector normal ao plano π é un vector director de r: $\vec{d}_r = \vec{n}_\pi(4,2,-3)$. Obtéñense así as seguintes ecuacións paramétricas de r:

$$r: \begin{cases} x=-1+4\lambda, \\ y=-2+2\lambda, \\ z=\;\;2-3\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

Estude a posición relativa das rectas r e s definidas polas ecuacións $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ e $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

$\vec{d}_r(2,-1,-2)$ e $\vec{d}_s(1,4,3)$ son vectores directores de r e s, respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan. Pódese discernir cal desas dúas situacións se dá a partir das ecuacións paramétricas. En efecto, ao ser

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R},$$

as rectas r e s cortaranse se, e só se, o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu, \end{cases}$ ten solución única e ademais esa solución satisfai tamén a igualdade $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu$.

$$\left.\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu \\ -\lambda = -3 + 4\mu \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 2\lambda - \mu = -3 \\ -\lambda - 4\mu = -3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 2\lambda - \mu = -3 \\ -2\lambda - 8\mu = -6 \end{cases}\right\}.$$

Sumando as dúas últimas ecuacións obtemos $-9\mu = -9$, de onde $\mu = 1$, o que implica $\lambda = 3 - 4\mu = -1$. Como ademais $-1 - 2\lambda = -2 + 3\mu = 1$, conclúese que r e s córtanse no punto $P(3 + 2\lambda, -\lambda, -1 - 2\lambda) = P(1,1,1)$.

Solución alternativa:

$\vec{d}_r(2,-1,-2)$ e $\vec{d}_s(1,4,3)$ son vectores directores de r e s, respectivamente. Como $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4}$, r e s non son paralelas nin coincidentes. Consecuentemente, ou ben se cruzan, ou ben se cortan.

$$P(3,0,-1) \in r, \quad Q(0,-3,-2) \in s, \quad \overrightarrow{PQ}(-3,-3,-1).$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 6 - 24 + 18 - 1 = 0$, de xeito que $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ e $\overrightarrow{PQ}$ son coplanarios e polo tanto as rectas r e s córtanse.

Para calcular o punto de corte, téñense en conta as ecuacións paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = -1 - 2\lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}; \qquad s: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -3 + 4\mu, \\ z = -2 + 3\mu, \end{cases} \mu \in \mathbb{R},$$

e se resolve o sistema lineal $\begin{cases} 3 + 2\lambda = \mu, \\ -\lambda = -3 + 4\mu. \end{cases}$ Basta ver que $\mu = 1$, por exemplo como se fixo arriba (non é necesario calcular λ), de onde se infire que o punto de corte é $P(\mu, -3 + 4\mu, -2 + 3\mu) = P(1,1,1)$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:
Selecciónanse 250 pacientes para estudar a eficacia dun novo medicamento. A 150 deles adminístraselles o medicamento, mentres que o resto son tratados cun placebo. Sabendo que se curaron o 80% dos que tomaron o medicamento, cal é a probabilidade de que, seleccionado un paciente ao azar, tomase o placebo ou non curase?

Solución:

Se $M =$ "tomar o medicamento" e $C =$ "curarse", tense a seguinte táboa de continxencia:

	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{\bar{M}}$	
$\boldsymbol{C}$	$150 \times \mathbf{0.8} = 120$		
$\boldsymbol{\bar{C}}$	30		
	$\mathbf{150}$	100	$\mathbf{250}$

A probabilidade pedida é $P(\bar{M} \cup \bar{C}) = \frac{100+30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = 0.52$.

Solución alternativa:

Se $M =$ "tomar o medicamento" e $C =$ "curarse", sábese que $P(M) = \frac{150}{250} = \frac{3}{5}$ e que $P(C|M) = 0.8 = \frac{4}{5}$.
Sábese tamén que $P(C|M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)}$ e que, en virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{M} \cup \bar{C} = \overline{M \cap C}$. Así pois, a probabilidade pedida é

$$P(\bar{M} \cup \bar{C}) = P(\overline{M \cap C}) = 1 - P(M \cap C) = 1 - P(M)P(C|M) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:
Nunha cadea de montaxe, o tempo empregado para realizar un determinado traballo segue unha distribución normal de media 20 minutos e desviación típica 4 minutos. Calcule a probabilidade de que se faga ese traballo nun tempo comprendido entre 16 e 26 minutos**.**

Solución:

Sexa $X =$ “tempo, en minutos, empregado para realizar o traballo”.

$$X \longrightarrow N(20{,}4) \Longrightarrow Z = \frac{X-20}{4} \longrightarrow N(0{,}1).$$

Logo

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{-4}{4} \leq Z \leq \frac{6}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -1).$$

Como $P(Z \leq 1.5) \approx 0.9332$ e $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$, a probabilidade pedida é

$$P(16 \leq X \leq 26) \approx 0.9332 - 0.1587 = 0.7745.$$

Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA
2020

Código: 20

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só se corrixirán as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} (m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ (m+3)x & + & my & = & 3m+6. \end{cases}$

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se} \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x + y + z = 0$. Pídese a posición relativa de r e π. En caso de que se corten, achar o punto de corte.

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacese no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020
Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:
Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:
a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.
b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ (m+3)x & + & my & = & 3m+6. \end{cases}$

3. Análisis:
Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ bx & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

4. Análisis:
a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{si} \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$
b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

5. Geometría:
Sean r la recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi: -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

6. Geometría:
a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.
b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r: x - 1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

7. Estadística y Probabilidad:
El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

8. Estadística y Probabilidad:
a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.
b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020**	**Código: 20**

MATEMÁTICAS II
CRITERIOS DE AVALIACIÓN

Só puntúan cinco das oito preguntas.

As puntuacións parciais que seguen están ligadas a un determinado xeito de resolver os exercicios, e pode haber outras formas correctas de solucionalos.

1. **Números e Álxebra** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos por despexar X e 0.5 puntos polas dimensións.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por cálculos previos e 0.5 puntos pola obtención de X aplicando a fórmula obtida no apartado anterior.

2. **Números e Álxebra** (2 puntos): 0.5 puntos por cada un dos catro casos que se presentan.

3. **Análise** (2 puntos): 1 punto pola continuidade e 1 punto pola derivabilidade.

4. **Análise** (2 puntos)
   a) 1 punto: 0.5 puntos pola formulación do problema e 0.5 puntos por chegar ao resultado.
   b) 1 punto.

5. **Xeometría** (2 puntos): 1 punto pola posición relativa e 1 punto polo punto de corte.

6. **Xeometría** (2 puntos)
   a) 1 punto.
   b) 1 punto: 0.5 puntos polos elementos que determinan o plano e 0.5 puntos pola ecuación.

7. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos): 1 punto pola táboa de continxencia e 1 punto polo cálculo da probabilidade.

8. **Estatística e Probabilidade** (2 puntos)
   a) 1 punto.
   b) 1 punto: 0.5 puntos por chegar a $P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915$ e 0.5 puntos pola determinación de σ.

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2020

Código: 20

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

1. Números e Álxebra:

Para a ecuación matricial $A^2X + AB = B$, pídese:

a) Despexar X supoñendo que A (e por tanto A^2) é invertible, e dicir cales serían as dimensións de X e de B se A tivese dimensión 4×4 e B tivese 3 columnas.

b) Resolvela no caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) En primeiro lugar, despéxase X:

$$A^2X + AB = B \Leftrightarrow A^2X = B - AB \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1}(B - AB).$$

É certo tamén que $X = (A^{-1})^2(B - AB)$, xa que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Analízanse agora as dimensións: do esquema

$$\underbrace{A^2}_{4\times4}\underbrace{X}_{p\times q}+\underbrace{A}_{4\times4}\underbrace{B}_{r\times3}=\underbrace{B}_{r\times3}$$

dedúcese que $p = r = 4$ e que $q = 3$, conque X e B deben ter dimensión 4×3.

1.b)

- **Cálculo de $\left(A^2\right)^{-1}$**: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A^2 = 10 - 9 = 1$.

  Logo $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Cálculo de $B - AB$**: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, de onde

$$B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Cálculo de X**:

$$X = (A^2)^{-1}(B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II

EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa a 1.b):

Dado que $B=-A$, tense $X=(A^2)^{-1}(B-AB)=(A^2)^{-1}(-A+A^2)=-A^{-1}+I$. Agora, como $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1$, a inversa de A vén dada por $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e entón

$$X = -A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ (m+3)x & + & my & = & 3m+6.\end{cases}$

Solución:

A notación F_i indicará "fila i". Unha expresión do tipo $F_i + \alpha F_j$ (na que $\alpha \in \mathbb{R}$ e i é maior que j) quererá dicir que no seguinte paso vaise cambiar a fila i da matriz polo resultado da operación $F_i + \alpha F_j$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ 0 & m^2+m & 6 \end{array}\right).$$

Así pois, o sistema que temos que estudar equivale este outro:

$$\begin{cases}(m+3)x & - & m^2y & = & 3m, \\ & & (m^2+m)y & = & 6,\end{cases}$$

para o que, ao ser triangular, é doado facer a discusión. Hai que notar que $m^2 + m = m(m+1) = 0$ se, e só se, $m \in \{-1,0\}$ e que $m + 3 = 0$ se, e só se, $m = -3$. Conseguintemente:

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3,-1,0\}$, entón o sistema é compatible determinado, xa que a súa única solución é
$$y = \frac{6}{m^2+m}, \quad x = \frac{3m + m^2y}{m+3}.$$
- Se $m = -3$, o sistema triangular redúcese a $\begin{cases}-9y & = & -9, \\ 6y & = & 6,\end{cases}$ e é por tanto compatible indeterminado (ten infinitas solucións), porque calquera par $\begin{cases}x = \lambda, \\ y = 1,\end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, é solución.
- Se $m \in \{-1,0\}$ o sistema é incompatible (non ten solución), porque a segunda ecuación queda $0 = 6$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

Solución alternativa:

Sexan $A=\begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ e $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $m+3$ e m non se anulan á vez, cúmprese que $1\le \operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^* \le 2$ e tamén, conseguintemente, que $\operatorname{rank} A = 1$ se, e só se, $\det A = 0$. Dado que

$$\det A = \begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m^2+3m+m^3+3m^2 = m^3+4m^2+3m = m(m^2+4m+3) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} \Leftrightarrow m \in \{-3,-1,0\},$$

a discusión do sistema queda como segue:

- Caso $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0\}$: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 =$ n.º de incógnitas, polo que o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
- Caso $m=-3$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$, co cal tamén $\operatorname{rank} A^* = 1$. Ao ser $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 1 <$ n.º de incógnitas, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m=-1$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m=0$: $\operatorname{rank} A = 1$ e $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, sábese que $\operatorname{rank} A^* = 2 > \operatorname{rank} A$, situación na que, de novo, o sistema é incompatible (non ten solución).

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

3. Análise:

Determine os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} \frac{a-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ sexa, primeiro continua, e logo derivable.

Solución:

A función f é derivable, e por tanto continua, en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ para valores calquera de a e b; só hai que facer entón o estudo no punto $x = 0$. Debido a que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{a-\cos x}{x}$ non é finito cando $a \neq 1$, f non pode ser continua neses casos. Fixemos pois $a = 1$ e consideremos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

- Continuidade: nótese que $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sin x = 0$ (onde se usou a regra de L'Hôpital), e, para calquera valor de $b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} bx = 0$. Por conseguinte, f é continua en $x = 0$ se, e soamente se, $(a, b) \in \{1\} \times \mathbb{R}$.
- Derivabilidade: séguese a asumir que $a = 1$, co cal f é continua (se non é continua, non pode ser derivable). Temos polo tanto que
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2} & \text{se} \quad x < 0, \\ b & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$
Como f é continua, $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x + x\cos x - \sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou a regra de L'Hôpital) e $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} b = b$, a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

Solución alternativa para o estudo da derivabilidade (empregando a definición de derivada):

Sabemos que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0, \\ bx & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$ xa que a ten que valer 1. Agora, como $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (onde se usou dúas veces a regra de L'Hôpital) e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{bx}{x} = b$, conclúese que a función f é derivable en $x = 0$ se, e soamente se, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

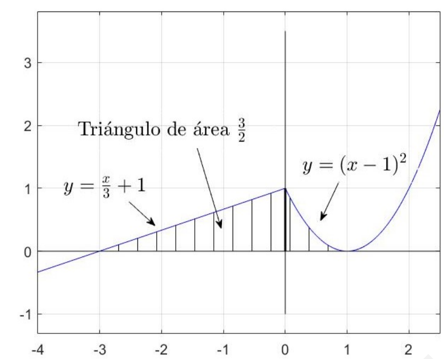
4. Análise:

a) Calcule a área da rexión encerrada polo eixe X e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 & \text{se} \quad x < 0, \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Solución:

4.a)



Tendo en conta que $y = \frac{x}{3} + 1$ é a recta que pasa por $(-3,0)$ e por $(0,1)$ e que $y = (x-1)^2$ é a parábola de vértice $(1,0)$ que pasa polos puntos $(0,1)$ e $(2,1)$, chégase ao debuxo da esquerda, onde está raiada a rexión cuxa área se pide.

Agora é claro que esa área virá dada por

$$A = \frac{3}{2} + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{3}{2} + \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{9+2}{6} = \frac{11}{6}\ \mathrm{u}^2 = 1.8\overline{3}\ \mathrm{u}^2,$$

onde u indica "unidade de lonxitude".

4.b) Mediante o cambio de variable

$$z = x^2 - 1, \;\; dz = 2x\,dx,$$

obtense

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{2}\frac{z^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

5. Xeometría:

Sexan r a recta de vector director $\vec{d}_r(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ e $\pi: -2x+y+z=0$. Pídese a posición relativa de r e π. En caso de que se corten, achar o punto de corte.

Solución:

O vector $\vec{n}_\pi(-2,1,1)$ é normal ao plano π. Como $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = -2+3=1 \neq 0$, os vectores $\vec{d}_r$ e $\vec{n}_\pi$ non son perpendiculares, e polo tanto r e π córtanse nun punto.
As ecuacións paramétricas de r son

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda, \\ y = \quad 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = \quad 3\lambda, \end{cases}$$

Substituíndo na ecuación do plano obtense o valor de λ que proporcionará o punto de corte:

$$-2(1+\lambda)+3\lambda = 0 \Leftrightarrow -2+\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Téñense así os valores seguintes:

$$x = 1+\lambda = 3,$$
$$y = 0,$$
$$z = 3\lambda = 6,$$

é dicir, r e π córtanse no punto $Q(3,0,6)$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

6. Xeometría:

a) Calcule k sabendo que os vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ e $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa por $P(1,0,0)$ e contén a $r: x-1=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{3}$.

Solución:

6.a) Ao ser coplanarios, son linealmente dependentes, de xeito que o valor de k pode ser calculado como segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4k-4=0 \Leftrightarrow k=1.$$

6.b) $Q(1,0,-1) \in r$ e $\vec{d}_r(1,-4,3)$ é vector director de r. O plano π pasa por $P(1,0,0)$ e está xerado por $\vec{d}_r(1,-4,3)$ e $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$, é dicir,

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x-4+y=0 \Leftrightarrow \pi: 4x+y-4=0.$$

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

7. Estatística e Probabilidade:

O 57% dos estudantes matriculados na Universidade de Cambridge son naturais do Reino Unido e, de entre todos eses, o 83% aproban con honores. Ademais, a porcentaxe global de aprobados con honores é do 80%. Calcular a probabilidade de que un estudante elixido ao azar non nacese no Reino Unido sabendo que aprobou con honores.

Solución:

Se $RU =$ “ser natural do Reino Unido” e $AH =$ “aprobar con honores”, tense a seguinte táboa de continxencia:

	$\boldsymbol{AH}$	$\overline{\boldsymbol{AH}}$	
$\boldsymbol{RU}$	$57 \times \mathbf{0.83} = 47.31$		$100 \times \mathbf{0.57} = 57$
$\overline{\boldsymbol{RU}}$	32.69		
	$100 \times \mathbf{0.80} = 80$		$\mathbf{100}$

A probabilidade pedida é polo tanto $P(\overline{RU}|AH) = \frac{32.69}{80} = 0.408625$.

MATEMÁTICAS II
EXEMPLOS DE RESPOSTAS/SOLUCIÓNS

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha determinada poboación de árbores, o 20% teñen máis de 30 anos. Se se elixen 40 árbores ao azar, calcule a probabilidade de que soamente 4 deles teñan máis de 30 anos. O número total de árbores é tan grande que se pode asumir elección con substitución.

b) Se X segue unha distribución normal de media 15 e $P(X \leq 18) = 0.6915$, cal é a desviación típica?

Solución:

Sexa $X =$ "número de árbores de máis de 30 anos, de entre os 40".

$$X \longrightarrow B(n,p), \quad \text{con } n = 40 \text{ e } p = 0.2.$$

Logo $q = 1 - p = 0.8$, co que a probabilidade pedida é

$$P(X=4) = \binom{40}{4} p^4 q^{36} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(0.2)^4(0.8)^{36} = 10 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot (0.2)^4(0.8)^{36}$$
$$= 91300 \cdot (0.2)^4(0.8)^{36} \approx 0.0475.$$

8.b)

$$X \longrightarrow N(15,\sigma) \Longrightarrow Z = \frac{X-15}{\sigma} \longrightarrow N(0,1).$$

Polo tanto,

$$P(X \leq 18) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{18-15}{\sigma}\right) = 0.6915 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.6915.$$

Indo agora á táboa da distribución $N(0,1)$, vese que $\frac{3}{\sigma} \approx 0.5$, de onde $\sigma \approx \frac{3}{0.5} = 6$.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **XUÑO 2019**	**Código: 20**

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A+I$ é invertible, despexa X na ecuación $A-X=AX$.

b) Se $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1)+C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.

b) Se $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ ax+b & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty),\end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.

c) Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X, a recta $x=4$ e a gráfica de $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty).\end{cases}$

3. Pídese:

a) Calcular o ángulo do intervalo $[0°, 90°]$ que forman os vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1,-3,0)$ e é perpendicular á recta $\begin{cases}x - y + 2z = 1,\\ \quad\; y - z = 0.\end{cases}$

c) Calcular a distancia do punto $Q(1,1,1)$ ao plano $\pi: -x+y+z+4=0$ e o punto simétrico de Q respecto a π.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.

b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases}2x - y + 3z = 0,\\ my + (3-m)z = -6,\\ 2x - y + mz = 6.\end{cases}$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m=0$ e $m=4$.

2. Considérese a función $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$. Pídese:

a) Calcular os límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

3. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: mx-y+2=0$ e $\pi_2: 2x+3y=0$ en función do parámetro m.

b) Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(0,1,0)$.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,2,3)$ con respecto ao plano $\pi: -x+z=0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ e $P(A\cup B)$ é o triplo de $P(A)$.

b) Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media 25℃ e desviación típica 4℃. Calcula a probabilidade de que a temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre 21℃ e 27.2℃. En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade **Código: 20**

XUÑO 2019

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=AX$.

b) Si $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x\; dx = x(\ln x - 1)+C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b) Si $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{si} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ ax+b & \text{si} \quad x\in(\mathrm{e},\infty),\end{cases}$ di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que f sea derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta $x=4$ y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{si} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{si} \quad x\in(\mathrm{e},\infty).\end{cases}$

3. Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0°, 90°]$ que forman los vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\vec{v}\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases}x - y + 2z = 1,\\ \phantom{x -{}} y - z = 0.\end{cases}$

c) Calcular la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi\colon -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto a π.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases}2x - y + 3z = 0,\\ my + (3-m)z = -6,\\ 2x - y + mz = 6.\end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m=0$ y $m=4$.

2. Considérese la función $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$. Se pide:

a) Calcular los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1\colon mx-y+2=0$ y $\pi_2\colon 2x+3y=0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi\colon -x+z=0$.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media $25℃$ y desviación típica $4℃$. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre $21℃$ y $27.2℃$. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

ABAU

CONVOCATORIA DE XUÑO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto.

b) 1 punto.

2) a) 1 punto.

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola comprobación mediante derivación.

b) 1 punto.

- 0,5 puntos pola condición de continuidade.
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade.

c) 1 punto.

- 0,25 puntos pola xustificación dos límites de integración.
- 0,5 puntos pola escritura da área como suma de integrais e obtención das primitivas.
- 0,25 puntos polo uso da regra de Barrow.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 1.25 puntos.

   b) 0.75 puntos.

2) a) 1 punto.

   b) 1 punto.

   c) 1 punto.

3) a) 1 punto.

   b) 1 punto.

   c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

   b) 1 punto.

ABAU

CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto.

b) 1 punto.

2) a) 1 punto.

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola comprobación mediante derivación.

b) 1 punto.

- 0,5 puntos pola condición de continuidade.
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade.

c) 1 punto.

- 0,25 puntos pola xustificación dos límites de integración.
- 0,5 puntos pola escritura da área como suma de integrais e obtención das primitivas.
- 0,25 puntos polo uso da regra de Barrow.

3) a) 1 punto.

b) 1 punto.

c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 1.25 puntos.

   b) 0.75 puntos.

2) a) 1 punto.

   b) 1 punto.

   c) 1 punto.

3) a) 1 punto.

   b) 1 punto.

   c) 1 punto.

4) a) 1 punto.

   b) 1 punto.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A+I$ é invertible, despexa X na ecuación $A-X=AX$.

b) Se $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=AX$.

Solución:

1.a) $A-X=AX \Leftrightarrow A=AX+X \Leftrightarrow A=(A+I)X \Leftrightarrow X=(A+I)^{-1}A.$

1.b) Claramente, $A+I=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Posto que $\det(A+I)=4+1=5$, tense

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X=(A+I)^{-1}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvase a idea seguinte: calcular α,β,γ e δ tales que

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x\ dx = x(\ln x-1)+C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.

b) Se $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ ax+b & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty),\end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.

c) Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X, a recta $x=4$ e a gráfica de $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{se} \quad x\in(0,\mathrm{e}],\\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{se} \quad x\in(\mathrm{e},\infty).\end{cases}$

Solución:

2.a) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$u=\ln x,\quad du=\frac{1}{x}dx,$$
$$dv=dx,\quad v=x,$$

tense $\int \ln x\ dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$.

Por outra banda,

$$(x(\ln x-1)+C)'=\big(x(\ln x-1)\big)'=\ln x-1+x\frac{1}{x}=\ln x.$$

MATEMÁTICAS II

2.b) Estúdanse a continuidade e a derivabilidade no único punto conflitivo, que é $x = \mathrm{e}$.

Continuidade:

$f(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} = 1$, $\quad \lim_{x\uparrow \mathrm{e}} f(x) = \lim_{x\uparrow \mathrm{e}} \ln x = \ln \mathrm{e} = 1$, $\quad \lim_{x\downarrow \mathrm{e}} f(x) = \lim_{x\downarrow \mathrm{e}} (ax+b) = a\mathrm{e} + b$. En consecuencia, f é continua se, e soamente se, $a\mathrm{e} + b = 1$.

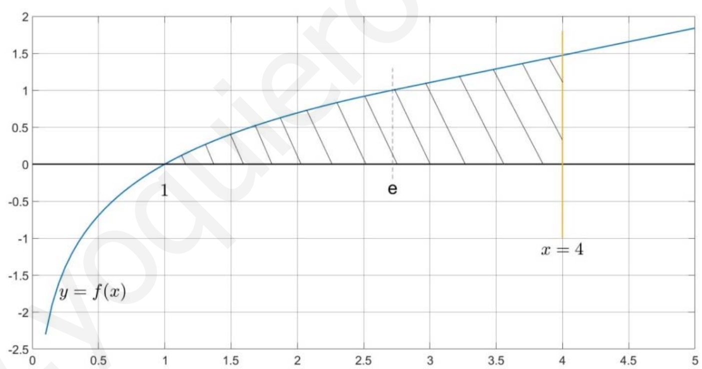
Derivabilidade:

Nótese en primeiro lugar que, para que f sexa derivable, a condición $a\mathrm{e} + b = 1$ tense que cumprir, xa que a continuidade é condición necesaria para a derivabilidade. Por outra banda, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \in (0, \mathrm{e}), \\ a & \text{se} \quad x \in (\mathrm{e}, \infty), \end{cases}$ de onde $\lim_{x\uparrow \mathrm{e}} f'(x) = \lim_{x\uparrow \mathrm{e}} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $\lim_{x\downarrow \mathrm{e}} f'(x) = \lim_{x\downarrow \mathrm{e}} a = a$.

Conclúese que f é derivable se, e soamente se, $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e $b = 0$.

Alternativa para o estudo da derivabilidade: substitúase b por $1 - a\mathrm{e}$ na expresión de f (xa que non pode ser derivable se non é continua) e empréguese a definición de derivada. É dicir, compróbese para que valor ou valores de a os límites $\lim_{x\uparrow \mathrm{e}} \frac{f(x)-f(\mathrm{e})}{x-\mathrm{e}}$ e $\lim_{x\downarrow \mathrm{e}} \frac{f(x)-f(\mathrm{e})}{x-\mathrm{e}}$ existen e son iguais.

2.c)



De acordo coa figura, a área pedida é a seguinte (o adxectivo "encerrada" obríganos a considerar a rexión raiada):

$\boxed{\ln \mathrm{e} = 1, \ln 1 = 0}$

$A = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, dx + \int_{\mathrm{e}}^{4} \frac{x}{\mathrm{e}} \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^{\mathrm{e}} + \left[\frac{x^2}{2\mathrm{e}}\right]_{\mathrm{e}}^{4} = 1 + \frac{16}{2\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} = 1 + \frac{8}{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{2} = \frac{2\mathrm{e}+16-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}} \ \mathrm{u}^2 \approx 2.5839 \ \mathrm{u}^2$,

onde u indica "unidade de lonxitude".

3. Pídese:

a) Calcular o ángulo do intervalo $[0°, 90°]$ que forman os vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

MATEMÁTICAS II

b) Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1,-3,0)$ e é perpendicular á recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ \quad\; y - z = 0. \end{cases}$

c) Calcular a distancia do punto $Q(1,1,1)$ ao plano $\pi: -x+y+z+4=0$ e o punto simétrico de Q respecto a π.

Solución:

3.a) Se $\cdot$ denota produto escalar de vectores, $|\ \ |$ valor absoluto e $\|\ \ \|$ norma euclidiana, sábese que o ángulo pedido α está determinado pola ecuación $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, no sentido de que é o único ángulo α do intervalo [0°,90°] que satisfai esa igualdade.

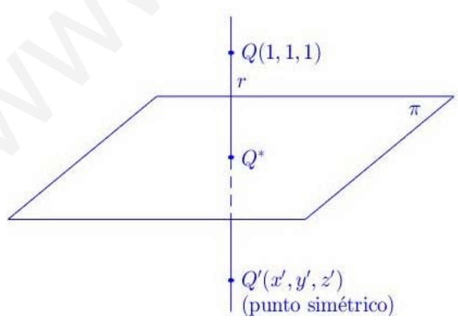
Dado que

- $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ e
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$,

chégase a que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, de onde $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60\,°$.

3.b) Chamemos π ao plano pedido e r á recta dada. Pódese obter un vector normal a π a partir de dous puntos de r: $R(1,0,0), S(0,1,1) \in r$, e en consecuencia $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ é normal a π. Alternativamente, pódese obter $\vec{n}_\pi$ do produto vectorial $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Como π pasa por $P(1,-3,0)$, a súa ecuación é $\pi: -(x-1)+(y+3)+z=0$, e como $-(x-1)+(y+3)+z = -x+1+y+3+z = -x+y+z+4$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: -x+y+z+4=0$.

3.c) $\mathrm{d}(Q,\pi) = \frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.8868$. Pasemos á obtención do punto simétrico.



A recta r que pasa por $Q(1,1,1)$ e é perpendicular a $\pi: -x+y+z+4=0$ vén dada por

$$r: \begin{cases} x = 1-\lambda, \\ y = 1+\lambda, \\ z = 1+\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Cálculo de $Q^* = r \cap \pi$</u>:

$$-(1-\lambda)+1+\lambda+1+\lambda+4$$
$$= -1+\lambda+1+\lambda+1+\lambda+4$$
$$= 3\lambda+5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3},$$

de onde $Q^*(x,y,z)$ con $x = 1+\frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ e $y = z = 1-\frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$, é dicir, $Q^*\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

MATEMÁTICAS II

Cálculo de $Q'(x', y', z')$, punto simétrico pedido:

$$\frac{1+x'}{2}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow 3+3x'=16 \Leftrightarrow 3x'=13 \Leftrightarrow x'=\frac{13}{3},$$

$$\frac{1+y'}{2}=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3+3y'=-4 \Leftrightarrow 3y'=-7 \Leftrightarrow y'=-\frac{7}{3},$$

$$z'=y'.$$

En definitiva, $Q'\left(\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.

b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

Solución:

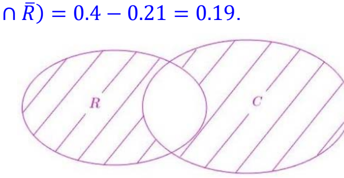
4.a) Damos nomes aos sucesos: $R =$ “ter rosas” e $C =$ “ter camelias”.

Sabemos que $P(C) = 0.4$, $P(R) = 0.35$ e $P(C \cap R) = 0.21$. As probabilidades pedidas son, por orde, as seguintes:

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0.4 + 0.35 - 0.21 = 0.54$.
- En virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{C} \cap \bar{R} = \overline{C \cup R}$. Consecuentemente, $P(\bar{C} \cap \bar{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0.54 = 0.46$.
- $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0.21}{0.35} = 0.6$.
- $P(R|C) = \frac{P(C \cap R)}{P(C)} = \frac{0.21}{0.4} = 0.525$.
- $P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big) = P(R \cap \bar{C}) + P(C \cap \bar{R})$, xa que os sucesos $R \cap \bar{C}$ e $C \cap \bar{R}$ son incompatibles. De $P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap \bar{C})$ dedúcese que $P(R \cap \bar{C}) = 0.35 - 0.21 = 0.14$, e de $P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap \bar{R})$ que $P(C \cap \bar{R}) = 0.4 - 0.21 = 0.19$. Por último, $P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big) = 0.14 + 0.19 = 0.33$.

Alternativa para o cálculo de $P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big)$ (ver debuxo):

$P\big((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})\big) = P(R \cup C) - P(R \cap C) = 0.54 - 0.21 = 0.33$.



4.b) $X =$ “n.º de persoas nacidas no mes de xaneiro, de entre as 50”.

$X \to B\left(50, \frac{1}{12}\right)$, é dicir, X segue unha distribución binomial de parámetros $n = 50$ e $p = \frac{1}{12} = 0.08\bar{3}$; logo $q = 1 - p = \frac{11}{12} = 0.91\bar{6}$. Pídese $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

OPCIÓN A

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

Posto que $P(X=0)=\binom{50}{0}p^0q^{50}=\left(\frac{11}{12}\right)^{50}\approx 0.0129$ e $P(X=1)=\binom{50}{1}p^1q^{49}=50\frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{49}\approx 0.0586$, téñense sucesivamente $P(X=0)+P(X=1)\approx 0.0129+0.0586=0.0715$ e $P(X\geq 2)\approx 1-0.0715=0.9285$.

Nota: se se toma $p=\frac{31}{365}\approx 0.0849$, obtense $P(X\geq 2)\approx 0.9333$.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 0, \\ & & my & + & (3-m)z & = & -6, \\ 2x & - & y & + & mz & = & 6. \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 4$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & m-3 & 6 \end{array}\right),$$ polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 0, \\ & & my & + & (3-m)z & = & -6, \\ & & & & (m-3)z & = & 6. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z, seguindo co de y e terminando co de x. Sempre que $m \neq 3$, téñense que $z = \frac{6}{m-3}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 0$, de onde se infire á súa vez que $y = 0$ cando, ademais de ser $m \neq 3$, é $m \neq 0$. Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z = \frac{6}{m-3}$, $y = 0$, $x = -\frac{3z}{2}$.
- Caso $m = 3$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 6$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & 3z & = & 0, \\ & & & & 3z & = & -6, \\ & & & & -3z & = & 6, \end{cases}$$

de onde $z = -2$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = \frac{\lambda+6}{2}$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = 2m$ e $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -m+3$ non se anulan á vez, $2 \le \operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} A^* \le 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2(3-m) - 6m + 2(3-m) = 2m^2 - 6m = 2m(m-3),$$

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{0,3\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas.
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$, tense $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 <$ n.º de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = 3$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36 + 12 - 12 = 36 \neq 0$, tense $\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \frac{\lambda+6}{2}, \\ y = \lambda, \\ z = -2, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 4$, a solución é $z = \frac{6}{m-3} = 6$, $y = 0$ e $x = -\frac{3z}{2} = -\frac{18}{2} = -9$. (Ver apartado 1.a).)

Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 4$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Considérese a función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Pídese:

a) Calcular os límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

Solución:

$\boxed{\infty \cdot 0 \text{ (indeterminación)}}$ $\boxed{\text{IND. } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'Hôpital}}$ $\boxed{\text{IND. } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'Hôpital}}$

2.a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Falando con rigor, a regra de L'Hôpital dinos que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe e vale 0 porque $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x}$ existe e vale 0.

No segundo límite non hai indeterminación: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \infty \cdot \infty = \infty$.

2.b) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. A derivada $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$ ten o signo de $x(2 - x)$, xa que e^{-x} é sempre positivo. Logo f decrece estritamente en $(-\infty, 0)$, crece estritamente en $(0,2)$ e decrece estritamente en $(2, \infty)$.

SIGNO DE f'.

Ao ser f continua, ten un mínimo relativo estrito en $x = 0$ e un máximo relativo estrito en $x = 2$. Non ten outros extremos.

MATEMÁTICAS II

Pasamos agora ao estudo das posibles inflexións. $f'(x) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}$, de onde $f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x} - (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2)\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$. Polo tanto, f'' ten o signo de $x^2 - 4x + 2$, cuxas raíces son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Agora podemos marcar no debuxo seguinte o signo de f'':

SIGNO DE f''.

(Se houbera dúbidas, bastaría comprobar o signo de f'' nun punto calquera de cada un dos tres intervalos de interese.)

Esta análise dinos que f é convexa en $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, cóncava en $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ e de novo convexa en $(2+\sqrt{2}, \infty)$. A función f presenta polo tanto dous puntos de inflexión: en $x = 2-\sqrt{2}$ e en $x = 2+\sqrt{2}$.

2.c) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x dx, \\ dv = \mathrm{e}^{-x} dx, & v = -\mathrm{e}^{-x}, \end{array}$$

tense

$$\int f(x)dx = \int x^2 \mathrm{e}^{-x} dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x} dx.$$

Usando de novo o método de integración por partes, esta vez con

$$\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \mathrm{e}^{-x} dx, & v = -\mathrm{e}^{-x}, \end{array}$$

chégase a que $\int x\mathrm{e}^{-x} dx = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x} dx$.

Consecuentemente,

$$\int f(x)dx = \int x^2\mathrm{e}^{-x} dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left\{-x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x} dx\right\} = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C$$
$$= (-x^2 - 2x - 2)\mathrm{e}^{-x} + C = -(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} + C.$$

3. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función do parámetro m.

b) Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(0,1,0)$.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,2,3)$ con respecto ao plano $\pi: -x + z = 0$.

Solución:

3.a) Os planos nunca coinciden, xa que $O(0,0,0) \in \pi_2 \setminus \pi_1$ para calquera valor de m. Agora, como $\vec{n}_{\pi_1}(m,-1,0)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(2,3,0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2,

MATEMÁTICAS II

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3},$$

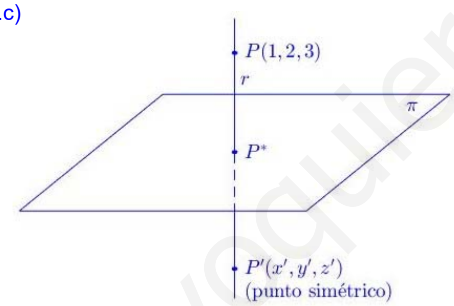
o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Posto que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, tense que $\operatorname{rank} A^* = 2$ para calquera valor de m. Por outra banda, $\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$. Segundo esta análise:

- Se $m = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{rank} A = 1 < \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) Os vectores $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ e $\overrightarrow{AC}(0,1,0)$ son xeradores do plano pedido, ao que chamaremos π. Ademais, $A(0,0,0) \in \pi$, polo que $\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Como $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - x$, a ecuación implícita do plano é $\pi: -x + z = 0$.

3.c)



A recta que pasa por $P(1,2,3)$ e é perpendicular a $\pi: -x + z = 0$ é

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Cálculo de $P^* = r \cap \pi$</u>:

$$-(1-\lambda) + 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1,$$

de onde $P^*(x,y,z)$ con $x = 1 - (-1) = 2$, $y = 2$ e $z = 3 + (-1) = 2$, é dicir, $P^*(2,2,2)$.

<u>Cálculo de $P'(x',y',z')$, punto simétrico pedido</u>:

$$\frac{1 + x'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + x' = 4 \Leftrightarrow x' = 3,$$

$$\frac{2 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 2,$$

$$\frac{3 + z'}{2} = 2 \Leftrightarrow 3 + z' = 4 \Leftrightarrow z' = 1.$$

En definitiva, $P'(3,2,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A \cup B)$ é o triplo de $P(A)$.

b) Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media 25℃ e desviación típica 4℃. Calcula a probabilidade de que a

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre $21℃$ e $27.2℃$. En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

Solución:

4.a) Temos $3P(A) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, de onde en primeira instancia se obtén $2P(A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.2 = 0.6$ e, en segunda, $P(A) = 0.3$.

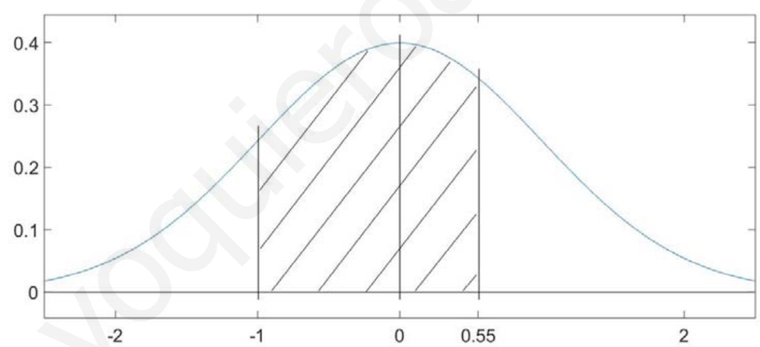
4.b) $X =$ "temperatura máxima dun día do mes de xullo".

$$X \to N(25{,}4) \Longrightarrow Z = \frac{X - 25}{4} \to N(0{,}1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(21 \le X \le 27.2) &= P\left(\frac{21 - 25}{4} \le Z \le \frac{27.2 - 25}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 0.55) \\ &= P(Z \le 0.55) - P(Z < -1) = P(Z \le 0.55) - P(Z > 1) \\ &= P(Z \le 0.55) - \{1 - P(Z \le 1)\} \approx 0.7088 - 1 + 0.8413 = 0.5501 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida. Espérase polo tanto que en $0.5501 \times 31 \approx 17$ días do mes a temperatura máxima estea comprendida entre $21℃$ e $27.2℃$.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-1 \le Z \le 0.55)$.

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA
USC

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

Código: 20

XULLO 2019

MATEMÁTICAS II

(O/A estudante debe responder soamente as preguntas dunha das opcións. A puntuación máxima por preguntas é a seguinte: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

3. Pídese:

a) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ e $C(8,1,m)$ estean aliñados.

c) Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1,2,1)$ e $Q(8,1,1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 2$.

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y, obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.

b) Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

3. Pídese:

a) Para o plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r.

b) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2: x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razoa se A e B son ou non sucesos independentes.

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade **Código: 20**

XULLO 2019

MATEMÁTICAS II

(El/La estudiante debe responder solamente las preguntas de una de las opciones. La puntuación máxima por preguntas es la siguiente: 1.ª pregunta: **2 puntos**; 2.ª pregunta: **3 puntos**; 3.ª pregunta: **3 puntos**; 4.ª pregunta: **2 puntos**).

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que deben tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(8,1,1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1,1,1)$.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de $\frac{2}{3}$. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.02 cm.

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} x - y + 3z = m, \\ my - 2z = -2, \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m. \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

3. Se pide:

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π^* que es perpendicular a π y contiene a r.

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$, y calcular el ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque gol desde el punto de penalti es $p = 0.7$. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

ABAU

CONVOCATORIA DE XULLO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

a) **0.75 puntos.**

b) **1.25 puntos.**

2)

a) **1 punto.**

b) **2 puntos:**

i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.

ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.

iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

c) **1 punto.**

4)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

OPCIÓN B

1)

- **a) 1.25 puntos.**
- **b) 0.75 puntos.**

2)

- **a) 2 puntos.**
- **b) 1 punto.**

3)

- **a) 1.5 puntos.**
- **b) 1.5 puntos.**

4)

- **a) 0.75 puntos.**
- **b) 1.25 puntos.**

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Despexa X na ecuación $XA + B = C$, sabendo que A é unha matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

1.a) $XA + B = C \Leftrightarrow XA = C - B \Leftrightarrow X = (C - B)A^{-1}$.

1.b) $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Posto que $\det A = 8 - 3 = 5$, tense

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (C - B)A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvase a idea seguinte: calcular $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ e μ tales que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = x^2 \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dous dos seus vértices son a orixe $O(0,0)$ e o punto $P(1,3)$, un dos seus lados está sobre o eixe X e outro sobre a tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$. Pídese calcular as coordenadas do terceiro vértice, debuxar o triángulo e calcular, por separado, a área das dúas rexións nas que o triángulo queda dividido pola parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

2.a) Nótese que $\mathrm{Dom}\, f = (0, \infty)$. Cómpre estudar o signo de

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1),$$

que coincide co signo de $2 \ln x + 1$ en $\mathrm{Dom}\, f$. Agora ben, $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$, xa que a función exponencial crece estritamente. Chegados a este punto, é obvio que $2 \ln x + 1 < 0$ se, e soamente se, $0 < x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

SIGNO DE f'.

MATEMÁTICAS II

Polo tanto, f decrece estritamente no intervalo $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ e crece estritamente no intervalo $\left(e^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$. Posto que se trata dunha función continua, presenta un mínimo absoluto (logo relativo) en $x = e^{-\frac{1}{2}}$. Non hai outros extremos.

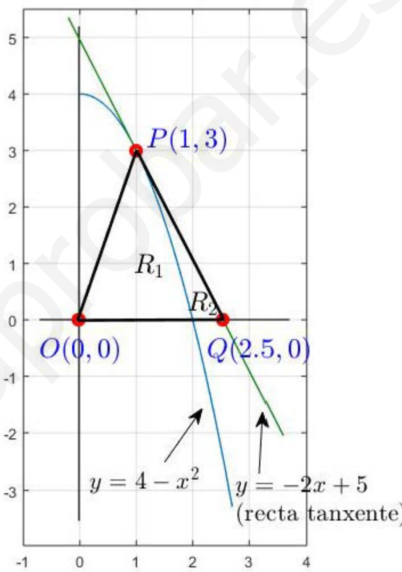
2.b) $y(x) = 4 - x^2 \Longrightarrow y'(x) = -2x \Longrightarrow y'(1) = -2$. Logo a ecuación da recta tanxente en $P(1,3)$ á gráfica da parábola $y = 4 - x^2$ é

$$y(x) = -2(x-1) + 3 = -2x + 2 + 3 = -2x + 5.$$

O vértice pedido, ao que chamaremos Q, é o punto de corte desa recta co eixe X:

$$\left[-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5\right] \Rightarrow Q(2.5, 0).$$

Á dereita móstrase o debuxo do triángulo, onde tamén están marcadas as rexións cuxas áreas hai que calcular: R_1 e R_2. É claro que a parábola corta ao eixe X positivo en $x = 2$ (xa que aí $4 - x^2 = 0$).



Posto que $R_1 = T \cup R^*$, con

- T un triángulo de base 1 e altura 3 e
- R^* a rexión baixo a gráfica de $y = 4 - x^2$ (e sobre o eixe X) desde $x = 1$ hasta $x = 2$,

a área de R_1 pódese calcular do seguinte xeito (u indicará "unidade de lonxitude"):

T e R^* non se solapan

$$\text{área}(R_1) = \text{área}(T) + \text{área}(R^*) = \frac{1 \cdot 3}{2} + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{3}{2} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$+ \left\{8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{3} = \frac{9 + 24 - 14}{6} = \frac{19}{6}\ \text{u}^2 = 3.1\bar{6}\ \text{u}^2.$$

Finalmente,

$$\text{área}(R_2) = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} = \frac{45 - 38}{12} = \frac{7}{12}\ \text{u}^2 = 0.58\bar{3}\ \text{u}^2.$$

3. Pídese:

a) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ e $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular o valor que deben tomar k e m para que os puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1,2,1)$ e $C(8,1,m)$ estean aliñados.

c) Obter as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(-1,2,1)$ e $Q(8,1,1)$ e a ecuación implícita do plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Como $\vec{n}_{\pi_1}(1, m, 1)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(m, 1,1)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2,

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = 1,$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ademais, podemos engadir que non son coincidentes cando $m = 1$, xa que nese caso $P(0,0,-2) \in \pi_1 \setminus \pi_2$.

Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right)$. Posto que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2$ non se anulan á vez, $\operatorname{rank} A^* = 2$ para calquera valor de m. Por outra banda, $\operatorname{rank} A = 1$ cando $m = 1$ (as dúas filas de A son iguais e non nulas) e $\operatorname{rank} A = 2$ cando $m \neq 1$, xa que $\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 \neq 0$. Segundo esta análise:

- Se $m = 1$, $\operatorname{rank} A = 1 < \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) A, B e C son, para tódolos valores dos parámetros k e m, puntos distintos, que estarán polo tanto aliñados se, e soamente se, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Posto que $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1-k \\ m-1 \end{pmatrix}$, tense que

$$A, B \text{ e } C \text{ están aliñados} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{8} = \frac{2-k}{1-k} \text{ e } m - 1 = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow [-1 + k = 16 - 8k \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow [9k = 17 \text{ e } m = 1] \Leftrightarrow \left[k = \frac{17}{9} \text{ e } m = 1\right].$$

3.c) $\vec{d}_r = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é vector director da recta r, a cal ademais pasa polo punto $P(-1,2,1)$, polo que as ecuacións paramétricas pedidas son

$$r: \begin{cases} x = -1 + 9\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1, \end{cases}$$

Chamemos π o plano perpendicular a r que pasa polo punto $R(1,1,1)$. Como $\vec{n}_\pi = \vec{d}_r(9, -1,0)$ é un vector normal a π, tense $\pi: 9(x - 1) - (y - 1) = 0$. Tendo en conta que $9(x - 1) - (y - 1) = 9x - 9 - y + 1 = 9x - y - 8$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: 9x - y - 8 = 0$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de $\frac{2}{3}$. Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?

MATEMÁTICAS II

b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

Solución:

4.a) Damos nomes aos sucesos: $R =$ "o mozo rega" e $S =$ "a roseira sobrevive".

Sabemos que $P(R) = \frac{2}{3}$ (logo $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$), $P(S|R) = 0.7$ e $P(S|\bar{R}) = 0.2$.

Pídese $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R}\cap S)}{P(S)}$.

- De $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S\cap R)}{P(R)} = \frac{P(S\cap R)}{\frac{2}{3}}$, dedúcese que $P(S\cap R) = \frac{2}{3}\cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$.
- De $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S\cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S\cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$, dedúcese que $P(S\cap \bar{R}) = \frac{1}{3}\cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$.

Polo tanto, $P(S) = P(S\cap R) + P(S\cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$ e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R}\cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

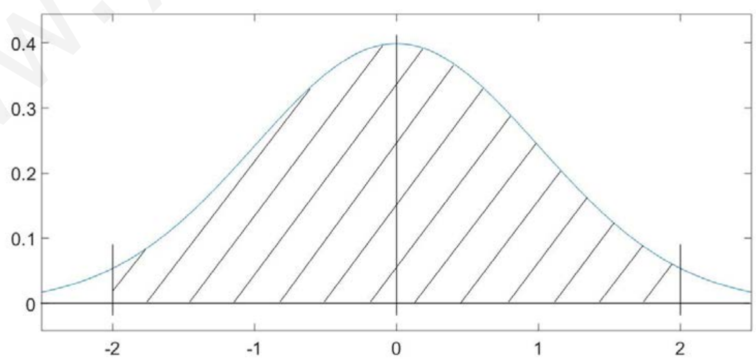
4.b) $X =$ "grosor das pezas".

$$X \to N(8{,}0.01) \Longrightarrow Z = \frac{X-8}{0.01} \to N(0{,}1).$$

Logo

$$P(7.98 \le X \le 8.02) = P\left(\frac{7.98-8}{0.01} \le Z \le \frac{8.02-8}{0.01}\right) = P(-2 \le Z \le 2)$$
$$= P(Z \le 2) - P(Z < -2) = P(Z \le 2) - P(Z > 2)$$
$$= P(Z \le 2) - \{1 - P(Z \le 2)\} = 2P(Z \le 2) - 1 \approx 2\cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

é a probabilidade pedida.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-2 \le Z \le 2)$.

OPCIÓN A

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & m, \\ & & my & - & 2z & = & -2, \\ x & + & (m-1)y & + & (m+3)z & = & m. \end{array}\right.$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m=0$ e $m=2$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & m & m & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 0 & 0 & m+2 & 2 \end{array}\right)$$

polo que o sistema dado equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & m, \\ & & my & - & 2z & = & -2, \\ & & & & (m+2)z & = & 2. \end{array}\right.$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z, seguindo co de y e terminando co de x. Sempre que $m \neq -2$, téñense que $z=\frac{2}{m+2}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 2z-2 = \frac{4}{m+2} - 2 = \frac{-2m}{m+2}$, de onde se infire á súa vez que $y = \frac{-2}{m+2}$ cando, ademais de ser $m \neq -2$, é $m \neq 0$. Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución). A solución é a seguinte: $z=\frac{2}{m+2}$, $y=\frac{-2}{m+2}$, $x = y - 3z + m = \frac{-2}{m+2} - \frac{6}{m+2} + m = \frac{-2-6+m(m+2)}{m+2} = \frac{m^2+2m-8}{m+2} = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2}$.
- Caso $m=-2$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0=2$.
- Caso $m=0$: o sistema triangular é

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & 0, \\ & & & & -2z & = & -2, \\ & & & & 2z & = & 2, \end{array}\right.$$

de onde $z=1$, $y=\lambda \in \mathbb{R}$, e $x = y - 3z = \lambda - 3$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix}$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right)$, respectivamente, a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, é seguro que $2 \leq \operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A^* \leq 3$.

MATEMÁTICAS II

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 3m + 2 - 3m + 2m - 2 =$
$m^2 + 2m = m(m+2)$,

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{-2,0\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 3 =$ n.º de incógnitas.
- Caso $m = -2$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 - 6 = -4 \neq 0$, tense $\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).
- Caso $m = 0$: $\operatorname{rank} A = 2$ e $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, tense $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^* = 2 <$ n.º de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \lambda - 3, \\ y = \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$. (Ver apartado 1.a).)

Se $m = 2$, a solución é $z = \frac{2}{m+2} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-2}{m+2} = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{(m-2)(m+4)}{m+2} = 0$. (Ver apartado 1.a).)

Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 2$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

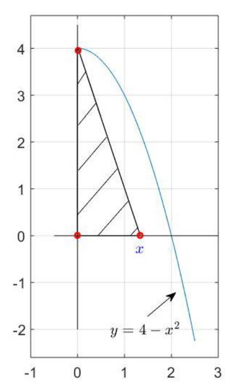
2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) De entre tódolos triángulos rectángulos contidos no primeiro cuadrante que teñen un vértice na orixe, outro sobre a parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre o eixe X e o outro paralelo ao eixe Y, obtén os catetos e a hipotenusa daquel cuxa área é máxima.

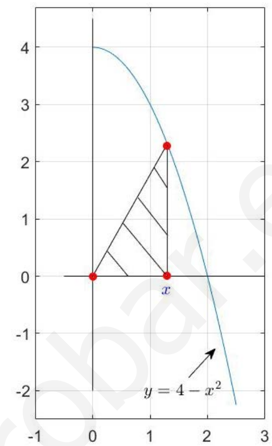
b) Enuncia os teoremas de Bolzano e de Rolle.

Solución:

2.a) Se se entende que paralelo pode ser coincidente, non se pode descartar o caso no que o punto $P(0,4)$ é un vértice, co cal un dos catetos do triángulo está sobre o eixe Y. Teriamos unha situación como a que se representa no debuxo da dereita. Neste marco non hai triángulo de área máxima. En efecto, a área vén dada pola función $A(x) = \frac{4x}{2} = 2x$, con $x \in (0, \infty)$, que non ten máximo.



MATEMÁTICAS II



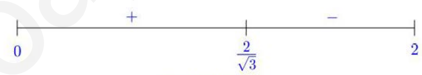
Supoñamos agora que ningún cateto pode estar sobre o eixe Y. Entón a situación anterior queda excluída e a única posibilidade é a representada no novo debuxo, á dereita, onde o triángulo ten base x e altura $4 - x^2$. Hai que buscar o máximo da función $A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2}$, con $x \in (0,2)$.

$$A'(x) = \frac{1}{2}\{4 - x^2 + x(-2x)\} = \frac{1}{2}(-3x^2 + 4) = -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

onde $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \in (0,2)$. Logo A é crecente (A' ten signo positivo) no intervalo $\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e é decrecente (A' ten signo negativo) no intervalo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$. Posto que A é continua, conclúese que ten un único máximo absoluto en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



SIGNO DE A'.

Danse a continuación as medidas dos catetos e da hipotenusa do triángulo de área máxima (u indicará "unidade de lonxitude").

Catetos: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ u ≈ 1.1547 u e

$y = 4 - x^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3}$ u $= 2.\bar{6}$ u.

Hipotenusa: En virtude do teorema de Pitágoras, $h^2 = \frac{4}{3} + \frac{64}{9} = \frac{12+64}{9} = \frac{78}{9} = \frac{26}{3}$, polo que a medida da hipotenusa é

$$h = \sqrt{\frac{26}{3}} \text{ u} \approx 2.9439 \text{ u}.$$

2.b)

- Teorema de Bolzano: Sexa $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.
- Teorema de Rolle: Sexa $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b). Se $f(a) = f(b)$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

3. Pídese:

a) Para o plano $\pi\colon 3x + 2y - z = 0$ e a recta $r\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$, calcular o punto de corte de r con π e obter a ecuación implícita do plano π^* que é perpendicular a π e contén a r.

b) Estudar a posición relativa dos planos $\pi_1\colon 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ e $\pi_2\colon x = 0$, e calcular o ángulo $\alpha \in [0°, 90°]$ que forman.

MATEMÁTICAS II

Solución:

3.a) Punto de corte:

É útil escribir as ecuacións paramétricas de r, que son $r:\begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = -1-2\lambda, \\ z = 3\lambda, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$,

e substituír os valores de x, y e z na ecuación do plano para obter o valor do parámetro λ no punto de corte:

$$3(2+\lambda)+2(-1-2\lambda)-3\lambda = 0 \Leftrightarrow 6+3\lambda-2-4\lambda-3\lambda = 0 \Leftrightarrow -4\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,$$

de onde $x = 2+\lambda = 3,\ y = -1-2\lambda = -3$ e $z = 3\lambda = 3$. É dicir, o punto de corte pedido é $P(3,-3,3)$.

Ecuación implícita de π^*:

$\vec{u} = \vec{n}_\pi(3,2,-1)$ e $\vec{v}(1,-2,3)$ son xeradores de π^*, e $P(2,-1,0) \in r \subset \pi^*$, polo que

$$\pi^*: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2)-(y+1)-6z-2z-2(x-2)-9(y+1) = 4(x-2)-10(y+1)-8z = 4x-8-10y-10-8z = 4x-10y-8z-18,$

a ecuación implícita pedida é $\pi^*: 4x-10y-8z-18 = 0$ ou, equivalentemente,

$$\pi^*: 2x-5y-4z-9 = 0.$$

3.b) $\vec{n}_{\pi_1}(2,-5,-4)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(1,0,0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e π_2, logo é claro que os dous planos se cortan nunha recta, porque $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$ non son paralelos.

O ángulo α que forman π_1 e π_2 coincide co ángulo que forman os vectores $\vec{n}_{\pi_1}$ e $\vec{n}_{\pi_2}$, así que $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}|}{\|\vec{n}_{\pi_1}\|\|\vec{n}_{\pi_2}\|}$. Téñense

- $\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2} = 2,$
- $\|\vec{n}_{\pi_1}\| = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ e
- $\|\vec{n}_{\pi_2}\| = 1,$

de onde, en primeira instancia, $\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15} \approx 0.2981424$ e, en segunda,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) \approx 72.6539°.$$

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ e $P(A\cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A\cap B)$ e $P(\bar{A}\cup\bar{B})$. Razoa se A e B son ou non sucesos independentes.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

MATEMÁTICAS II

b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é $p = 0.7$. Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

Solución:

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$.
- Da igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dedúcese que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$.
- Segundo unha das leis de De Morgan, $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, de onde $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 01 = 0.9$.

Por último, os sucesos A e B non son independentes, porque $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

4.b) Se $X =$ "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón $X \to B(5{,}0.7)$, distribución binomial de parámetros $n = 5$ e $p = 0.7$. Tense entón $q = 1 - p = 0.3$ e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}$.
- Como $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$, tense que $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922$.
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807$.

Supoñamos agora que $X =$ "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal $X \to B(2100{,}0.7)$. Os valores de n, p e q neste caso son $n = 2100$, $p = 0.7$ e $q = 0.3$. A probabilidade $P(X \geq 1450)$ é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoar do xeito seguinte: ao ser $np = 1470 > 5$ e $nq = 630 > 5$, a variable X pode ser aproximada por unha normal $\tilde{X}$ de media np e desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$.

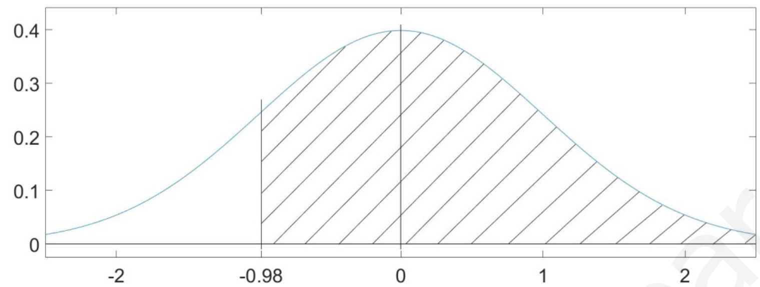
$$\tilde{X} \to N(1470{,}21) \Longrightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \to N(0{,}1),$$

de onde

corrección de $\frac{1}{2}$ punto

$$P(X \geq 1450) \approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98)$$
$$= P(Z < 0.98) \approx 0.8365.$$

MATEMÁTICAS II



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(Z > -0.98)$.

OPCIÓN B

EXEMPLOS DE RESPOSTAS / SOLUCIÓNS

ABAU

CONVOCATORIA DE XULLO

Ano 2019

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1)

a) **0.75 puntos.**

b) **1.25 puntos.**

2)

a) **1 punto.**

b) **2 puntos:**

   i) 0.5 puntos polo debuxo do triángulo.

   ii) 0.5 puntos pola obtención da ecuación da recta tanxente e do terceiro vértice.

   iii) 0.5 puntos por cada unha das dúas áreas pedidas.

3)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

c) **1 punto.**

4)

a) **1 punto.**

b) **1 punto.**

OPCIÓN B

1)

a) 1.25 puntos.

b) 0.75 puntos.

2)

a) 2 puntos.

b) 1 punto.

3)

a) 1.5 puntos.

b) 1.5 puntos.

4)

a) 0.75 puntos.

b) 1.25 puntos.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso áUniversidade** **XUÑO 2018** **Código: 20**

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1.a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula os valores de m para que a matriz inversa de M sexa $\frac{1}{4}M$.

b) Dadas as matrices $A = (-1 \quad 0 \quad 1)$, $B = (3 \quad 0 \quad 1)$ e $C = (4 \quad -2 \quad 0)$, calcula a matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, sendo B^t e C^tas traspostas de BeC respectivamente.

2.a) Calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 4x$ e a recta $y = x - 4$.(Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).

3. a) Determina o valor de λ para queos puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$e$D(\lambda,6,-1)$ sexancoplanariose calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.

b) Determina a posición relativa do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$e a recta r que pasa polos puntos $P(-4,4,2)$e$Q(4,8,-4)$. Se se cortan, calcula o punto de corte.

c) Calcula opunto simétrico do punto $P(-4,4,2)$ respecto do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas eávenda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 seé da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar

a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.

b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.

c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións: $\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$.

2. a) Calcula aeb para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & si\ x \geq 0 \end{cases}$ sexa continua ederivable en $x = 0$.

b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices éo$(0,0)$, outro está sobre o eixe X, outro sobre el eixe Yeo outro sobre a recta $2x + 3y = 8$.

c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\ dx$.

3. a) Dado o plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula o valor de a para que a recta r que pasa polos puntos $P(a,a,a)$e$Q(1,3,0)$ sexa paralela ao plano π.

b) Para $a = 1$, calcula a distancia de r a π.

c) Para $a = 1$, calcula a ecuación implícita ouxeral do plano que é perpendicular a πe contén a r.

4. a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?

b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade **Código: 20**

SETEMBRO 2018

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Que relación existe entre a súa inversa A^{-1} e a súa trasposta A^t?

b) Estuda, segundo os valores de λ, o rango de $A - \lambda I$, sendo I a matriz identidade de orde 3.Calcula as matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula a, b e c para que a función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & se\ x < 1 \\ bx + c & se\ x \geq 1 \end{cases}$ cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[0,2]$ e calcula o punto no que se cumpre o teorema.

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 2x$ e a recta $y = x$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes de coordenadas, o vértice e concavidade ou convexidade).

3. Dada a recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polo punto $A(1,1,1)$ e é perpendicular a r.

b) Calcula a ecuación implícita o xeral do plano que pasa polos puntos $P(-1,0,6)$ e $Q(3,-2,4)$ e é paralelo á recta r.

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $x + y + z - 5 = 0$.

4. Nun bombo temos 10 bolas idénticas numeradas do 0 ao 9 e cada vez que facemos unha extracción devolvemos a bola ao bombo

a) Se facemos 5 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de dúas veces.

b) Se facemos 100 extraccións, calcula a probabilidade de que o 7 saia menos de nove veces.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \qquad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula, se existe, o valor de m para que $\lim_{x \to 0} \frac{cos 2x + mx^2 - 1}{sen(x^2)} = 3$

b) Calcula os valores de a, b, c e d para que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ teña un punto de inflexión no punto (0,5) e a tanxente á súa gráfica no punto $(1,1)$ sexa paralela ao eixe X.

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} ln x dx$ (Nota: $ln = logaritmo\ neperiano$)

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(9,4,1)$ e $Q(1,1,1)$. Dada a recta s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$

a) Estuda a posición relativa das rectas r e s. Calcula, se se cortan, o punto de corte.

b) Calcula, se existe, a ecuación implícita ou xeral do plano que contén as rectas r e s.

c) Calcula a distancia do punto $O(0,0,0)$ á recta s.

4. Nunha fábrica hai tres máquinas A, B e C que producen a mesma cantidade de pezas. A máquina A produce un 2% de pezas defectuosas, a B un 4% e a C un 5%.

a) Calcula a probabilidade de que unha peza elixida ao azar sexa defectuosa.

b) Se se elixe unha peza ao azar e resulta que non é defectuosa, cal é a probabilidade de que fora fabricada pola máquina A?

ABAU

CONVOCATORIA DE XUÑO
Ano 2018

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) **a) 1 punto**

b) 1 punto

2) **a) 1,5 puntos**
- 0,75 puntos pola determinación do máximo relativo.
- 0,75 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.

b) 1,5puntos
- 0,75 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,75 puntos pola formulación e cálculo da área coma unha integral definida.

3) **a) 1 punto:**
- 0,5 puntos pola determinación de λ.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.

b) 1 punto
- 0,5 puntos pola posición relativa do plano e a recta.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

c) 1 punto

4) **a) 0,75 puntos**

b) 0,5 puntos

c) 0,75 puntos

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

   b) 1 punto

2) a) 1 punto:

   - 0,5 puntos pola continuidade.
   - 0,5 puntos pola derivabilidade.

   b) 1 punto

   c) 1 punto

3) a) 1 punto

   b) 1 punto

   c) 1 punto

4) a) 1 punto

   b) 1 punto

ABAU
CONVOCATORIA DE SETEMBRO
Ano 2018
CRITERIOS DE AVALIACIÓN
MATEMÁTICAS II
(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 0,5 puntos

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos pola determinación do rango de $A - \lambda I$, segundo os valores de **λ**.
- 1 punto pola determinación das matrices X.

2) a) 1,5puntos

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola determinación de a, b e c.
- 0,5 puntos pola determinación do punto no que se cumpre o teorema de Rolle.

b) 1,5 puntos

- 0,5 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1punto

c) 1 punto

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto

b) 1 punto

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $|M| = \begin{vmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - m - 4 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$M^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -m-4 & m \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{m}{4} \end{pmatrix}$

$\boxed{m = -1}$

$\frac{1}{4}\,M = \begin{pmatrix} \frac{m}{4} & \frac{m+4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Outra forma de resolvelo:

$$M^{-1} = \frac{1}{4}M \Leftrightarrow \frac{1}{4}M \cdot M = I \Leftrightarrow M^2 = 4I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m^2+m+4 & m^2+5m+4 \\ m+1 & m+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E polo tanto

$$\boxed{m = -1}$$

b) $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Leftrightarrow (B^t \cdot A - I)X = -C^t$

$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|B^t \cdot A - I| = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists (B^t \cdot A - I)^{-1}$

$(B^t \cdot A - I)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$

Entón:

$$X = -(B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$$

Outra forma:

$$(B^t \cdot A - I)X = -C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -4x + 3z = -4 \\ -y = 2 \\ -x = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} z = -4/3 \\ y = -2 \\ x = 0 \end{matrix} \right\}$$

E así: $X = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) $x^2 = 0 \Leftrightarrow \ x = 0$. Polo tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2x - x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 - 3x^2(2-x)}{x^6} = \frac{-x - 3(2-x)}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 2 \\ \\ f''(2) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Máximo\ relativo\ en\ x = 2}$$

Para estudar o crecemento e decrecemento, podemos facer a seguinte táboa (temos un máximo relativo en $x = 2$ e o 0 non está no dominio da función):

	$(-\infty, 0)$	$(0,2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	↘	↗	↘

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} Crecente\ en\ (0,2) \\ Decrecente\ en\ (-\infty, 0)\ e\ en\ (2, \infty) \end{array}}$$

b) Estudo da parábola:

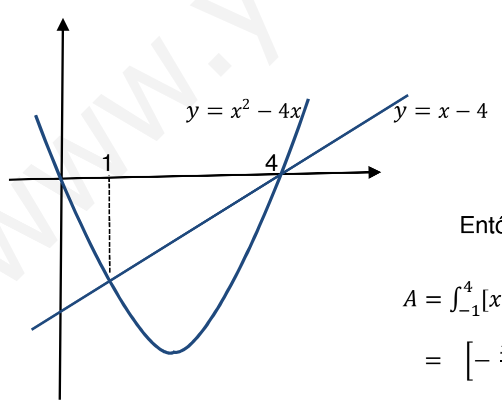
$y = x^2 - 4x = x(x-4)$ $\Rightarrow$ Puntos de corte cos eixes: $(0,0)$ e $(4,0)$

$y' = 2x - 4 \Rightarrow y' = 0 \ \Leftrightarrow x = 2 \ \Rightarrow$ Vértice: $(2, -4)$.

$y'' = 2 \ \Rightarrow$ Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$$x^2 - 4x = x - 4 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 5x + 4 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \ (1, -3), (4,0)$$



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$A = \int_{-1}^{4} [x - 4 - (x^2 - 4x)]dx = \int_{-1}^{4} (-x^2 + 5x - 4)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{Área \ = \frac{9}{2} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (-1,2,0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2,-2,-4)$ non son proporcionais. Polo tanto, os puntos A, B e C non están aliñados e determinan un plano π (o punto $A \in \pi$ e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinan π)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -8(\mathrm{x}-3) - 4\mathrm{y} + 6(\mathrm{z}+1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

Para determinar λ, impoñemos que $D \in \pi$:

$$4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda = 0}$$

Tamén poderiamos determinar λ coa condición $rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$

b) O vector director da recta r e o vector normal ao plano π son:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (8,4,-6) \\ \\ \overrightarrow{n_\pi} = (4,2,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi} \Rightarrow \boxed{r\ e\ \pi\ córtanse\ (son\ perpendiculares)}$$

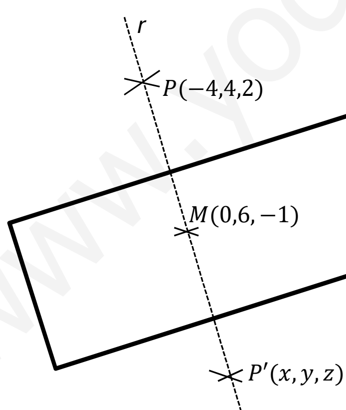
Para determinar o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta ($P \in r, \overrightarrow{v_r}$ é un vector director) e sustituímos na ecuación do plano

$$r: \begin{cases} x = -4 + 8\lambda \\ y = \;\;\, 4 + 4\lambda \\ z = \;\;\, 2 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \; -16 + 32\lambda + 8 + 8\lambda - 6 + 18\lambda - 15 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1/2$$

Sustituindo este valor de λ nas ecuacións paramétricas, obtemos o punto de corte da recta e o plano

$$\boxed{M(0,6,-1)}$$

c)



Temos que:

M é o punto de corte de r e π
$P(-4,4,2)$ é un punto de r
r é perpendicular a π

Entón M é o punto medio de P e o seu simétrico $P'(x,y,z)$

Polo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} 0 = \frac{x-4}{2} \\ 6 = \frac{y+4}{2} \\ -1 = \frac{z+2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P'(4,8,-4)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

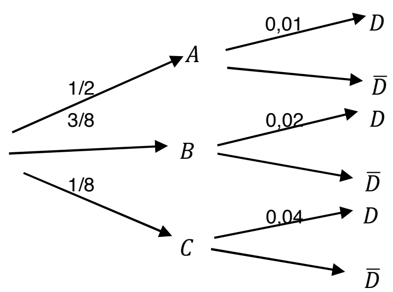
Exercicio 4:

a) Sexan:
A = “A bufanda é da marca A”
B = “A bufanda é da marca B”
C = “A bufanda é da marca C”
D = “A bufanda é defectuosa”
Entón temos:

$$P(A) = \frac{200}{200+150+50} = \frac{1}{2} = 0{,}5; \quad P(B) = \frac{150}{200+150+50} = \frac{3}{8} = 0{,}375; \quad P(C) = \frac{50}{200+150+50} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$P(D/A) = 0{,}01; \qquad P(D/B) = 0{,}02; \qquad P(D/C) = 0{,}04$$

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore:



a) Pola fórmula da probabilidade total, podemos calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa defectuosa:

$$P(D) = P(D/A)\cdot P(A) + P(D/B)\cdot P(B) + P(D/C)\cdot P(C) = 0{,}01\cdot 0{,}5 + 0{,}02\cdot 0{,}375 + 0{,}04\cdot 0{,}125 = 0{,}0175$$

E a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, sexa da marca A ou defectuosa será:

$$P(A\cup D) = P(A) + P(D) - P(A\cap D) = 0{,}5 + 0{,}0175 - 0{,}5\cdot 0{,}01 = \boxed{0{,}5125}$$

b) Para calcular a probabilidade de que unha bufanda, elexida ao azar, non sexa defectuosa nin da marca C usamos as leis de Morgan

$$P(\bar{D}\cap\bar{C}) = P(\overline{D\cup C}) = 1 - P(D\cup C) = 1 - [P(D) + P(C) - P(D\cap C)]$$
$$= 1 - 0{,}0175 - 0{,}125 + 0{,}04\cdot 0{,}125 = \boxed{0{,}8625}$$

c) Se sabemos que a bufanda non é defectuosa, queremos calcular a probabilidade de que sexa da marca B

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B\cap\bar{D}}{P(\bar{D})} = \frac{P(B\cap\bar{D}}{1-P(D)} = \frac{0{,}98\cdot 0{,}375}{1-0{,}0175} = \boxed{0{,}374}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} rang(C) = 2 \text{ se } m = 3 \\ rang(C) = 3 \text{ se } m \neq 3 \end{cases}$$

Cálculo do rango da matriz ampliada (lembramos que sempre $rang(A) \geq rang(C)$):

- $m \neq 3 \Rightarrow rang(A) = 3$ (neste caso $rang(C) = 3$)
- $m = 3 \Rightarrow rang(A) = 2$ (se $m = 3$, 1ª ecuación = 3*2ª ecuación e $rang(C) = 2$)

<u>*Discusión:*</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado. \\ m \neq 3 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = nº\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 3}$ xa vimos que era un sistema compatible indeterminado (infinitas solucións).

Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -z \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} 3y = z + 3 \Rightarrow y = \frac{z}{3} + 1 \\ 3x = -z + 6 \Rightarrow x = -\frac{z}{3} + 2 \end{cases}$$

As infinitas solucións son

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -\dfrac{\lambda}{3} + 2 \\ y = \dfrac{\lambda}{3} + 1; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Tamén poderiamos resolver o exercicio polo método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & m & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} (1^a) - 3^*(2^a) \\ (2^a) \\ (3^a) - (2^a) \end{array}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & m-3 & \vdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & m \end{pmatrix}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Se $m = 3$ suprímise a primeira fila (queda unha fila de 0) e o sistema é compatible indeterminado

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -z \\ 3y &= 3 + z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= -z + 2\left(1 + \tfrac{z}{3}\right) = 2 - z/3 \\ y &= 1 + \tfrac{z}{3} \end{aligned}$$

as infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 - \frac{\lambda}{3} \\ y &= 1 + \frac{\lambda}{3}; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}}$$

se $m \neq 3$ o sistema é compatible determinado. Para cada valor de m, temos un sistema distinto con solución única.

Exercicio 2:

a) Para que a función sexa continua en $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (e^{2x} + ax + b) = 1 + b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\tfrac{1}{2}(x^2 + 2)\right) = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 1 \ \Rightarrow \ b = 0$$

Por outra parte

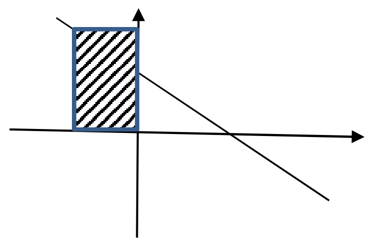
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (2e^{2x} + a) = 2 + a$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

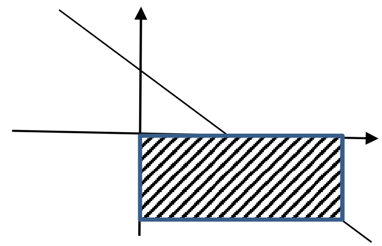
Polo tanto, para que a función sexa derivable en $x = 0$, debe cumplirse:

$$\left.\begin{aligned} b &= 0 \\ 2 + a &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{a = -2;\ b = 0}$$

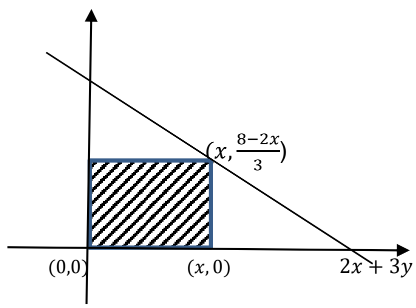
CONVOCATORIA DE XUÑO

b) A área non está acotada se o rectángulo está situado no segundo ou cuarto cuadrante





Se o rectángulo está situado no primeiro cuadrante:



Función a maximizar (área do rectángulo):

$$A(x) = \frac{x(8-2x)}{3} = \frac{8x-2x^2}{3}$$

Determinamos os puntos críticos):

$$A'(x) = \frac{1}{3}(8-4x)$$

$$\left.\begin{array}{l} A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ \\ A''(x) = -4/3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{máximo en } x = 2$$

Polo tanto:

$$\boxed{Vértices: (0,0), (2,0), (0,4/3), (2,4/3)}$$

c) Calculamos a integral indefinida utilizando o cambio de variable: $x+1 = t^2$; $dx = 2tdt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\cdot 2t^2 dt = \int (2t^4 - 2t^2) dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + k =$$
$$= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + k$$

E calculamos a integral definida aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1dx} = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

Tamén poderiamos calcular a integral indefinida polo método de integración por partes:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + k$$

E aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1dx} = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2}\right]_0^3 = \frac{48}{3} - \frac{128}{15} + \frac{4}{15} = \frac{240}{15} - \frac{124}{15} = \boxed{\frac{116}{15}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) A recta que pasa polos puntos P e Q ten como vector director:

$$\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1-a, 3-a, -a)$$

Por outra parte, un vector normal ao plano é:

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, -2).$$

Entón

$$r \parallel \pi \iff \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \iff 2(1-a) - (3-a) + 2a = 0 \iff 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0$$

$$\boxed{a = 1}$$

b) Polo apartado anterior, sabemos que se $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, polo tanto a distancia entre a recta e o plano é igual á distancia entre un punto da recta (por exemplo P) e o plano

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|2-1-2-3|}{\sqrt{4+1+4}} = \boxed{4/3\ u}$$

c) Sexa α o plano buscado. O plano α está determinado polos elementos seguintes

$P(1,1,1) \in r \Rightarrow P(1,1,1) \in \alpha$

$\vec{v}_r = (0,2,-1)$

$\vec{n}_\pi = (2,-1,-2)$

Son vectores contidos no plano α

Polo tanto:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -5(x-1) - 2(y-1) - 4(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow -5x - 2y - 4z + 11 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 5x + 2y + 4z - 11 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Sexa X = nº de respostas acertadas. Trátase dunha distribución binomial $B(10; 0{,}25)$, pois a probabilidade de contestar ben unha pregunta é a mesma nos dez casos: 0,25

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 = 1 - 0{,}0563 - 0{,}1877 \\ &= \boxed{0{,}756} \end{aligned}$$

b) Sea X la duración, en horas, de las pilas. X sigue una distribución normal $N(50; 5)$

Tipificación $\qquad \frac{X-50}{5} = Z \longrightarrow N(0,1)$

$$\begin{aligned} P(X < 42) &= P\left(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}\right) = P(Z < -1{,}6) = P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) \\ &= 1 - 0{,}9452 = \boxed{0{,}0548} \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 1*:**

a) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{A^t = A^{-1}}$

Tamén poderiamos calcular A^{-1} utilizando Gauss: no primeiro paso intercambiamos a primeira e a segunda fila. No segundo paso intercambiamos a segunda e terceira fila e finalmente cambiamos de signo a tódalas filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e vemos que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t}$

Tamén se podería calcular A^{-1} utilizando determinantes:

$|A| = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

b)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1$$

Polo tanto: $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 1 = 0$.

λ=-1 é unha solución da ecuación $\lambda^3 + 1 = 0$. Como $\lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ e $\lambda^2 - \lambda + 1$ non ten solucións reais, temos

$$\boxed{\begin{array}{ll} Se\ \lambda = -1, & entón\ \ rang(A - \lambda I) = 2 \\ Se\ \lambda \neq -1, & entón\ \ rang(A - \lambda I) = 3 \end{array}}$$

$AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e vimos que $A + I$ non ten inversa. Entón:

$$(A + I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{x = y = z\}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e con $f(a)=f(b)$ entón existe polo menos un punto $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Se $x \neq 1$, $f(x)$ é continua e derivable pois son funcións polinómicas,

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2+a \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = b+c \\ f(1) = b+c\end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2+a=b+c$$

Para que sexa continua en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 4+a \\ \lim_{x\to 1^+} f'(x) = b\end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4+a=b$$

Para que coincidan as derivadas laterais

$$f(0)=f(2) \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 2b+c$$

Polo tanto, para que se cumpran as hipóteses do teorema de Rolle,

$$\left.\begin{array}{l} a-b-c=-2 \\ a-b \quad\;\; = -4 \\ \quad 2b+c = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=-2;\, b=1;\, a=-3}$$

Para estes valores, $f'(x) = \begin{cases} 4x-3 & se \quad x<1 \\ 1 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$

Entón $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi = 3/4}$

b) Estudo da parábola:

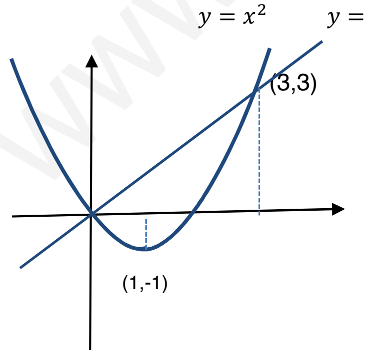
$y = x^2 - 2x = x(x-2) \Rightarrow$ Puntos de corte cos eixes: $(0,0)$ e $(2,0)$

$y' = 2x-2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ Vértice: $(1,-1)$.

$y'' = 2 \Rightarrow$ Convexa.

Puntos de corte da recta e a parábola:

$\underset{y=x^2}{x^2-2x} = \underset{y=x}{x} \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0; x=3$. Córtanse nos puntos (0,0) e (3,3)



Entón, a área ven dada pola integral definida

$$A = \int_0^3 [x-(x^2-2x)]dx = \int_0^3 (3x-x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{Área \;=\; \frac{9}{2}\, u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Determinamos un vector director da recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,0,-2)$$

Como se pide un plano π_1 perpendicular á recta, entón $\vec{v}_r$ é un vector normal ao plano:

$$r \perp \pi_1 \quad \Leftrightarrow \; \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1}$$

e π_1 queda determinado polo punto $A(1,1,1)$ polo que pasa e o vector normal $\vec{n}_{\pi_1} = (2,0,-2)$

$$\pi_1 : 2(x-1) - 2(z-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi_1 : x - z = 0}$$

b) Este novo plano, π_2, queda determinado polos elementos:

- $P(-1,0,6)$ que é un punto pertencente ao plano
- $\overrightarrow{PQ} = (4,-2,-2)$ é un vector do plano
- $\vec{v}_r = (2,0,-2)$ é un vector do plano

Temos entón:

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 4(x+1) + 4y + 4(z-6) = 0$$

$$\boxed{\pi_2 : x + y + z - 5 = 0}$$

c) Pídennos calcular a distancia da recta r ao plano π_2. Vimos no apartado anterior que son paralelos, polo tanto podemos calcular esa distancia como a distancia dun punto calquera da recta ao plano:

$$P_r(1,0,1) \in r$$

$$d(r,\pi_2) = \; d(P_r,\pi_2) = \frac{|1+1-5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}}$$

$$\boxed{d(r,\pi_2) = \sqrt{3}\, u}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

Sexa X = "nº de extraccións nas que obtemos un 7"

a) Evidentemente trátase de probas independentes, nas que a probabilidade de éxito non cambia

$$\left.\begin{array}{l}\text{número de extraccións} = n = 5\\ \text{probabilidade de éxito} = p = 0{,}1\end{array}\right\} \quad X \;\rightarrow\; Bi(5; 0{,}1)$$

$$P(X<2) = p(X=0) + p(X=1) = \binom{5}{0}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 0{,}9^{5} + \binom{5}{1}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 0{,}9^{4} = 0{,}5905 + 0{,}3281 = 0{,}9185$$

$$\boxed{P(X<2) = 0{,}9185}$$

b) Neste caso

$$X \;\rightarrow\; Bi(100; 0{,}1)$$

Pero como

nxp= 10 > 5

nxq= 90 > 5

aproximamos a binomial X pola normal X' con media $\mu = n \times p = 100 \times 0{,}1 = 10$ e desviación típica $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{100 \times 0{,}1 \times 0{,}9} = 3$

$$X \;\rightarrow\; Bi(100; 0{,}1)\;; \quad X' \;\rightarrow\; N(10; 3)$$

Ademais aplicamos a corrección de medio punto ou corrección de Yates. Así

Tipificación $\qquad Z = \frac{X'-10}{3} \rightarrow N(0,1)$

$$P(X<9) = P(X' \le 8{,}5) = P\left(\frac{X'-10}{3} \le \frac{8{,}5-10}{3}\right) = P(Z \le -0{,}5) = P(Z \ge 0{,}5)$$

$$= 1 - P(Z \le 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$$

$$\boxed{P(X<9) = 0{,}3085}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

***Exercicio 1*:**

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$

Dúas columnas proporcionais

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$

$\Rightarrow \; rang(C) = 2$

Cálculo do rango de A:

Sempre $rang(A) \geq rang(C)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m - m - 2 = m - 1$

$\Rightarrow \; rang(A) = \begin{cases} 3 & se \;\; m \neq 1 \\ 2 & se \;\; m = 1 \end{cases}$

Discusión:

$\boxed{m = 1, \;\; rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº \; de \; incógnitas. \; Sistema \; compatible \; indeterminado.}$

$\boxed{m \neq 1, \;\; rang(C) = 2 < 3 = rang(A). \; Sistema \; incompatible\,.}$

b) Para $\boxed{m = 1}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 + z \\ x \quad\;\; &= 1 + z \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; y = 0$$

As infinitas solución son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + \lambda \\ y &= 0 \qquad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

***Exercicio 2*:**

a)

$$lim_{x\to 0}\frac{cos2x+mx^2-1}{sen(x^2)} \overset{\frac{0}{0}\ (L'Hopital)}{=} lim_{x\to 0}\frac{-2sen2x+2mx}{2xcos(x^2)} \overset{\frac{0}{0}\ (L'Hopital)}{=} lim_{x\to 0}\frac{-4cos2x+2m}{2xcos(x^2)-4x^2sen(x^2)} = \frac{-4+2m}{2}$$

Entón:

$$\frac{-4+2m}{2}=3 \quad \Rightarrow \ -4+2m=6 \quad \Rightarrow \ \boxed{m=5}$$

b)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f"(x)=6ax+2b$

Punto de inflexión no punto $(0{,}5)$: $\begin{cases} f"(0)=0 \ \Rightarrow \ \boxed{b=0} \\ f(0)=5 \ \Rightarrow \ \boxed{d=5} \end{cases}$

Entón $f(x)=ax^3+cx+5$. Ademais

Pasa polo punto $(1{,}1)$: $f(1)=1 \Rightarrow \ a+c+5=1$

Tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(1{,}1)$ paralela ao eixe X: $f'(1)=0 \Rightarrow \ 3a+c=0$

$$\left.\begin{matrix} 3a+c=0 \\ a+c+5=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} c=-3a \\ a-3a+5=1 \end{matrix}\right] \ \Rightarrow \ \boxed{a=2}\ ;\ \boxed{c=-6}$$

c) Podemos calcular a integral indefinida utilizando primeiro o método de sustitución e despois o método de integración por partes:

$$\int \sqrt{x}\,lnxdx \overset{\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt}{=} \int 4t^2lntdt \underset{\begin{cases} u=lnt \ \Rightarrow du=dt/t \\ dv=4t^2 \ \Rightarrow v=\frac{4}{3}t^3 \end{cases}}{=} \frac{4}{3}t^3lnt-\frac{4}{3}\int t^2\,dt \overset{\text{desfacemos o cambio}}{=} \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}lnx-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+k$$

ou ben calculala directamente por partes:

$$\int \sqrt{x}\,lnxdx \underset{\begin{cases} u=lnx \ \Rightarrow du=dx/x \\ dv=x^{1/2}dx \ \Rightarrow v=\frac{2}{3}x^{3/2} \end{cases}}{=} \frac{2}{3}\,x^{3/2}lnx-\int\frac{2}{3}x^{1/2}dx=\frac{2}{3}\,x^{3/2}lnx-\frac{4}{9}x^{3/2}+k$$

Aplicando a regra de Barrow:

$$\int_1^e \sqrt{x}lnxdx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}lnx-\frac{4}{9}x^{3/2}\right]_1^e=\frac{2}{3}e^{3/2}-\frac{4}{9}e^{3/2}+\frac{4}{9}$$

$$\boxed{\int_1^e \sqrt{x}lnxdx=\frac{2}{9}e^{3/2}+\frac{4}{9}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

***Exercicio 3*:**

a)

$$r: \begin{cases} P_r(94{,}1) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-8,-3{,}0) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} P_s(1{,}0{,}5) \in s \\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2{,}1,-1) \end{cases}$$

Os vectores directores $\vec{v}_r = (-8,-3{,}0)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2{,}1,-1)$ das rectas non son proporcionais, polo tanto as rectas córtanse ou crúzanse. Para saber se se cortan ou se cruzan, calculamos o rango($\vec{P_r}\vec{P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s$):

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{As\ rectas\ córtanse}$$

Para calcular o punto de corte pasamos ás ecuacións paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 9 - 8\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}$$

Entón:

$$\begin{Bmatrix} 9 - 8\lambda = 1 + 2\mu \\ 4 - 3\lambda = \mu \\ 1 = 5 - \mu \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 9 = 9 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{Punto\ de\ corte\ (9{,}4{,}1)}$$

b) Sexa π o plano buscado. O plano π está determinado por ($\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ non son proporcionais):

- O punto de corte das rectas $(9{,}4{,}1)$ (π contén a r e a s)
- Un vector director $\vec{v}_r$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta r)
- Un vector director $\vec{v}_s$ da recta r é un vector contido no plano (π contén á recta s)

$$\pi: \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z-1 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-9) - 8(y-4) - 2(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi: 3x - 8y - 2z - 28 + 7 = 0}$$

c) Utilizamos a fórmula da distancia dun punto a unha recta:

$$\overrightarrow{OP_s} = (1{,}0{,}5) \Rightarrow \overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5{,}11{,}1)$$

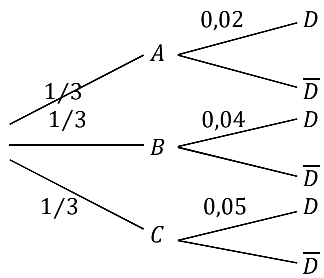
$$d(O,s) = \frac{|\overrightarrow{OP_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 11^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{147}{6}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{d(O,s) = \frac{7\sqrt{2}}{2}\ u}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

***Exercicio 4*:**

Podemos facer o seguinte diagrama en árbore (D=peza defectuosa):



$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$P(D|A) = 0{,}02$

$P(D|B) = 0{,}04$

$P(D|C) = 0{,}05$

a) Pola fórmula da probabilidade total:

$$P(D) = P(D|A)\cdot P(A) + P(D|B)\cdot P(B) + P(D|C)\cdot P(C) = 0{,}02\cdot\frac{1}{3} + 0{,}04\cdot\frac{1}{3} + 0{,}05\cdot\frac{1}{3}$$
$$= 0{,}11\cdot\frac{1}{3} = 0{,}03667$$

$$\boxed{P(D) = 0{,}03667}$$

b)

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}|A)\cdot P(A)}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}|A)\cdot P(A)}{1-P(D)} = \frac{(1-0{,}02)\cdot\frac{1}{3}}{1-0{,}03667} = 0{,}3391$$

$$\boxed{P(A|\overline{D}) = 0{,}3391}$$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **XUÑO 2017** **Código: 20**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ, o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t\mathrm{X} = 6\mathrm{X}$.

2. a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x\ - 3x^2}{e^{x^2} - \ cos\,2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3. Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2. Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x ln(1+x)dx$

3. Dados os planos $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0;\ \ \pi_2 : \begin{cases} x = \ 2 + \ \lambda \ + \ \mu \\ y = \qquad \lambda + 3\mu \\ z = \ -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2. Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1. Calcula o punto de corte de r e π_1.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elíxense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x \qquad - z &= m \\ x \ + \ y - z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & se\ x < 3 \\ \ln(x-2) & se\ x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x)dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5,-1,6)$ á recta r.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5,-1,6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5,-1,6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** **Código: 20** **SETEMBRO 2017**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k, o rango das matrices AB e BA.

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0, \infty)$, é $f'(x) = 1 + lnx$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1,4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0,1,3)$ e $(1,1,1)$ e s a recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) ¿É s paralela ao plano YZ? ¿Está contida no devandito plano?

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0{,}7; P(B) = 0{,}6$ e $P(A \cup B) = 0{,}9$

a) ¿Son A e B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A - B)$ e $P(A/\overline{B})$. (Nota: $\overline{B}$ suceso contrario ou complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ x - y + z &= m \\ x + my - 2z &= m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

2. Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

3. Dados os planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β. Calcula a distancia entre eles.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r.

c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q.

4. O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.

a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.

b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

ABAU

CONVOCATORIA DE XUÑO

Ano 2017

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:

- 0,25 puntos pola obtención da matriz $AA^t - \lambda I$
- 0,75 puntos pola determinación do rango (0,25 por cada caso:λ=0;λ =6;$\lambda \neq 0$ $e\lambda \neq 6$)

b) 1 punto

2) a) 0,5 puntos

b) 1,25puntos

- 0,5 puntos pola obtención da función a minimizar
- 0,5 puntos pola obtención dos valores que minimizan o custo
- 0,25 puntos pola xustificación do mínimo.

c) 1,25 puntos

- 0,5 puntos pola integral por partes
- 0,5 puntos pola integral racional
- 0,25 puntos pola aplicación de Barrow

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola xustificación de que os planos se cortan
- 0,5 puntos pola xustificación de que son perpendiculares

b) 1 punto

c) 1 punto

4) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A \cup B)$.
- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A - B)$.

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola formulación do problema
- 0,5 puntos polo cálculo da probabilidade pedida

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1,5 puntos:

- 0,5 puntos pola condición de continuidade
- 0,5 puntos pola condición de derivable.
- 0,5 puntos pola obtención do punto no que a tanxente á grafica da función é paralela á recta dada.

b) 1,5puntos:

- 1 punto pola obtención do polinomio de terceiro grao (0,5 puntos pola determinación dos coeficientes a partir da condición de punto de inflexión e 0,5 puntos pola determinación dos coeficientes a partir da condición de extremo relativo)
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida (0,25 puntos polo cálculo dunha primitiva e 0,25 puntos pola aplicación de Barrow)

3) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación do punto de corte da recta co plano.
- 0,5 puntos polo cálculo da área do triángulo.

4) a) 1 punto

b) 1 punto

ABAU

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Ano 2017

CRITERIOS DE AVALIACIÓN

MATEMÁTICAS II

(Cód. 20)

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación do rango de AB
- 0,5 puntos pola determinación do rango de BA

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo apartado i)
- 0,5 puntos polo apartado ii)

b) 1punto:

- 0,75 puntos pola integral indefinida
- 0,25 puntos pola determinación da constante

c) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación do punto crítico
- 0,5 puntos pola determinación do mínimo relativo

3) a) 1 punto

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola xustificación de que a recta s é paralela ao YZ
- 0,5 puntos pola xustificación que a recta s non está contida no plano YZ

c) 1 punto

4) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A \cap B)$.
- 0,5 puntos pola xustificación de que os sucesos non son independentes

b) 1 punto:

- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A - B)$.
- 0,5 puntos polo cálculo de $P(A/\bar{B})$.

OPCIÓN B

1) a) 1 punto

b) 1 punto

2) a) 1 punto:

- 0,5 puntos pola continuidade
- 0,5 puntos pola condición de derivabilidade

b) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación dos puntos nos que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x - 4y = 0$
- 0,5 puntos polas ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos $x = -1$ e $x = 1$

c) 1 punto:

- 0,75 puntos polo cálculo da integral indefinida
- 0,25 puntos pola aplicación da regra de Barrow

3) a) 1 punto:

- 0,5 puntos polo estudo da posición relativa dos planos
- 0,5 puntos polo cálculo da distancia entre os planos

b) 1 punto

c) 1 punto:

- 0,5 puntos pola determinación de P e Q
- 0,5 puntos polo cálcula da distancia de P a Q

4) a) 1 punto

b) 1 punto

CiUG	PAU XUÑO 2016	Código: 26

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula todas as matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ de rango 2 tales que a súa inversa sexa $A - 2I$, é dicir, $A^{-1} = A - 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 2.

b) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$

i) Calcula, segundo os valores de m, o rango de M.

ii) Para o valor $m = -1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a) Calcula o valor de m para que os puntos $A(m,-1,m)$, $B(1,-5,-1)$, $C(3,1,0)$ e $D(2,-1,0)$ estean nun mesmo plano. Calcula a ecuación implícita ou xeral dese plano.

b) Calcula o ángulo que forman o plano $\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(3,-4,-7)$ e $Q(1,-3,-9)$.

c) Calcula os puntos da recta r do apartado anterior que distan 9 unidades do plano π.

3. a) Definición e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) Calcula os límites seguintes:

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}$ ii) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

4. A derivada dunha función $f(x)$, cuxo dominio é $(0,\infty)$, é $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

a) Determina a función $f(x)$ sabendo que a súa gráfica pasa polo punto $(1,0)$.

b) Determina os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema:

$$\begin{aligned} mx + 3y + 4z &= m \\ x - 4y - 5z &= 0 \\ x - 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 0$ e cando $m = 1$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $P(2,5,-2)$ e é perpendicular á recta r.

b) Estuda a posición relativa da recta r e a recta s que pasa polos puntos $P(2,5,-2)$ e $Q(-1,4,2)$.

c) Calcula o punto da recta r que equidista dos puntos $P(2,5,-2)$ e $Q(-1,4,2)$.

3. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Sexa $f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1+x^2)$. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$. Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

4. Dada a función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & si\ x < 1 \\ 3(x-2)^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

a) ¿É $f(x)$ derivable en $x = 1$, para algún valor de a?

b) Para $a = 1$, calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x)$ e o eixe OX.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **SETEMBRO 2016**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, segundo os valores de a, o rango de A. Calcula, se existe, a inversa de A cando $a = 0$.

b) Para $a = 0$. calcula a matriz B que verifica $ABA^{-1} - A = 2I$.

c) Para $a = 1$, calcula todas as matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Dados os planos $\pi_1: 3x + 3z - 8 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda - \mu \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{cases}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2. Calcula as ecuacións paramétricas da recta que pasa por $(0,0,0)$ e é paralela a π_1 e π_2.

b) Calcula o punto simétrico do $(0,0,0)$ respecto do plano π_1.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Dunha función $f(x)$ sabemos que $f(-1) = 1$ e que a súa función derivada é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x < 0 \\ e^{2x} - 2 & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula as ecuacións das rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos de abscisa: $x = -2$ e $x = \frac{ln2}{2}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $y = x(x-2)$, o eixe de abscisas e a recta $y = x$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixes, o vértice e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 5$.

2. Dadas as rectas $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ $\quad s: \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2y + 4z + 3 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que contén a r e é paralelo a s.

c) Calcula a distancia entre r e s.

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica da función $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+6}{2+e^t} dt$, no punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula $\int_0^1 x ln(1+x) dx$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) 1,5 puntos, distribuídos en:
- 1 punto pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo de a e b .

b) 1,5 puntos, distribuídos en:
- i) 0,75 puntos
- ii) 0,75 puntos

2) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.
- 0,5 puntos pola determinación de m.

b) 1 punto
c) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) 1 punto, distribuído en:
- i) 0, 5 puntos
- ii) 0, 5 puntos

4) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,75 puntos polo cálculo da integral indefinida de $f(x)$
- 0,25 puntos pola determinación da constante para que $f(1)=0$

b) 1 punto.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos, distribuídos en:
- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos polo caso m=0
- 0,5 puntos polo caso m=1

2) a) 1 punto
b) 1 punto
c) 1 punto

3) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
- 0,5 puntos pola determinación do máximo e mínimo relativos.

4) a) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola determinación de a para que $f(x)$ sexa continua en $x=1$.
- 0,5 puntos por concluír que $f(x)$ non é derivable en $x=1$ para ningún valor de a.

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,25 puntos polo cálculo das integrais definidas.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 1 punto:
- 0,5 puntos polo cálculo do rango de A.
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa de A,cando $\alpha = 0$.

b) 1 punto

c) 1 punto

2) a) 1,5 puntos:
- 0,75 puntos polo cálculo do ángulo que forman os planos.
- 0,75 puntos pola obtención das ecuacións paramétricas da recta.

b) 1,5 puntos

3) a) 1 punto:
- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto:
- 0,5 puntos pofa determinación de $f(x)$
- 0,5 puntos polas ecuacións das rectas tanxentes (0,25 puntos por cada una)

4) 2 puntos:
- 0, 5 puntos polo debuxo da rexión.
- 1 punto pola formulación da área en termos de integrais definidas.
- 0,5 puntos polo cálculo das integrais definidas.

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos:
- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) a) 1 punto

b) 1 punto

c) 1 punto

3) 2 puntos:
- 0,25 puntos: estudo de dominio, puntos de corte cos eixes e simetrías.
- 0,25 puntos: estudo de asíntotas.
- 0,5 puntos: estudo de intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos
- 0,5 puntos: estudo de puntos de inflexión, intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,5 puntos: debuxo da gráfica.

4) a) 1 punto:
- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos polo cálculo da recta tanxente.

b) 1 punto:
- 0,5 puntos: integración por partes
- 0,25 puntos: integración de función racional
- 0,25 puntos: cálculo da integral definida

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $A^{-1} = A - 2I \iff I = A(A-2I) = (A-2I)A$

$$A(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a(b-2) \\ a(b-2) & a^2 + b(b-2) \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$A(A-2I) = I \iff \left\{ \begin{matrix} a^2 = 1 \\ a(b-2) = 0 \\ a^2 + b(b-2) = 1 \end{matrix} \right\} \iff \begin{matrix} a = \pm 1 \\ b = 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{Solución: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b)

i) $det(M) = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{vmatrix} = (m+2)(m+1)^2 + (m+1)^2 = (m+3)(m+1)^2$

$$det(M) = 0 \iff \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Se $m = -3$, hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $m = -1$, hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{matrix} Se\ m \in \mathbb{R} - \{-3, -1\}\ \ entón\ \ rang(M) = 3 \\ Se\ \ m = -3\ ou\ m = -1, entón\ \ rang(M) = 2 \end{matrix}}$$

ii) Substituíndo o valor de m na matriz M, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = y = 0$$

$$\boxed{Solución: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{BC} = (2,6,1)e\overrightarrow{BD} = (1,4,1)$ son non proporcionais. Polo tanto, os puntos $B(1,-5,-1), C(3,1,0)$ e $D(2,-1,0)$ determinan un plano π:

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 6 & 4 & y+5 \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0}$$

Para determinar m, bastará ter en conta que $A \in \pi$ e polo tanto:

$$2m + 1 + 2m - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Tamén poderiamos obter m, impoñendo a condición $rang(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = 2$, é dicir:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 4 & m+1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(m-1) - 4 + 2(m+1) = 0 \Rightarrow 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1$$

b) O vector director, $\overrightarrow{v_r}$, da recta e o vector normal, $\overrightarrow{n_\pi}$, ao plano son:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-2,1,-2) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \text{ e } \overrightarrow{n_\pi} \text{ son proporcionais. Polo tanto:}$$

$$\boxed{r \; e \; \pi \; son \; perpendiculares: r \perp \pi}$$

c) Calculamos as ecuacións paramétricas da recta r:

$$\left.\begin{array}{r} P(3,-4,-7) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases}$$

Un punto xenérico da recta será: $(3 - 2\lambda, -4 + \lambda, -7 - 2\lambda)$. Determinamos o valor de λ para que o punto diste 9 unidades do plano π:

$$9 = \frac{|2(3-\lambda) - (-4+\lambda) + 2(-7-2\lambda)|}{\sqrt{4+1+4}} \Rightarrow 27 = |-9 - 9\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 27 = -9 - 9\lambda & \Rightarrow \lambda = -4 \\ -27 = -9 - 9\lambda & \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Substituindo estes valores nas ecuacións paramétricas da recta, obtéñense dous puntos da recta que distan 9 unidades do plano:

$$\boxed{A(11,-8,1) \; e \; B(-1,-2,-11)}$$

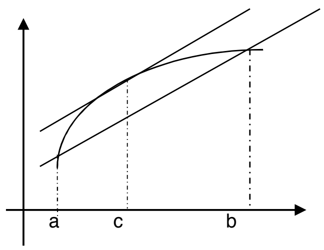
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial*: Se $f(x)$ é continua en [a,b] e derivable en (a,b), entón existe algún punto c∈(a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica:
Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos (a,f(a)) e (b,f(b)).

b)

Indeterminación $\frac{0}{0}$

i. $lim_{x\to1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-\sqrt{2-x})(x-\sqrt{2-x})} = lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2-2+x} =$

Multiplicamos polo conxugado do denominador

Factorizamos o denominador e simplificamos

$$= \lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{2-x})}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Tamén pode facerse por L'Hôpital:

$$lim_{x\to1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = lim_{x\to1} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

ii. $lim_{x\to0} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = lim_{x\to0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{\cancel{1+x}}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{\cancel{1+x}}} =$

L'Hôpital

Indeterminación $\frac{0}{0}$

$$= lim_{x\to0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = lim_{x\to0} \frac{1}{\ln(1+x)+1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

L'Hôpital

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

a) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x)$ pasando polo punto (1,0). Mediante o método de integración por partes, calculamos a integral indefinida de $f'(x)$

$$\int \frac{1-lnx}{x^2}dx = \int x^{-2}(1-lnx)dx = -\frac{1-lnx}{x} - \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1-lnx}{x} + \frac{1}{x} + K = \frac{lnx}{x} + K$$

$$\begin{bmatrix} u = 1 - lnx & \Rightarrow & du = -\frac{1}{x}dx \\ dv = x^{-2}dx & \Rightarrow & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

Usando que $f(1) = 0$ determinamos o valor de K:

$$\left.\begin{matrix} f(1) = 0 \\ f(1) = K \end{matrix}\right\} \Rightarrow K = 0$$

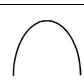
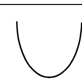
Polo tanto

$$\boxed{f(x) = \frac{lnx}{x}}$$

b) Estudamos o signo de $f"(x)$:

$$f"(x) = \frac{-\frac{x^2}{x} - 2x(1-lnx)}{x^4} = \frac{2lnx - 3}{x^3}$$

$$f"(x) = 0 \Leftrightarrow lnx = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

	$(0, e^{3/2})$	$(e^{3/2}, \infty)$
$f"(x)$	<0	> 0
$f(x)$		

Cóncava en $(0, e^{3/2})$

Convexa en $(e^{3/2}, \infty)$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 & m \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 16m - \cancel{12} - 15 + 16 - 15m + \cancel{12} = m + 1;$$

Polo tanto

- $m = -1 \Rightarrow rang(C) = 2$
- $m \neq -1 \Rightarrow rang(C) = 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

- $m \neq -1 \Rightarrow rang(A) = 3$ (sempre $rang(A) \geq rang(C)$)
- Se $m = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = -1 \ \Rightarrow \ rang(C) = 2 < 3 = rang(A).\ Sistema\ incompatible.\ Non\ ten\ solución \\ m \neq -1 \ \Rightarrow \ rang(C) = 3 = rag(A) = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Solución\ única \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 0}$

Sistema homoxéneo. Por a) e un sistema compatible determinado. Polo tanto

$$\boxed{x = y = z = 0}$$

Para $\boxed{m = 1}$. Por a), é un sistema compatible determinado, ten solución única que calculamos pola regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = -1/2\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2$$

$$\boxed{x = 1/2\,; \ y = -1/2\,; \quad z = 1/2}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Como o plano π debe ser perpendicular á r, entón o vector director da recta, $\vec{v}_r$, é un vector normal a π. Polo tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,2)$$

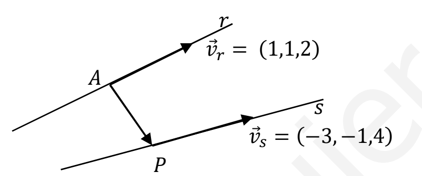
Entón, como $\vec{n}_\pi = (1,1,2)$ é un vector normal ao plano e $P(2,5,-2)$ é un punto do plano

$x-2+y-5+2(z+2)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi: x+y+2z-3=0}$

b) Calculamos o vector director da recta s:

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3,-1,4)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (1,1,2)$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3,-1,4)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$A(0,2,0) \in r; \quad P(2,5,-2) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{AP} = (2,3,-2)$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{AP}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AP}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

c) Dado que $A(0,2,0) \in r$, $\vec{v}_r = (1,1,2)$, $(\lambda, 2+\lambda, 2\lambda)$ é un punto xenérico de r, igualando as distancias deste punto xenérico aos puntos P e Q:

$$(\lambda-2)^2 + (2+\lambda-5)^2 + (2\lambda+2)^2 = (\lambda+1)^2 + (2+\lambda-4)^2 + (2\lambda-2)^2$$

é dicir:

$$\cancel{\lambda^2} - 4\lambda + 4 + \cancel{\lambda^2} - 6\lambda + 9 + \cancel{4\lambda^2} + 8\lambda + 4 = \cancel{\lambda^2} + 2\lambda + 1 + \cancel{\lambda^2} - 4\lambda + 4 + \cancel{4\lambda^2} - 8\lambda + 4$$

$$8\lambda = -8 \quad \Rightarrow \lambda = -1$$

Substituindo este valor de λ na expresión do punto xenérico de r, obtemos que o punto da recta r que equidista dos puntos P e Q é:

$$\boxed{R(-1,1,-2)}$$

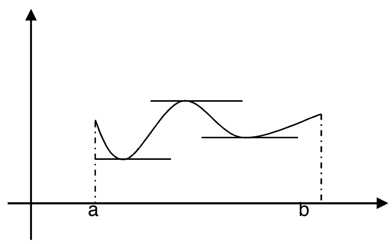
Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) *Teorema de Rolle*: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e ademais $f(a)=f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Interpretación xeométrica: Se se cumpren as hipóteses do teorema, existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe de abscisas.

b)

$$f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1+x^2) \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 + \frac{5x}{1+x^2} = \frac{2x^2+5x+2}{1+x^2}$$

Polo tanto, como $f(0)=0$ e $f'(0)=2$, a ecuación da recta tanxente no punto correspondente a $x=0$:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2x}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff 2x^2+5x+2 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \;\Rightarrow \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{5(1+x^2) - 10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$$

Polo tanto:

$f''(-2) < 0$
$f''(-\frac{1}{2}) > 0$

E así:

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Máximo relativo no punto } \left(-2, -4 + \frac{5ln5}{2}\right) \\ \textit{Mínimo relativo no punto } \left(-{}^{1}/_{2}, -1 + \frac{5\ln(5/4)}{2}\right) \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ ten que ser continua en $x = 1$, polo tanto:

$$\left.\begin{array}{c} lim_{x\to 1^-} f(x) = a + 2 \\ lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Miramos se para este valor de a, existe o límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

para iso, calculamos os límites laterais

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h-2)^2 - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = -6$$

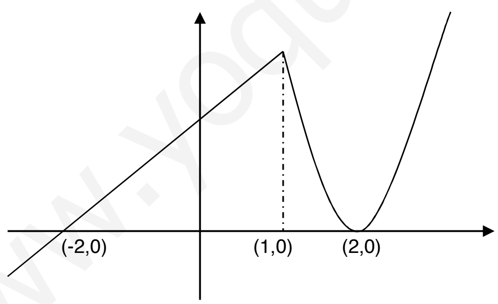
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h+2-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Vemos que os límites laterais non coinciden. En conclusión:

$$\boxed{f(x)\ non\ é\ derivable\ en\ x = 1\ para\ ningún\ valor\ de\ a}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & se\ \ x < 1 \\ 3(x-2)^2 & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$$



$$A = \int_{-2}^{1} (x+2)dx + \int_{1}^{2} 3(x-2)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} + [(x-2)^3]_1^2 = \frac{1}{2} + 2 - (2-4) + 0 - (-1)^3$$

$$= \frac{1}{2} + 2 + 2 + 1 = \frac{11}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{11}{2}\ u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 1*:**

a) $\begin{vmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) = -a^2 + 2a - a^2 - 2a^2 + 6a - 4 =$

$= -4a^2 + 8a - 4$

Así

$$|A| = 0 \iff a^2 - 2a + 1 = 0 \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1$$

Se $a = 1$, existen menores de orde 2 non nulos, por exemplo

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2 \\ a \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 \end{array}}$$

Se $a = 0$, xa vimos que $|A| = -4 \neq 0$, polo que existe A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$ABA^{-1} - A = 2I \iff ABA^{-1} = A + 2I \iff B = A^{-1}(A+2I)A = (I + A^{-1}) = A + 2I$$

$$\boxed{B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) $a = 1 \Rightarrow rang(A) = 2$. É un sistema homoxéneo con $rang(A) = 2 < nº\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado con infinitas solucións:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -2z \end{array} \right\} \iff \boxed{X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 2*:**

a) Determinamos os vectores normais aos planos:

$\vec{n}_{\pi_1} = (3,0,3) \ || \ (1,0,1)$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-3,0) \ || \ (1,1,0)$$

O ángulo α que forman os planos coincide co ángulo que forman os seus vectores normais. Así:

$$cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}||\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

Se chamamos r á recta pedida e $\vec{v}_r$ a un vector director dela,

$$\left.\begin{array}{l} r||\pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ r||\pi_2 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$$

Como a recta pasa polo punto (0,0,0), as ecuacións paramétricas son:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \ \ \lambda \\ z = \ \ \lambda \end{cases}}$$

b) Sexa s a recta perpendicular a π_1 pasando polo punto $(0,0,0)$ e $\vec{v}_s$ o seu vector director, entón:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{s}\perp\pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_{\pi_1} = (1,0,1) \\ \qquad (0,0,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

O punto de intersección, M, de s con π_1 é o punto medio do segmento OO' (O' simétrico de $O(0,0,0)$).

Calculamos o punto M de intersección de s con π_1

$$3\lambda + 3\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow M(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3})$$

Se $O'(x, y, z)$, entón:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{3} = \frac{0+x}{2} \\ 0 = \frac{0+y}{2} \\ \frac{4}{3} = \frac{0+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{O'(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3})}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

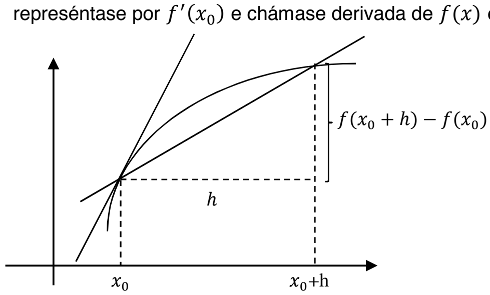
OPCIÓN A

***Exercicio 3*:**

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0.



Interpretación xeométrica: A recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0)), (x_0+h, f(x_0+h))$ ten por pendente $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ e cando $h \to 0$, esta secante acércase á recta tanxente pasando polo punto $(x_0, f(x_0))$. Así:

Pendente da recta tanxente en $(x_0, f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + m & se\ x < 0 \\ \dfrac{1}{2}\, e^{2x} - 2x + n & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 1 + m \Rightarrow m = -1$

E por ser continua en $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + n \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & se\ x < 0 \\ \frac{1}{2}\, e^{2x} - 2x - \frac{3}{2} & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Recta tanxente en $x = -2$:

$f(-2) = 5$

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Rightarrow \boxed{y = -5x - 5}$$

$f'(-2) = -5$

Recta tanxente en $x = \frac{ln2}{2}$:

$f\left(\frac{ln2}{2}\right) = -\frac{1}{2} - ln2$

$$y - f\left(\frac{ln2}{2}\right) = f'\left(\frac{ln2}{2}\right)\left(x - \frac{ln2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} + ln2}$$

$f'\left(\frac{ln2}{2}\right) = 0$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

***Exercicio 4*:**

$y = x(x-2) = x^2 - 2x$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \ \Rightarrow y = 0 \\ x(x-2) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right]$$

Puntos de corte cos eixes:

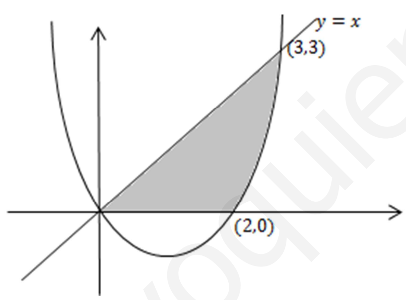
$(0,0)$ e $(2,0)$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2x - 2 \\ y' = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1 \\ y" = 2 < 0 \end{array}\right]$$

Mínimo e vértice $(1,-1)$. Convexa

Intersección da parábola coa recta $y = x$:

$x^2 - 2x = x \ \Rightarrow \ x^2 - 3x = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ Puntos de corte: $(0,0), (3,3)$



Polo tanto:

$$A = \int_0^2 x dx + \int_2^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^3 = 2 - 9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 6$$
$$= \frac{-78 + 81 + 16}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{19}{6}\, u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

***Exercicio 1*:**

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$

Orlamos este menor

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5$

$\Rightarrow \; rang(C) = \begin{cases} 2 & se \;\; m = 5 \\ 3 & se \;\; m \neq 5 \end{cases}$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{c} m = 5, \;\; rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº \; de \; incógnitas. \; Sistema \; compatible \; indeterminado. \\ m \neq 5, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº \; de \; incógnitas. \; Sistema \; compatible \; determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + \;\; z = 1 - y \\ 4x + 3z = 5 - 5z \end{array}\right\}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 5-5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = \; 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 4 & 5-5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = \; y - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad\quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \lambda \end{array}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

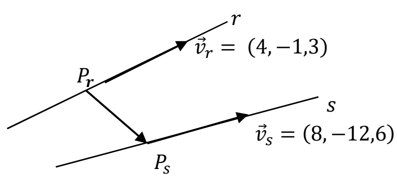
OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Calculamos o vector director da recta s:

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (8,-12,6)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (4,-1,3)$ e $\vec{v}_s = (8,-12,6)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$P_r(3,2,1) \in r; \;\; P_s(2,0,-\frac{3}{4}) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,-2,-\frac{7}{4})$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

b) Sexa π o plano buscado. Como o plano contén á recta r, $P_r(3,2,1) \in \pi$. Ademais, os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son vectores do plano. Polo tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boxed{\pi:\ 3x - 4z - 5 = 0}$$

c) Como o plano π é paralelo á recta s e contén á recta r

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = \frac{|6+3-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \boxed{4/5}$$

Tamén podemos calcular esa distancia utilizando a fórmula da distancia entre dúas rectas

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right)\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(30)^2+(40)^2}} = \boxed{4/5}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R}-\{2\}$

Simetrías:

$f(-x) = 1 + \frac{2}{(-x-2)^2} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) > 0$. Polo tanto non corta ao eixe de abscisas.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Corta ao eixe de ordenadas no punto $(0, \frac{3}{2})$

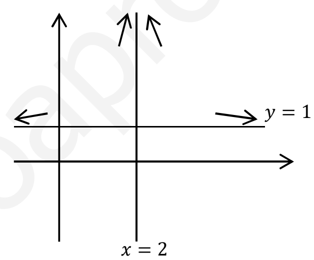
Asíntotas verticais:

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty \\ lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontais:

$lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asíntota horizontal

Non hai asíntotas oblicuas



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow$ Non hai puntos críticos

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

A función é crecente en $(-\infty, 2)$ e decrecente en $(2, +\infty)$. Non hai máximos nin mínimos.

Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$f"(x) = = \frac{12(x-2)^2}{(x-1)^6} = \frac{12}{(x-1)^4} > 0$. Non hai puntos de inflexión

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f"(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	∪	∪

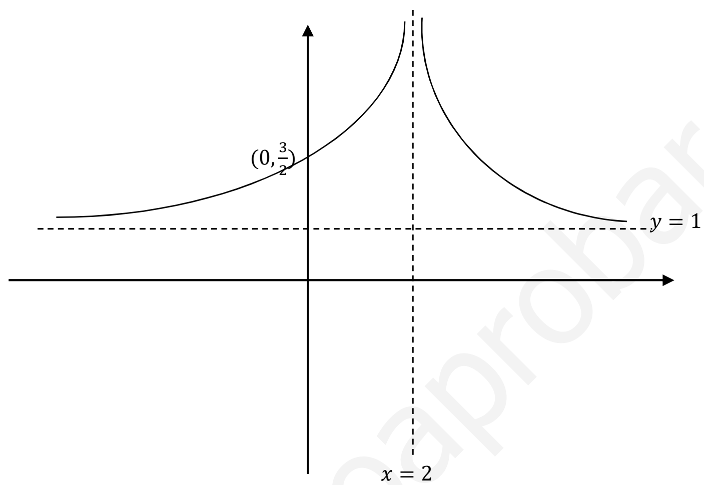
Convexa en todo o seu dominio

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$



CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) *Teorema fundamental do cálculo integral*: Se $f(x)$ é una función continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Aplicación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Recta tanxente: } y - F(0) = F'(0)(x-0) \\ F(0) = 0 \\ F'(x) = \frac{x^2+6}{2+e^x} \Rightarrow F'(0) = 2 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{Recta\ tanxente: y = 2x}$$

b) Calculamos a integral indefinida

$$\int x ln(1+x)dx = \frac{x^2}{2} l n(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{x^2}{2} l n(1+x) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

(grao numerador>grao denominador. Facemos a división)

$$= \frac{x^2}{2} l n(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{l n(1+x)}{2} + C$$

Aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 x ln(1+x)dx = \left[\frac{x^2}{2} l n(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} - \frac{l n(1+x)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2$$

$$\boxed{\int_0^1 x ln(1+x)dx = {}^1/_4}$$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **XUÑO 2015**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula os posibles valores de a, b, c para que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique a relación $(A - 2I)^2 = 0$, sendo I a matriz identidade de orde 2 e 0 a matriz nula de orde 2.

b) ¿Cal é a solución dun sistema homoxéneo de dúas ecuacións con dúas incógnitas, se a matriz de coeficientes é unha matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificando a relación $(A - 2I)^2 = 0$?

c) Para $a = b = c = 2$, calcula a matriz X que verifica $A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. Dada a recta $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

a) Determina a ecuación implícita do plano π que pasa polo punto $P(2,1,2)$ e é perpendicular a r. Calcula o punto de intersección de r e π.

b) Calcula a distancia do punto $P(2,1,2)$ á recta r.

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(2,1,2)$ respecto á recta r.

3. Debuxa a gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ estudando: dominio, simetrías, puntos de corte cos eixes, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.

b) Dada a función $f(x) = ax^3 + bx + c$, determina a, b e c sabendo que $y = 2x + 1$ é a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente á abscisa $x = 0$ e que $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + mz &= 3 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ $\qquad s: \left\{ \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4} \right.$

a) Estuda a súa posición relativa. Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa pola orixe de coordenadas e é paralelo a r e a s.

b) Calcula as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a r e a s.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula os valores de b e c para que a función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + x^2) & se\ x < 0 \\ x^2 + bx + c & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

sexa derivable en $x = 0$. (Nota: ln = logaritmo neperiano)

4. A gráfica dunha función $f(x)$ pasa pola orixe de coordenadas e a súa derivada é $f'(x) = (2 - x)e^{3x}$. Determina a función $f(x)$ e calcula os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **SETEMBRO 2015**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

i. Calcula o rango, segundo os valores de λ, de $A - \lambda I$, sendo I a matriz unidade de orde 3.

ii. Calcula a matriz X que verifica $XA - 2A = 3X$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é paralelo a r e pasa polos puntos $A(0,1,2)$ e $B(5,3,1)$

b) Calcula o punto de corte de r co plano perpendicular á devandita recta e que pasa por $B(5,3,1)$

c) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é paralelo ao plano $\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ e dista $\sqrt{29}$ unidades da recta r.

3. a) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & se\ x \leq 1 \\ \frac{2lnx+2}{x^2} & se\ x > 1 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 1$. (Nota: ln = logaritmo neperiano)

b) Para os valores $a = -4$ e $b = 6$, determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada polas gráficas da parábola $f(x) = 4x - x^2$ e as rectas tanxentes á gráfica de $f(x)$ nos puntos correspondentes a $x = 0$ e $x = 2$ (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes de coordenadas, o seu vértice e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned} x + y + z &= m \\ x - y &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema cando $m = 0$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$; s : $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de r e s. Calcula a distancia de r a s.

b) Se dous dos lados dun rectángulo están sobre as rectas r e s e dous vértices consecutivos do rectángulo son os puntos $A(0,1,1)$ e $B(0,4,4)$, calcula as coordenadas dos otros dous vértices e a área do rectángulo.

3. a) Define derivada dunha función nun punto. Interpretación xeométrica

b) Dada a función $f(x) = 2e^{-x}(x + 1)$, calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

4. a) a) Calcula: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2}$

b) Calcula unha primitiva da función $f(x) = xsenx$ que pase polo punto $(\pi, 0)$

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 1 punto**

b) 0,5 puntos

c) 1,5 puntos

2) **a) 1 punto**, distribuído en:
- 0,5 puntos pola ecuación do plano.
- 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.

b) 1 punto

c) 1 punto

3) **2 puntos**, distribuídos en:
- Dominio, simetrías e puntos de corte cos eixes: 0,25 puntos.
- Asíntotas: 0,25 puntos.
- Intervalos de crecemento e decrecemento: 0,25 puntos.
- Máximos e mínimos relativos: 0,25 puntos.
- Puntos de inflexión: 0,25 puntos.
- Intervalos de concavidade e convexidade: 0,25 puntos.
- Gráfica: 0,5 puntos.

4) **a) 1 punto,** distribuído en:
- Definición de primitiva: 0,5 puntos.
- Enunciado da regra de Barrow: 0,5 puntos

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola obtención de b e c.
- 0,5 puntos pola obtención de a.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:
- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) **a) 1,5 puntos**

b) 1,5 puntos

3) **a) 1 punto**, distribuído en:
- 0,5 puntos pola definición de derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto, distribuído en:
- 0,5 puntos pola determinación de c.
- 0,5 puntos pola determinación de b.

4) **2 puntos,** distribuídos en:
- 1 puntos pola integral
- 0,5 puntos pola condición f(0)=0.
- 0,5 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) **a) 1 punto,** distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de menor complementario
- 0,5 puntos pola definición de adxunto dun elemento

b) 2 puntos, distribuídos en:

i. 1 punto
ii. 1 punto

2) **a) 1 punto**
b) 1 punto
c) 1 punto

3) **a) 1 punto,** distribuído en:

- 0,5 puntos pola condición de continuidade
- 0,5 puntos pola condición de derivable

b) 1 punto

4) **2 puntos,** distribuídos en:

- 0,5 puntos pola representación da parábola
- 0,5 puntos pola determinación das tanxentes.
- 0,5 puntos pola formulación da área como unha integral definida.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m
- 1 punto pola discusión do sistema

b) 1 punto

2) **a) 1,5 puntos,** distribuídos en

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos polo cálculo da distancia entre as rectas.

b) 1,5 puntos, distribuídos en

- 1 punto polo cálculo dos dous vértices
- 0,5 puntos polo cálculo da área do rectángulo

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento
- 0,5 puntos pola determinación do máximo relativo.

4) **a) 1 punto**
b) 1 punto

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 & b \\ 0 & c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & b(a-2)+b(c-2) \\ 0 & (c-2)^2 \end{pmatrix}$

Polo tanto:

$$(A-2I)^2 = 0 \iff \begin{cases} (a-2)^2 = 0 \\ b(a-2)+b(c-2) = 0 \\ (c-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 2 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 2 \end{array}}$$

b) Tendo en conta o apartado anterior, a matriz de coeficientes do sistema homoxéneo sería

$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e polo tanto teriamos:
rang(A) = 2 = nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado, solución única. Como a trivial sempre é solución dun sistema homoxéneo, concluimos que a solución é

$$\boxed{x = y = 0}$$

c) Neste caso, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ademais, $\det(A) = 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot B \iff X = (A^{-1})^2 \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1})^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Como o plano π e a recta r deben se perpendiculares, o vector director da recta, $\vec{v}_r$, ten a dirección do vector normal ao plano. Así:

Vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-2,-1,1)$

Podemos entón utilizar a ecuación dun plano a partir dun punto e dun vector normal:

$$-2(x-2) - (y-1) + (z-2) = 0$$

e polo tanto:

$$\boxed{\pi: 2x + y - z - 3 = 0}$$

Para calcular o punto de intersección de r con π, substituimos as ecuacións paramétricas da recta na ecuación do plano:

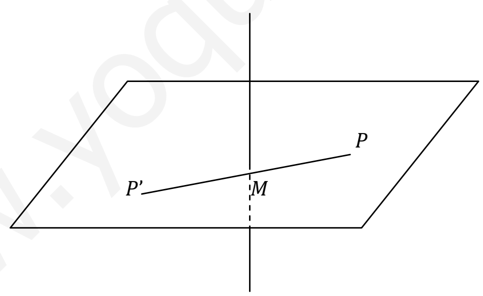
$$2(3-2\lambda) + 1 - \lambda - (4+\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Substituíndo este valor nas ecuacións paramétricas da recta , obtemos o punto de corte

$$\boxed{M(3,1,4)}$$

b) Dado que $P \in \pi$, r é perpendicular a π e M é o punto de intersección de r e π, a distancia pedida:

$$d(P,r) = d(P,M) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$



c) Para obter as coordenadas do punto $P'(x,y,z)$, simétrico de P, basta ter en conta que M é o punto medio do segmento que une P con P'. Polo tanto:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \frac{x+2}{2} \\ 1 &= \frac{y+1}{2} \\ 4 &= \frac{z+2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{P'(4,1,6)}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ é unha función racional.

Dominio:
A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R}-\{1\}$

Simetrías:
$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1} \neq \pm f(x)$. Polo tanto *non é simétrica respecto do eixe* Y *nin respecto da orixe.*

Puntos de corte cos eixes:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Polo tanto o único punto de corte cos eixes é a orixe $\boxed{O(0,0)}$.

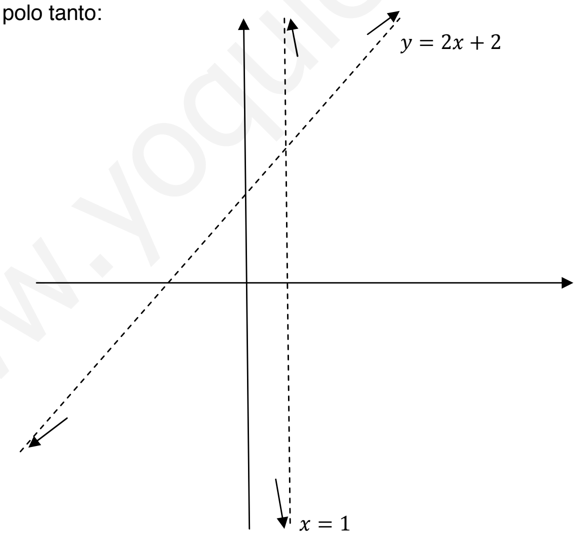
Asíntotas verticais: Hai unha en $\boxed{x = 1}$
Posición da curva respecto da asíntota:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Asíntota oblicua:
Como $grao\ do\ numerador = 2 = grao\ do\ denominador + 1$, hai asíntota oblicua.

$$\frac{2x^2}{x-1} = 2x + 2 + \frac{2}{x-1}$$

Polo tanto $\boxed{y = 2x + 2}$ é a asíntota oblicua. Ademais:
O signo da diferenza, $\frac{2}{x-1}$, é positivo cando $x \to +\infty$ e negativo cando $x \to -\infty$
Temos polo tanto:



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e en $(2, \infty)$ e decrecente en $(0,1)$ e en (1,2)
Máximo relativo en (0,0) e mínimo relativo en (2,8).

Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x)}{(x-1)^4} = \frac{4(x-1)^2 - 4x^2 + 8x}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$$

$$\boxed{Non\ ten\ puntos\ de\ inflexión}$$

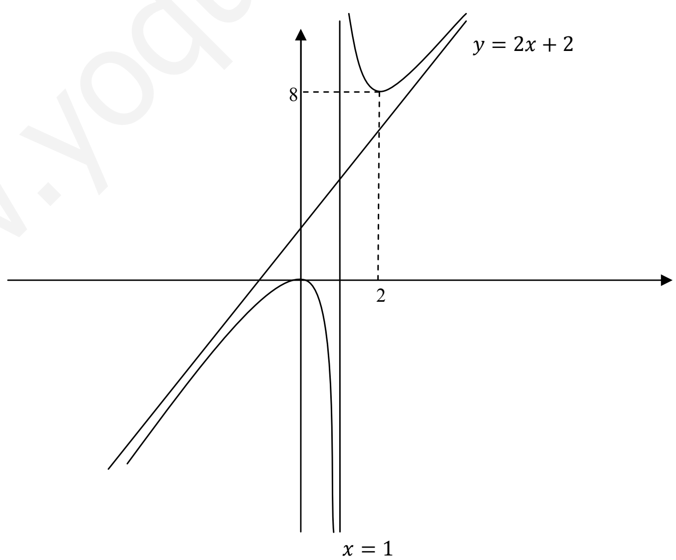
$$f''(0) < 0 \ \Rightarrow \ \boxed{máximo\ relativo\ en\ (0,0)}$$

$$f''(2) > 0 \ \Rightarrow \ \boxed{mínimo\ relativo\ en\ (2,8)}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪

Cóncava en $(-\infty, 1)$
Convexa en $(1, \infty)$

Gráfica de $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$



Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

a) Dise que $F(x)$ é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

b) $f(x) = ax^3 + bx + c$

$y = 2x + 1$ recta tanxente á gráfica de $f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} b = 2 \\ c = 1 \end{matrix}}$$

$f(x) = ax^3 + bx + c$
$f'(x) = 3ax^2 + b$

Finalmente:0

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^3 + 2x + 1)dx = \left[\frac{a}{4}x^4 + x^2 + x\right]_0^1 = \frac{a}{4} + 1 + 1$$

Polo tanto:

$$\frac{a}{4} + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a)

columnas iguais

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & m & 3 \end{pmatrix}$

Como a cuarta columna da matriz ampliada coincide coa segunda columna, podemos prescindir da cuarta columna para o cálculo do rango de A e polo tanto $rang(C) = rang(A)$.

Cálculo do rango de C:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 6; \quad m^2 + m - 6 = 0 \ \Rightarrow m \to \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix}$$

<u>Discusión:</u>

$m = -3,$	$rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = n^{\text{o}}\ de\ incógnitas.$	$Sistema\ compatible\ indeterminado.$
$m = 2,$	$rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = n^{\text{o}}\ de\ incógnitas.$	$Sistema\ compatible\ indeterminado.$
$m \notin \{-3,2\},$	$rang(C) = rang(A) = 3 = n^{\text{o}}\ de\ incógnitas.$	$Sistema\ compatible\ determinado.$

b) Para $\boxed{m = 2}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{matrix} x + y = 1 + z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 3y = 3 + 3z \\ 2x + 3y = 3 - 2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{matrix} x = 5\lambda \\ y = 1 - 4\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{matrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Punto de r: $P_r(3,-1,4)$
vector dirección de r: $\vec{v}_r = (1,0,2)$
Punto de s: $P_s(4,3,5)$
vector dirección de s: $\vec{v}_s = (3,-1,4)$

Non son proporcionais. As rectas córtanse ou crúzanse

Se os vectores $\vec{v}_r = (1,0,2)$ e $\vec{v}_s = (3,-1,4)$, que marcan as direccións das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,4,1)$ son independentes daquela non están no mesmo plano e as rectas polo tanto cruzaranse. Isto saberémolo vendo se o determinante da matriz formada coas coordenadas deses tres vectores é cero ou non:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 2 - 16 = 9 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{As\ rectas\ crúzanse}$$

O plano pedido, π, queda determinado polo punto $(0,0,0)$ do plano e os dous vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ paralelos ao plano e independentes entre si:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi: 2x + 2y - z = 0}$$

b) Punto xenérico de r: $R(3+\lambda, -1, 4+2\lambda)$

Punto xenérico de s: $S(4+3\mu, 3-\mu, 5+4\mu)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{RS} = (1+3\mu-\lambda, 4-\mu, 1+4\mu-2\lambda)$$

Agora impoñemos a condición de que $\overrightarrow{RS}$ sexa perpendicular a r e a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \perp r \Rightarrow (1+3\mu-\lambda, 4-\mu, 1+4\mu-2\lambda)\cdot(1,0,2) = 0 \\ \overrightarrow{RS} \perp s \Rightarrow (1+3\mu-\lambda, 4-\mu, 1+4\mu-2\lambda)\cdot(3,-1,4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5\lambda - 11\mu = 3 \\ 11\lambda - 26\mu = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \mu = 2 \end{array}\right.$$

Substituíndo $\lambda = 5$ e $\mu = 2$, obtemos:

$$R(8, -1, 14); \quad S(10, 1, 13); \quad \overrightarrow{RS} = (2, 2, -1)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta que corta perpendicularmente a r e a s son:

$$\boxed{t: \left\{\begin{array}{l} x = 8 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 14 - \lambda \end{array}\right.}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

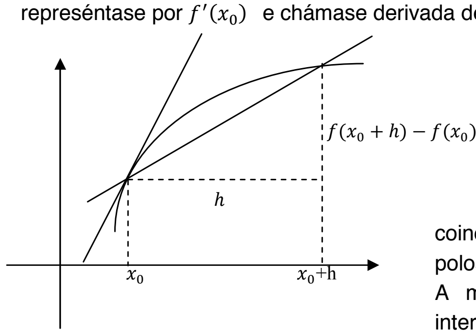
OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-\ f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0.



Interpretación xeométrica: O cociente

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convírtese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$:

$f'(x_0) = \ lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$ Pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$, en $x = x_0$.

b) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 0$, ten que ser continua en $x = 0$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 0$, debe ser $lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 0^-} f(x) = \ lim_{x\to 0^-} ln(e+x^2) = 1 \\ lim_{x\to 0^+} f(x) = \ lim_{x\to 0^+}(x^2 \ + bx + c) = c \\ f(0) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c\ =\ 1}$$

Se $c = 1$, $f(x)$ será derivable en $x = 0$ se $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{2x}{e+x^2} & se\ \ x < 0 \\ 2x\ + b & se\ \ x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b\ = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

$f(x)$ é unha primitiva de $f'(x) = (2-x)e^{3x}$ pasando polo punto $(0,0)$

$$\int (2-x)e^{3x}dx = \frac{1}{3}(2-x)e^{3x} + \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}(2-x)e^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C = e^{3x}\left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3}\right) + C$$

$$\left\{ Por\ partes: \quad \begin{array}{c} u = 2-x \ \Rightarrow \ du = dx \\ dv = e^{3x}dx \ \Rightarrow \ v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\}$$

$$f(0) = 0 \ \Rightarrow \ 0 = \frac{7}{9} + C \ \Rightarrow \ C = -\frac{7}{9}$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = e^{3x}\left(\frac{7}{9} - \frac{x}{3}\right) - \frac{7}{9}}$$

Para estudar a concavidade e convexidade de $f(x)$, estudamos o signo de $f''(x)$

$$f''(x) = -e^{3x} + 3(2-x)e^{3x} = e^{3x}(5-3x)$$

Como $e^{3x} > 0$, temos que

$$f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow x = 5/3$$

Polo tanto

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

$\boxed{\begin{array}{l} Convexa\ en\ (-\infty, 5/3) \\ Cóncava\ en\ (5/3, \infty) \end{array}}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dado un elemento a_{ij} dunha matriz cadrada $n \times n$, ao suprimir a súa fila e a súa columna, obtense unha submatriz $(n-1) \times (n-1)$ e o seu determinante é un menor de orde $n-1$, que se chama menor complementario do elemento a_{ij} e represéntase por α_{ij}.
Chámase adxunto de a_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir, é o menor complementario co seu signo ou co signo contrario, segundo $i+j$ sexa par ou impar.

b)

i) $$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + \cancel{1} - \cancel{1} - (1-\lambda) - \cancel{(1-\lambda)} + \cancel{(1-\lambda)} =$$
$$= (1-\lambda)[\cancel{1} + \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{1}] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

Se $\lambda = 0$:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $\lambda = 1$:
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Se $\lambda = 2$:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:
$$\boxed{Para\ \lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq 2, rang(A-\lambda I) = 3}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 0, rang(A-\lambda I) = 2}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 1, rang(A-\lambda I) = 2}$$
$$\boxed{Para\ \lambda = 2, rang(A-\lambda I) = 2}$$

ii) $XA - 2A = 3X \Leftrightarrow X(A-3I) = 2A \Leftrightarrow X = 2A(A-3I)^{-1}$

Polo apartado i., sabemos que existe $(A-3I)^{-1}$

$$|A-3I| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$(A-3I)^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) vector dirección de r: $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (5,10,5) \parallel (1,2,1)$

Elementos que determinan o plano: $\begin{cases} A(0,1,2) \\ \vec{v}_r = (1,2,1) \\ \overrightarrow{AB} = (5,2,-1) \end{cases}$

Se chamamos π ao plano buscado,

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff -4x + 6(y-1) - 8(z-2) = 0$$

$$\boxed{\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0}$$

b) Sexa α o plano perpendicular a r e que pasa polo punto $B(5,3,1)$. Entón

vector normal a α: $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r = (1,2,1)$

$$\alpha:\ (x-5) + 2(y-3) + (z-1) = 0 \Rightarrow \alpha:\ x + 2y + z - 12 = 0$$

Para calcular o punto de corte de α e r, escribimos as ecuacións paramétricas da recta (coñecemos $\vec{v}_r = (1,2,1)$ e evidentemente $(0,0,0) \in r$):

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para obter o punto de corte da recta e o plano, substituímos as coordenadas do punto xenérico da recta na ecuación do plano:

$$\lambda + 4\lambda + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Polo tanto a recta corta ao plano no punto correspondente ao valor do parámetro $\lambda = 2$:

$$\boxed{P(2,4,2)}$$

c) Se chamamos β ao plano buscado,

$$\left.\begin{matrix} \beta \parallel \pi \\ \pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta: 2x - 3y + 4z + D = 0$$

Ademais,

$$\left.\begin{matrix} \beta \parallel r \\ (0,0,0) \in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(r,\beta) = d\big((0,0,0),\beta\big) = \frac{|D|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{|D|}{\sqrt{29}}$$

Polo tanto:

$$\frac{|D|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \Rightarrow D = \pm 29$$

$$\boxed{\begin{matrix} \beta: 2x - 3y + 4z + 29 = 0 \\ ou \\ \beta: 2x - 3y + 4z - 29 = 0 \end{matrix}}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$, ten que ser continua en $x = 1$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 1$, debe ser $lim_{x\to 1} f(x) = f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} lim_{x\to 1^-} f(x) = lim_{x\to 1^-}(ax^2 + b) = a + b \\ lim_{x\to 1^+} f(x) = lim_{x\to 1^+} \frac{2lnx+2}{x^2} = 2 \\ f(1) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 2$$

Se $a + b = 2$, $f(x)$ será derivable en $x = 1$ se $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2ax + b & se \;\; x < 1 \\ \frac{2x-2x(2lnx+2)}{x^4} & se \;\; x > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2a + b = -2$$

Polo tanto, $f(x)$ será derivable en $x = 1$, se:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = \;\;6 \end{array}}$$

b) Para $a = -4$ e $b = 6$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} -8x + 6 & se \;\; x \leq 1 \\ \frac{2x-2x(2lnx+2)}{x^4} & se \;\; x > 1 \end{array}\right.$$

$-8x + 6 = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 3/4$

$$2x - 2x(2lnx + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2lnx - 2) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; x = 0 < 1 \\ \searrow \; 2lnx = -1 \;\; \Leftrightarrow x = e^{-1/2} < 1 \end{array}$$

Polo tanto, o único valor que anula a primeira derivada é $x = 3/4$.

	$(-\infty, 3/4)$	$(3/4, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} Crecente \; en \; (-\infty, 3/4) \\ Decrecente \; en \; (3/4, \infty) \end{array}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

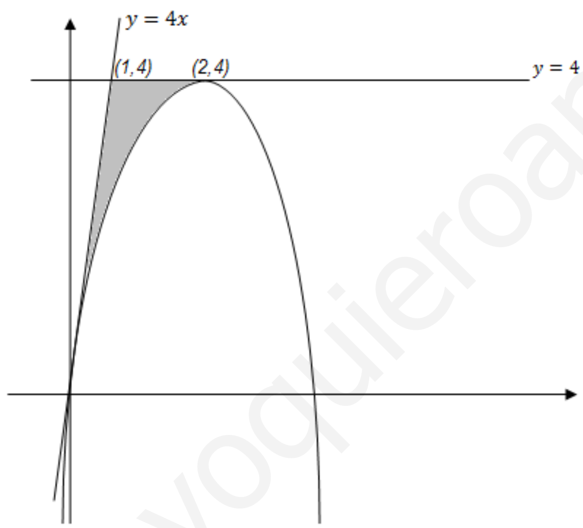
$f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$

Puntos de corte cos eixes: $(0,0), (4,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ f'(x) = 0 \iff x = 2 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Cóncava. Vértice: } (2,4)$$

Recta tanxente en $(0,0)$: $y = 4x$

Recta tanxente en $(2,4)$: $y = 4$



$$A = \int_0^1 [\cancel{4x} - (\cancel{4x} - x^2)]\,dx + \int_1^2 [4 - (4x - x^2)]\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \cancel{8} - \cancel{8} + \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3}\,u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a)

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+1+3-2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad rang(C) = 2$$

Cálculo do rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4m \;\Rightarrow\; \quad rang(A) = 2 \; se \; m = 0; \quad rang(A) = 3, se \; m \neq 0$$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 0, \;\; rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº \; de \; incógnitas. \; Sistema \; compatible \; indeterminado. \\ m \neq 0, \qquad rang(C) = 2 \; \neq 3 = rang(A). \; Sistema \; incompatible. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 0}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -z \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} z \\ y = -\dfrac{1}{2} z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2}\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$P_r(0,1,1); \quad \vec{v}_r = (0,3,3)$

$P_s(-4,2,0); \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$

Coordenadas proporcionais. Polo tanto, as rectas son paralelas ou coincidentes

$P_r(0,1,1) \in r, \; P_r(0,1,1) \notin s$

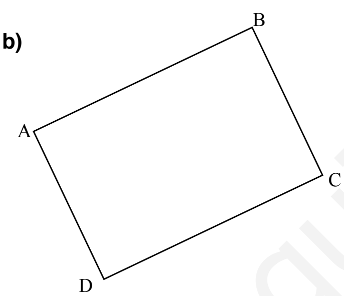
$\boxed{As\ rectas\ son\ paralelas\ non\ coincidentes}$

Como as rectas son paralelas, a distancia entre elas pode calcularse como a distancia dun punto dunha delas á outra:

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v_s}|}{|\vec{v_s}|} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$\left\{ \overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,4,-4) \right\}$$

b)



Evidentemente $A, B \in r$. Polo tanto, $C, D \in s$. Tendo en conta que $P_s(-4,2,0)$ e $\vec{v}_s = 0,1,1)$, un punto xenérico de s será da forma $(-4, 2+\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow (0,3,3)\cdot(-4, \lambda-2, \lambda-4) = 0 \Rightarrow 3\lambda - 6 + 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \boxed{C(-4,5,3)}$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow (0,3,3)\cdot(-4, \lambda+1, \lambda-1) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 + 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{D(-4,2,0)}$

A área do rectángulo podemos calculala como:

$$A = d(r,s)\cdot d(A,B) = d(r,s)\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2} = 18$$

Ou ben

$$A = d(A,B)\cdot d(A,D) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(2-1)^2+(-1)^2} = 18$$

Polo tanto:

$$\boxed{A = 18\,u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

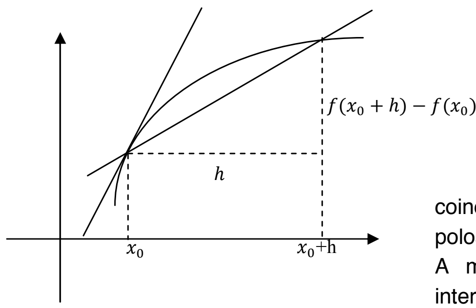
OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0, se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-\ f(x_0)}{h}$$

represéntase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0.



Interpretación xeométrica: O cociente

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convírtese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x=x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$:

$f'(x_0)=\ lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$ Pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$, en $x=x_0$.

b) $f'(x)=\ -2e^{-x}(x+1)+\ 2e^{-x}=\ -2xe^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\ 0\ \Leftrightarrow\ x=0 \\ f''(x)=\ -2e^{-x}+\ 2xe^{-x}=2e^{-x}(x-1) \\ f''(0)=\ -2<0 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{Máximo\ relativo: (0,2)}$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

$$\boxed{\begin{array}{l} Crecente\ en\ (-\infty,0) \\ Decrecente\ en\ (0,\infty) \end{array}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{1}{4}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{4(4+x)\sqrt{4+x}}}{2} = \boxed{-\frac{1}{64}}$$

b) Buscamos unha función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e ademais $F(\pi) = 0$

$$\int xsenxdx = -xcosx + \int cosx\,dx = -xcox + senx + C$$

$$\left\{ Por\ partes: \begin{array}{c} u = x \ \Rightarrow\ du = dx \\ dv = senxdx \ \Rightarrow\ v = -cosx \end{array} \right\}$$

$$0 = F(\pi) = \pi + C \ \Rightarrow\ C = -\pi$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = -xcox + senx - \pi}$$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAU XUÑO 2014	Código: 26

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Estuda, segundo os valores de m, o rango da matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

b) Coincide A coa súa inversa para algún valor de m?

c) Determina unha matriz simétrica X de orde 2 tal que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e o determinante da matriz $3X$ sexa -9

2. a) Calcula o punto simétrico do punto $P(-2,0,2)$ respecto ao plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$.

b) Sexa r a recta perpendicular ao plano $\pi: 3x + 2y + z - 3 = 0$ e que pasa polo punto $P(-2,0,2)$.

Consideremos a recta $s: \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - z - 10 = 0 \end{cases}$

Estuda a posición relativa de r e s. Calcula a ecuación do plano paralelo a s que contén a r.

3. a) Define función continua nun punto. ¿Que tipo de discontinuidade ten $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ nos puntos $x = 0$ e $x = 2$?

b) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ no seu punto de inflexión.

4. a) Calcula $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 - \sqrt{x}}$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)

b) Calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} dx$

OPCIÓN B

1.a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= m + 9 \\ mx + 3y - z &= 0 \\ 3x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = -9$.

2. a) Define o producto vectorial de dous vectores. Dados os vectores $u = (2,2,0)$, $v = (1,1,-1)$, calcula os vectores unitarios e perpendiculares aos dous vectores u e v.

b) Calcula o valor de a para que a recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$ non corte ao plano $\pi: 5x + ay + 4z = 5$. Para ese valor de a, calcula a distancia da recta ao plano.

3. a) Dada a función $f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$ calcula os valores de a, b, c sabendo que $x = \frac{1}{2}$ é unha asíntota vertical e que $y = 5x - 6$ é a recta tanxente á súa gráfica no punto correspondente a $x = 1$. Para os valores de a, b, c calculados, posúe $f(x)$ máis asíntotas?

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Pódese aplicar, no intervalo $[0,1]$, este teorema á función $f(x) = \frac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula o punto ao que fai referencia o teorema.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2$ e a recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **SETEMBRO 2014**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2puntos, exercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

1. a) Define menor complementario e adxunto dun elemento nunha matriz cadrada.

b) Sexan I a matriz identidade de orde 3 e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina os valores de λ para os que $A + \lambda I$ non ten inversa.

c) Calcula a matriz X que verifica $AX - A = 2X$, sendo A a matriz dada no apartado b).

2. Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = 4 + 3\mu \end{cases}$ e a recta $r: \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π e r. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula o ángulo que forman π e r. Calcula o plano que contén a r e é perpendicular a π.

3. a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-2x} - 2x}{sen^2 x}$

b) Queremos dividir un fío metálico de 70 metros de lonxitude en tres partes de maneira que unha delas teña dobre lonxitude que outra e ademais que ao construír con cada parte un cadrado, a suma das áreas dos tres cadrados sexa mínima. Calcula a lonxitude de cada parte.

4. a) A segunda derivada dunha función $f(x)$ é $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. Ademais a tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0,1)$ é paralela á recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$.

b) Calcula $\int_0^{\pi/2} xsen(2x + \pi)dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + my + (m-1)z &= m \\ (m-1)y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 3$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x + y - 2z - 5 = 0 \\ y - 5z - 1 = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 5 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral e as ecuacións paramétricas do plano que contén a r e a s.

c) Calcula a distancia do punto $Q(1,1,4)$ á recta s.

3. Dada a función $f(x) = \begin{cases} mx & se \ x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & se \ x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula os valores de a, b e m para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$ e teña un extremo relativo en $x = 3$.

b) Enuncia o teorema do valor medio do cálculo diferencial. Para os valores $a = 1$, $b = -6$ e $m = -4$, calcula, se existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que a tanxente á gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sexa paralela ao segmento que une os puntos $(0,0)$ e $(5,-4)$.

4. a) Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx$

b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Se $F(x) = \int_0^x \frac{2}{3+3e^t}dt$, calcula $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1)

- **1** punto
- 0,5 puntos
- 1,5 puntos

2)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola recta perpendicular ao plano π e pasando polo punto P.
- 0,25 puntos polo punto de intersección da recta anterior con plano π.
- 0,25 puntos polo cálculo das coordenadas do punto simétrico.

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo da posición relativa das dúas rectas.
- 1 punto pola ecuación (vectorial, paramétrica ou implícita) do plano que contén a unha recta e é paralelo á outra.

3)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de función continua nun punto.
- 0,25 puntos polo estudo da continuidade en $x = 0$.
- 0,25 puntos polo estudo da continuidade en $x = 2$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0, 5 puntos pola obtención do punto de inflexión.
- 0, 5 puntos pola obtención da recta tanxente no punto de inflexión.

4)

a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo cambio de variable.
- 0,5 puntos pola descomposición en fraccións simples e o cálculo das integrais que resultan.
- 0,25 puntos por aplicar Barrow

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1)

a) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto polo cálculo dos rangos segundo os valores de m.
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto

2)

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,75 puntos pola definición do produto vectorial de dous vectores.
- 0,75 puntos pola determinación dos vectores pedidos.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo cálculo de a.
- 1 punto pola distancia da recta ao plano

3)

a) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo cálculo de c.
- 0,5 puntos polo cálculo de a e b.
- 0,25 puntos pola asíntota horizontal.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,25 puntos pola xustificación de que se pode aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial á función dada e no intervalo dado.
- 0,25 puntos pola obtención do punto ao que fai referencia o teorema.

4) 2 puntos, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola representación da parábola.
- 0,5 puntos pola recta normal no punto pedido.
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. **a) 0,5 puntos**

b) 1 punto

c) 1,5 puntos

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1,5 puntos, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola determinación do ángulo que forman a recta e o plano.
- 1 punto polo plano que contén á recta e é perpendicular ao plano dado.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola expresión da función a minimizar
- 0,5 puntos pola determinación do punto crítico e xustificar que é mínimo.

4. a) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención de $f'(x)$
- 0,5 puntos polal obtención de $f(x)$

b) 1 punto

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. **a) 2 puntos,** distribuidos en:

   - 1 punto pola determinación dos rangos segundo os valores de m.
   - 1 punto pola discusión do sistema.

   b) 1 punto.

2. **a) 1,5 puntos**, distribuidos en:

   - 1 punto pola posición relativa das rectas.
   - 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

   b) 0,75 puntos

   c) 0,75 puntos

3. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
   - 0,5 puntos pola determinación do punto

4. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
   - 0,5 puntos pola aplicación do teorema fundamental do cálculo integral.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + \mathbf{3m} + 2 - 3m - 2m^2 - 3 = m^2 - 1;$$

Polo tanto:

Se $m = 1$ ou $m = -1$, entón $rang(A) = 2$
Se $m \neq \pm 1$, entón $rang(A) = 3$

b) $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+4 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Como $m^2 + 4 \neq 1, \forall m$
Podemos afirmar:

$$\boxed{A^2 \neq I, \forall m}$$

c) Por ser unha matriz simétrica de orde 2: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Facendo o produto das matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b + c = 5 \end{cases}$$

E a condición sobre o determinante:

$$-9 = \det(3X) = 9\det(X) \Rightarrow \det(X) = -1 \Rightarrow ac - b^2 = -1$$

Temos así un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ b + c = 5 \\ ac - b^2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ c = 5 - b = 2 + a \\ a(2+a) - (3-a)^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Polo tanto:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = (3,2,1)$

Recta perpendicular a π pasando por $P(-2,0,2)$:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = \quad\;\; 2\lambda \\ z = \;\; 2 + \;\lambda \end{cases}$$

Calculamos o punto de intersección de r con π:

$$3(-2+3\lambda) + 4\lambda + 2 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2 \quad \Rightarrow M = (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{5}{2})$$

Para obter as coordenadas do punto $P'(x,y,z)$, simétrico de $P(-2,0,2)$, basta ter en conta que M é o punto medio do segmento que une P con P'. Polo tanto:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= \frac{x-2}{2} \\ 1 &= \frac{y+0}{2} \\ \frac{5}{2} &= \frac{z+2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{P'\,(1,2,3)}$$

b) Determinamos un punto e un vector director de cada unha das dúas rectas:

$$P_r = P(-2,0,2) \in r\ ; \quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (3,2,1)$$

$$P_s = (0,30,-10) \in s; \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

E como

4+36+30+24+2-90 $\neq$ 0

$$rang(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = rang\begin{pmatrix} 2 & 30 & -12 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Polo tanto:

$\boxed{\text{As rectas } r \text{ e } s \text{ crúzanse}}$

Sexa α o plano que contén a r e é paralelo a s. Entón, o punto $P_r = P(-2,0,2) \in r$ é un punto de α e $\vec{v}_r = (3,2,1)$, $\vec{v}_s = (1,-1,1)$ son dous vectores paralelos a dito plano. Polo tanto:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x+2) + 2y + 5(z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha:\ 3x - 2y - 5z + 16 = 0}$$

Nota: Non se pedía ningún tipo de ecuación do plano, polo que tamén valía a vectorial ou paramétricas.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Una función $f(x)$ dise continua nun punto x_0 se:

1) Existe e é finito $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2) Existe $f(x_0)$
3) O valor da función no punto coincide co límite anterior: $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

Discontinuidade en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = -\infty$$

Discontinuidade de salto infinito

Discontinuidade en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = 2$$

Discontinuidade evitable.
Evítase definindo $f(2) = 2$

b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$
$f'(x) = 6x^2 - 12x$
$f''(x) = 12x - 12$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$f'''(x) = 12$

$\Rightarrow$ No punto (1,-3), $f(x)$ ten un punto de inflexión.

$f'(1) = 6$ = pendente da recta tanxente á grafica de $f(x)$ no punto (1,-3). Polo tanto, a ecuación da recta tanxente no punto (1,-3) é:

$y + 3 = -6(x - 1)$

É dicir: $\boxed{y = -6x + 3}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{2x-1}}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{3/2} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

Substitución: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+2}$

Calculamos as raíces do denominador e facemos a descomposición en fraccións simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t+A+2B}{(t+2)(t+1)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ \\ A + 2B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1;\ B = 1$$

Entón:

$$\int \frac{dt}{t^2+3t+2} = -\int \frac{dt}{t+2} + \int \frac{dt}{t+1} = ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$$

Tendo en conta que $e^x = t$ e aplicando Barrow:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \left[ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(e+2) - ln2 + ln3 = \ln(3e+3) - \ln(2e+4)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = ln\left(\frac{3e+3}{2e+4}\right)}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ m & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & m+9 \\ m & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) \;\geq\; 2$$

$$|C| = 45 + 2m + 3 + 18 - 3 + 5m = 63 + 7m$$

Polo tanto

Se $m = -9$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \neq -9$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = -9$ (nos demais casos, o rango é 3 pois sempre $rang(C^*) \geq rang(C) = 3$ e C^* ten 3 filas). Pero para $m = -9$, todos os elementos da cuarta columna de C^* son 0, polo que podemos prescindir dela a efectos do rango e así, neste caso, temos que $rang(C^*) = rang(C) = 2$

Entón
$m = -9 \Rightarrow rang(C^*) = 2$
$m \neq -9 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

Discusión:

$m = -9 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas.$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións. $m \neq -9 \;\Rightarrow\; rang(C) = 3 = rang(C^*) = número\ de\ incógnitas.$ Sistema compatible determinado. Solución única

b) $\boxed{m = -9}$
Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. O sistema é equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} -y - 2z = -3x \\ 3y - z = 9x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3y - 6z = -9x \\ 3y - z = 9x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y = 3x \end{array}\right.$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) O produto vectorial de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é outro vector que se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$ e que se obtén do seguinte modo:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son non nulos e non proporcionais, entón $\vec{u} \times \vec{v}$ e o vector de
   i. Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\widehat{u,v})$
   ii. Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$
   iii. Sentido: cara arriba se $(\widehat{u,v}) < 180^0$ e cara abaixo se $(\widehat{u,v}) > 180^0$ (tomando o ángulo en sentido positivo, é dicir, contrario ao movemento das agullas do reloxo).
2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son linearmente dependentes, é dicir, se algún deles é $\vec{0}$ ou se teñen a mesma dirección, entón $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Os vectores pedidos serán:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}; \ \vec{w}_2 = -\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,2,0); \qquad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

Entón:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{w}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\ \vec{w}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \end{array}}$$

b) A recta e o plano serán paralelos se o vector director da recta é perpendicular ao vector normal ao plano:

$$r \parallel \pi \iff \vec{v}_r = (2,6,-4) \perp \vec{n}_\pi = (5,a,4)$$

Polo tanto:

$r \parallel \pi \iff 10 + 6a - 16 = 0$

Así: $\boxed{r \parallel \pi \iff a = 1}$

Como, para $a = 1$, a recta e o plano son paralelos, a distancia da recta ao plano é a distancia dun punto da recta ao plano:

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) \overset{P_r(0,2,2);\ \vec{n}_\pi = (5,1,4)}{=} \frac{|0+2+8-5|}{\sqrt{25+1+16}} = \frac{5}{\sqrt{42}}$$

Polo tanto:

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{5\sqrt{42}}{42}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) $x = {}^{1}/_{2}$ asíntota vertical $\Rightarrow$ $\boxed{c = 2}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{a(2x-1) - 2(ax+b)}{(2x-1)^2} = \frac{\cancel{2ax} - a - \cancel{2ax} - 2b}{(2x-1)^2} = \frac{-a-2b}{(2x-1)^2}$$

Como a recta $y = 5x - 6$ é tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -5 \\ \\ f'(1) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = -1 \\ \\ -a - 2b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{a = 3} \\ \\ \boxed{b = -4} \end{array}\right.$$

Para estes valores de a, b e c, $f(x)$ ten unha asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-4}{2x-1} = {}^{3}/_{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{As\acute{\imath}ntota\ horizontal:\ y = {}^{3}/_{2}}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b) entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

A función dada é unha función racional e o denominador non se anula no intervalo $[0,1]$. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$ e podemos aplicar o teorema do valor medio do cálculo diferencial:

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(2c-1)^2} = \frac{1 - 1/2}{1-0} \Rightarrow c^2 - 4c + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - \sqrt{2} \in (0,1) \\ c_2 = 2 + \sqrt{2} \notin (0,1) \end{cases}$$

Polo tanto, o punto que cumple a igualdade do teorema é:

$$\boxed{c = 2 - \sqrt{2}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$f(x) = -x^2 \Rightarrow f(1) = -1$

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 =$ pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(1,-1)$

Entón, $m = {}^{1}/_{2}$ = pendente da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,-1)$

Ecuación da recta normal á gráfica de $f(x)$ no punto $(1,-1)$:

$y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

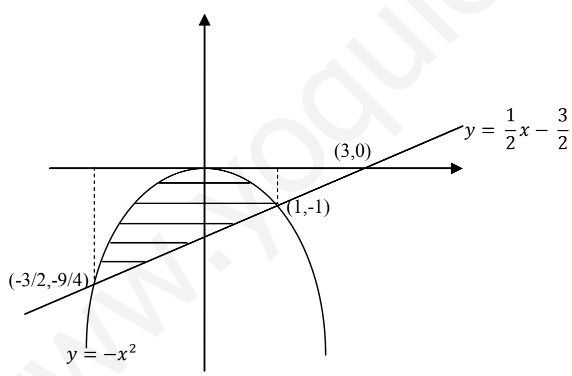
$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ ten un máximo en $(0,0) \Rightarrow (0,0)$ é o vértice da parábola

Puntos de corte cos eixes: $\begin{cases} \text{parábola: } (0,0) \\ \text{recta normal: } (3,0), (0,-3/2) \end{cases}$

Puntos de corte da parábola e a recta normal:

$-x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -3/2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-3/2,-9/4);\ (1,-1)$



$A = \int_{-3/2}^{1}(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-3/2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\right) =$

$\frac{-4-3+18}{12} - \frac{18-9-36}{16} = \frac{11}{12} + \frac{27}{16} = \frac{125}{48}$

$$\boxed{Área = \frac{125}{48}\ u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dada unha matriz cadrada de orde n, chámase menor complementario do elemento a_{ij}, ao valor do determinante da matriz de orde n-1 que resulta de suprimir a fila i e a columna j. Represéntase por α_{ij}.
Chámase adxunto do elemento a_{ij} a: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, é dicir é o menor complementario co seu signo ou con signo cambiado, segundo que $i+j$ sexa par ou impar.

b) $A + \lambda I$ non ten inversa $\Leftrightarrow |A + \lambda I| = 0$

$$|A + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^3 - 4(1+\lambda) = (1+\lambda)[(1+\lambda)^2 - 4] =$$
$$= (1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (1+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+3)$$

Polo tanto

$$\boxed{A + \lambda I \; non\ ten\ inversa \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = \;\;1 \end{cases}}$$

c) $AX - A = 2X \Leftrightarrow (\mathrm{A} - 2\mathrm{I})\mathrm{X} = \mathrm{A} \overset{\text{por b), } \exists (A-2I)^{-1}}{\Leftrightarrow} \mathrm{X} = (\mathrm{A} - 2\mathrm{I})^{-1} \cdot \mathrm{A}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad |A - 2I| = -1 + 4 = 3$$

$$(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 4/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \\ 4/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director da recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1)$$

Determinamos un vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6,-6,0)$$

Entón:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 6 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r\ e\ \pi\ córtanse\ nun\ punto}$$

O vector $(1,1,0)$ ten a dirección de $\vec{n}_\pi$ e o punto $P(2,1,4) \in \pi$. Así, a ecuación implícita do plano π é:

$$x - 2 + y - 1 = 0 \Rightarrow \pi: x + y - 3 = 0$$

Para calcular o punto de corte, resolvemos o sistema formado polas ecuacións da recta e a do plano:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Punto\ de\ corte: (0,3,4)}$$

b) Se α = ángulo que forman π e r, entón:

$$sen\alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{6}{\sqrt{2}\sqrt{72}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

Chamemos β ao plano que contén a r e é perpendicular a π. Os vectores $\vec{v}_r$ e $\vec{n}_\pi$ son polo tanto vectores contidos no plano β

Como β contén a r, os puntos da recta son puntos de β. Por exemplo,

$$(4,3,0) \in r \Rightarrow (4,3,0) \in \beta$$

Como non se especifica ningún tipo de ecuación do plano, podemos dar calquera, por exemplo as paramétricas:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 4 - \lambda + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = \lambda \end{array}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{sen^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen x + 2e^{-2x} - 2}{2 sen x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 4e^{-2x}}{2\cos^2 x - 2sen^2 x} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

b)

Lonxitudes das partes: x; $2x$; $70 - 3x$

Función a minimizar:

$$f(x) = \frac{1}{16}\left[x^2 + 4x^2 + (70-3x)^2\right] = \frac{1}{16}\left(14x^2 - 420x + 4900\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(28x - 420)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \iff x = \frac{420}{28} = 15 \\ \\ f''(x) = \frac{28}{16} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (15, f(15)) \text{ mínimo}$$

$$\boxed{Lonxitudes\ das\ partes: 15cm; 30cm; 25cm}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$f'(x)$ é unha primitiva de $f''(x)$, así que calculamos a integral indefinida de $f''(x)$:

$\int (4e^{2x} - 2x)dx = 2e^{2x} - x^2 + C$

Para determinar a constante C usamos que $f'(0)$ = pendente da recta $x - y + 3 = 0$. Polo tanto

$1 = f'(0) = 2 + C \Rightarrow C = -1$

Entón, $f'(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$

Calculamos a integral indefinida de $f'(x)$, posto que $f(x)$ é unha primitiva de $f'(x)$

$\int (2e^{2x} - x^2 - 1)dx = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x + K$

E para determinar a constante K, usamos que $f(x)$ pasa polo punto $(0,1)$

$1 = f(0) = 1 + K \Rightarrow K = 0$

Así:

$$\boxed{f(x) = e^{2x} - \frac{x^3}{3} - x}$$

b)

$\int x sen(2x+\pi)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \int \frac{1}{2}\cos(2x+\pi)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{1}{4}sen(2x+\pi) + C$

$$\left\{\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen(2x+\pi)dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(2x+\pi)}{2} \end{matrix}\right\}$$

$\int_0^{\pi/2} x sen(2x+\pi)dx = \left[-\frac{x}{2}\cos(2x+\pi) + \frac{1}{4}sen(2x+\pi)\right]_0^{\pi/2} = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) \;\geq\; 2$

$|C| = m - (m-1)^2 - 1 = -m^2 + 3m - 2;\;\; |C| = 0 \;\Leftrightarrow\; m = 1 \; ou \; m = 2$

Polo tanto:

Se $m = 1 \; ou \; m = 2$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \notin \{1,2\}$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango da matriz ampliada C^*:

Se $m \notin \{1,2\}$, entón $rang(C^*) = 3$ (sempre $rang(C^*) > rang(C)$)

<u>$m = 1$:</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C^*) = 3$

<u>$m = 2$:</u>

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C^*) = 3$

<u>Discusión:</u>

$m = 1 \; ou \; m = 2 \;\Rightarrow\; rang(C) = 2 < 3 = rang(C^*).\; Sistema\; incompatible.$
$m \notin \{1,2\} \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(C^*) = nº\; incógnitas.\; Sistema\; compatible\; determinado.$

b)

Para $m = 3$, estamos no caso dun sistema compatible determinado e polo tanto ten solución única. Calculamos a solución utilizando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = 3$$

$x = \frac{3}{2}$
$y = -\frac{3}{2}$
$z = 3$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$P_r(4,1,0)$; $\quad \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-3,5,1)$

$P_s(1,2,5)$; $\quad \vec{v}_s = (1,-2,0)$

Coordenadas non proporcionais. Polo tanto, as rectas córtanse ou crúzanse

Para saber se se cortan ou se cruzan, estudiamos o $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s})$, polo anterior xa sabemos que $rang(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1 - 6 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right) = 2$$

$$\boxed{As\ rectas\ córtanse}$$

Para calcular o punto de corte, sustituimos a x, y e z das ecuacións de s nas ecuacións de r:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda + 2 - 2\lambda - 10 - 5 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda = -12 \\ 2 - 2\lambda - 25 - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda = -12 \end{aligned}$$

E substituíndo nas ecuacións de s, obtemos as coordenadas do punto de corte

$$\boxed{Punto\ de\ corte: (-11,26,5)}$$

b) Como o plano contén ás rectas, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ son dous vectores contidos no plano e polo tanto, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ é un vector normal ao plano. Ademais, calquera punto das rectas tamén pertence ao plano, por exemplo $P_r(4,1,0)$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,1,1)$$

Ecuación implícita:

$$2(x-4) + (y-1) + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + y + z - 9 = 0}$$

c)

$$d(Q,s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_sQ} \times \vec{v}_s\right|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{5}}$$

$$\overrightarrow{P_sQ} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-1,1)$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 1$

a) $\left.\begin{array}{l} lim_{x\to1^-} f(x) = m \\ lim_{x\to1^+} f(x) = a + b + 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m = a + b + 1$

$f'(x) = \begin{cases} m & se \;\; x < 1 \\ 2ax + b & se \;\; x > 1 \end{cases}$

Entón, debe cumprirse:

$\left.\begin{array}{l} m = \;\; a + b + 1 \\ m = 2a + b \end{array}\right\} \longleftarrow$ Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$

$6a + b = 0 \longleftarrow$ $(f'(3) = \; 6a + b, f'(3) = 0,$ por ter un extremo relativo en $x = 3$.)

Resolvendo este sistema obtense:

$$\boxed{m = -4; \;\; a = 1; \;\; b = \; -6}$$

b) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f(x)$ é continua no intervalo $[a, b]$ e derivable en (a, b), entón existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - \; f(a)}{b - \; a}$$

é dicir, a tanxente á gráfica de $f(x)$, no punto $x = c$, é paralela ao segmento que une os puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Para os valores dados, a función é derivable en $\mathbb{R}$ (en $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$ é polinómica e para eses valores xa vimos que era derivable en $x = 1$) e ademais

$$f(x) = \begin{cases} -4x & se \;\; x < 1 \\ x^2 - \; 6x + 1 & se \;\; x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -4 & se \;\; x < 1 \\ 2x - 6 & se \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

Temos que encontrar un $c \in (0,5)$ tal que $f'(c)$ coincida coa pendente do segmento que une os puntos $(0,0), (5, -4)$, é dicir:

$f'(c) = \frac{-4-0}{5-0} = \; -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 2c - \; 6 \; = \; -\frac{4}{5} \; \Rightarrow \; 2c = \; \frac{26}{5}$

$$\boxed{c = \; {}^{13}/_{5}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a)

$e^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{2}{3}ln|t| - \frac{2}{3}ln|1+t| + C =$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)] + C$$

$e^x = t \Rightarrow x = lnt$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}[x - \ln(1+e^x)]_0^1 = \frac{2}{3}[1 - \ln(1+e) + ln2]$$

$$\boxed{Solución: \frac{2}{3}ln\frac{2e}{1+e}}$$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3+3e^x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU

XUÑO 2013

Código: 26

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sexan B^t a matriz trasposta de B e I a matriz identidade de orde 3.
a) Estuda, segundo os valores do parámetro λ, o rango de $AB^t + \lambda I$.
b) Calcula a matriz X que verifica: $AB^tX - X = 2B$.

2. Dados o plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ e a recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y \quad - 2 = 0 \end{cases}$
a) Estuda a posición relativa de r e π. Calcula a distancia de r a π.
b) Calcula a ecuación xeral ou implícita do plano que contén a r e é perpendicular a π.

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Ten a ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ algunha solución no intervalo $(0,1)$? ¿Ten esta ecuación máis dunha solución real?
b) Calcula os valores de a e b para que $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$

4. a) Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e os intervalos de concavidade e convexidade da función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e a bisectriz do primeiro cadrante. (Nota: para o debuxo da gráfica de $f(x)$, é suficiente utilizar o apartado anterior e calcular os puntos de corte cos eixes).

OPCIÓN B

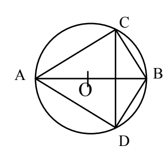
1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + z &= 2 \\ mx - y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.

2. a) Calcula as ecuacións paramétricas da recta r que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular ao plano π determinado polos puntos $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$ e $C(3,0,0)$.
b) Calcula os posibles valores de a para que o punto $P(a,a,a)$ equidiste da recta r e do plano π do apartado anterior.

3. Nunha circunferencia de centro O e radio 10 cm. trázase un diámetro AB e unha corda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A que distancia do centro O da circunferencia debe estar a corda CD, para que a diferencia entre as áreas dos triángulos ADC e BCD sexa máxima?



4. a) Enuncia o teorema de Rolle. Determina o valor de a para que sexa aplicable o teorema de Rolle á función $f(x) = x^3 + ax - 1$, no intervalo $[0,1]$. Para este valor de a, calcula un punto $c \in (0,1)$ no que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ sexa paralela ao eixe OX.
b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAU

SETEMBRO 2013

Código: 26

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2puntos, exercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

1. a) Sexa M unha matriz cadrada de orde 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina a matriz X que verifica a ecuación matricial $(M - 2I)^2 X = I$, sendo I a matriz identidade de orde 2.

b) Determina todas as matrices B da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2 = 4B$. Se algunha é inversible, calcula a súa inversa.

c) ¿Cando un sistema de ecuacións lineais se di homoxéneo?¿Pode ser incompatible un sistema de ecuacións lineais homoxéneo? Xustifica a resposta.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de r e s. Se se cortan, calcula o punto de corte. Se determinan un plano, calcula a ecuación xeral ou implícita dese plano.

b) Estuda a posición relativa de r e o plano $\pi: 4x - 4y + 2z + 7 = 0$. Calcula a distancia de r a π.

3. a) Calcula: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^x}$

b) Se $f(x)$ é unha función continua no intervalo $[1,4]$ tal que $\int_1^2 f(x)dx = 2$ e $\int_1^4 f(x)dx = -4$, ¿cal é o valor de $\int_2^4 5f(x)dx$? Enuncia as propiedades da integral definida que utilices.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, e as rectas $y = 20$; $x - y + 15 = 0$. (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula, segundo os valores de m, o rango de A.

b) ¿Coincide A coa súa inversa para algún valor de m? Para $m = 0$, calcula A^{60}

c) Se $m = 2$ e A é a matriz de coeficientes dun sistema de tres ecuacións lineais con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que o sistema ten solución única? Xustifica a resposta

2. a) Dado o plano $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda + \mu \\ y = -3\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ calcula as ecuacións en forma continua da recta r que pasa polo punto $P(2, -3, -4)$ e é perpendicular ao plano α. Calcula o punto de corte de r con α.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que pasa polos puntos $P(2, -3, -3)$ e $Q(3, -2, -4)$ e é perpendicular ao plano α.

c) Calcula as ecuacións paramétricas da recta intersección do plano $\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$ co plano α

3. Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos de $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

4. a) Define primitiva dunha función e enuncia a regra de Barrow.

b) Calcula $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención $AB^t + \lambda I$.
- 1 punto pola obtención do rango de $AB^t + \lambda I$, segundo os valores de λ.

b) 1,5 puntos

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa da recta e o plano.
- 1 punto pola distancia da recta ao plano.

b) 1 punto

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a ecuación ten unha solución no intervalo (0,1).
- 0,25 puntos por xustificar que a ecuación ten solución única no intervalo (0,1).

b) 1 punto, distribuído en:

- 0, 5 pola obtención de b.
- 0, 5 pola obtención de a.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,5 puntos pola determinación dos intervalos de concavidade e convexidade

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo debuxo da rexión.
- 0,5 pola formulación do problema.
- 0,25 puntos polo cálculo da área

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1. **a) 2 puntos**, distribuídos en:

   - 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante da matriz de coeficientes
   - 1,5 puntos pola discusión do sistema (0,5 puntos pola discusión no caso m=-1/2; 0,5 puntos pola discusión no caso m=1; 0,5 puntos pola discusión no caso m≠-1/2,1)

   b) 1 punto

2. **a) 1 punto**

   b) 2 puntos, distribuídos en:

   - 0,5 puntos pola distancia do punto ao plano
   - 1 punto pola distancia do punto á recta
   - 0,5 puntos pola obtención dos valores de a.

3. **2 puntos**, distribuídos en:

   - 0,5 puntos pola obter a expresión correspondente á diferencia das áreas en función de dúas variables
   - 0,5 puntos pola relación entre as dúas variables na función anterior e expresar a función a maximizar en función dunha variable.
   - 0,5 puntos pola obtención da derivada da función a maximizar
   - 0,5 puntos pola obtención do valor que maximiza a diferencia das áreas

4. **a) 1 punto,** distribuído en:

   - 0,5 polo enunciado do teorema de Rolle
   - 0,25 puntos pola determinación do valor de a.
   - 0,25 puntos pola determinación do valor de c.

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
   - 0,5 puntos polas integrais que resultan.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. **a) 0,5 puntos**, pola obtención da matriz X

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención das matrices B que verifican a relación dada.
- 0,5 puntos polo cálculo da inversa

c) 1 punto, distribuido en:

- 0,5 puntos pola definición de sistema de ecuacións lineais homoxéneo
- 0,5 puntos por xustificar que todo sistema homoxéneo é compatible.

2. a) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola posición relativa das rectas
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.
- 0,5 puntos pola ecuación implícita do plano.

b) 1,5 puntos, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola posición relativa da recta e o plano.
- 1 punto polo cálculo da distancia da recta ao plano.

3. a) 1 punto

b) 1 punto, distribuido en:

- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.
- 0,5 puntos polo enunciado das propiedades da integral definida.

4. **2 puntos**, distribuidos en:

- 0,5 puntos pola representación da parábola
- 1 punto pola formulación do problema
- 0,5 puntos polo cálculo da área

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

1. **a) 1 punto**

   b) 1 punto, distribuido en:

   - 0,5 puntos pola obtención do valor de m para o cal $A = A^{-1}$.
   - 0,5 puntos polo cálculo de A^{60}.

   c) 1 punto, pola xustificación da unicidade da solución.

2. **a) 1 punto**, distribuido en:

   - 0,5 puntos pola obtención das ecuacións, en forma continua, da recta r.
   - 0,5 puntos polo cálculo do punto de corte da recta e o plano.

   b) 1 punto

   c) 1 punto

3. **2 puntos**, distribuidos en:

   - 0,25 puntos polo dominio.
   - 0,5 puntos polas asíntotas.
   - 1 punto polos intervalos de crecemento e decrecemento.
   - 0,25 puntos polos máximos e mínimos.

4. **a) 1 punto,** distribuido en:

   - 0,5 puntos pola definición de primitiva dunha función.
   - 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.

   b) 1 punto, distribuído en:

   - 0,5 puntos pola división do numerador entre o denominador e a descomposición en suma de fraccións simples.
   - 0,5 puntos polo cálcula das integrais que resultan.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\det(AB^t + \lambda I) = \lambda(\lambda^2 - 1 + 1) = \lambda^3$

Polo tanto, $\det(AB^t + \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Se $\lambda = 0$, entón

$$AB^t + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Filas proporcionais e

fila de ceros

Temos así que:

$$\boxed{rang(AB^t + \lambda I) = \begin{cases} 3 & se\ \lambda \neq 0 \\ 1 & se\ \lambda = 0 \end{cases}}$$

$\exists(AB^t - I)^{-1}$ pois para λ=-1, $rang(AB^t - I) = 3$

b) $AB^tX - X = 2B \Leftrightarrow (AB^t - I)X = 2B \Leftrightarrow X = 2(AB^t - I)^{-1}B$

Calculamos $(AB^t - I)^{-1}$:

$$AB^t - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \det(AB^t - I) = -1$$

$$(AB^t - I)^{-1} = \frac{1}{\det(AB^t - I)}(Ad(AB^t - I)_{ij})^t = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$X = 2\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boxed{X = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Doutra forma:

$$AB^tX - X = 2B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b + c &= 2 \\ a - 2b - c &= 2 \\ -c &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} a &= -8 \\ b &= 4 \\ c &= -2 \end{aligned}} \right.$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Resolvemos o sistema de ecuacións lineais determinado polas ecuacións da recta e do plano

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y \quad\; - \; 2 = 0 \end{cases}$$
$$\pi: x + y - z - 1 = 0$$

Discutimos o sistema formado polas tres ecuacións.

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

O rango de C é como mínimo 2 xa que os planos que determinan a recta son secantes; e dado que

$$|C| = -3 + 2 - 1 + 2 = 0$$

Podemos concluír que $rang(C) = 2$. Por outra parte

$|C^*| = 3 + 12 + 2 - 6 - 6 - 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(C^*) = 3$
Polo tanto:
$rang(C) = 2 \neq 3 = rang(C^*)$. O sistema é incompatible e temos que

$$\boxed{r \; e \; \pi \; son \; paralelos}$$

Como a recta e o plano son paralelos, para calcular a distancia de r a π, calculamos a distancia dun punto arbitrario de r ao plano π:
se tomamos como punto de r: $P_r(1,0,3)$, entón

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|1-3-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}; \qquad \boxed{d(r,\pi) = \sqrt{3} \; unidades}$$

b) Calculamos o vector director da recta r:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,2,1)$$

Elementos que determinan o plano pedido: $\begin{cases} \text{Un punto do plano: } P_r(1,0,3) \\ \text{Dous vectores contidos no plano:} \\ \vec{v}_r = (-1,2,1) \text{ e } \vec{n}_\pi = 1,1,-1) \end{cases}$

entón, a ecuación xeral do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x + z - 4 = 0}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe polo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideremos a función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x - 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ é continua en } [0,1] \text{ xa que é continua} \\ \text{en } \mathbb{R} \text{ por ser unha función polinómica.} \\ f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{teorema de Bolzano}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (0,1) \text{ tal que } f(c) = 0$$

Polo tanto, $\boxed{a\ ecuación\ x^3 + 2x - 2 = 0, ten\ unha\ solución\ real\ no\ intervalo\ \in (0,1).}$

Se $f(x)$ tivese dúas raíces reais c_1 e c_2 entón

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [c_1, c_2] \text{ e derivable en} \\ (c_1, c_2) \text{ por ser continua e derivable en } \mathbb{R} \\ f(c_1) = 0 = f(c_2) \end{array}\right\} \overset{\text{teorema de Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, d \in (c_1, c_2) \text{ tal que } f'(d) = 0$$

(a función derivada tería unha raíz real)

pero a función derivada, $f'(x) = 3x^2 + 2$, non ten raíces reais. Polo tanto:

$$\boxed{x^3 + 2x - 2 = 0, ten\ unha\ única\ solución\ real\ e\ esa\ solución\ está\ no\ intervalo\ (0,1).}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{sen(x^2)} \underset{\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\text{, aplicamos L'Hôpital.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2ax + b - 2e^{2x}}{2xcos(x^2)} = \frac{b-2}{0}$

Para que este límite sexa finito, ten que ser $\boxed{b = 2}$.

Tomando $b = 2$, resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{2ax + 2 - 2e^{2x}}{2xcos(x^2)} \underset{\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\text{, aplicamos L'Hôpital.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2a - 4e^{2x}}{2xcos(x^2) - 4x^2 sen(x^2)} = \frac{2a-4}{2}$$

Entón

$\frac{2a-4}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0; \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	>0	<0	>0
$f(x)$	Crecente	Decrecente	Crecente

Crecente nos intervalos $(-\infty, 2/3)$ e $(2, \infty)$
Decrecente no intervalo $(2/3, 2)$

$f''(x) = 6x - 8; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3$

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
$f''(x)$	<0	>0
$f(x)$	Cóncava	Convexa

Cóncava en $(-\infty, 4/3)$
Convexa en $(4/3, \infty)$

b) $x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0.$

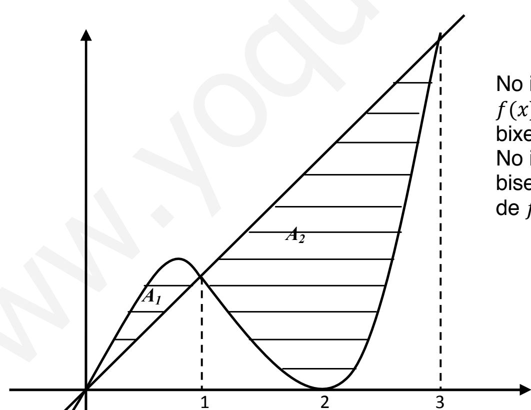
Os puntos de corte de $f(x)$ cos eixes son: $(0,0)$ e $(2,0)$

$x^3 - 4x^2 + 4x = x \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x = 0; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Os puntos de corte de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$ son: (0,0); (1,1) e (3,3)

Con estes puntos de corte e os resultados do apartado a), podemos debuxar a rexión limitada polas gráficas de $f(x)$ e a bisectriz $y = x$



No intervalo (0,1), a gráfica de $f(x)$ está por riba da gráfica de bixectriz
No intervalo (1,3), a gráfica da bisectriz está por riba da gráfica de $f(x)$.

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 4x - x)\, dx + \int_1^3 (x - x^3 + 4x^2 - 4x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{37}{12}\, u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $C^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos o rango de C:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\Rightarrow\; rang(C) \;\geq\; 2$$

$$|C| = -2 - m + 2m + 2 + 1 - 2m^2 = -2m^2 + m + 1$$

$$2m^2 - m - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = \tfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Polo tanto

Se $m = 1$ ou $m = -1/2$, entón $rang(C) = 2$
Se $m \neq 1$ e $m \neq -1/2$, entón $rang(C) = 3$

Calculamos o rango de C^* para $m = 1$ e para $m = -1/2$; (nos demais casos, o rango é 3, pois sempre $rang(C^*) \geq rang(C)$ e C^* ten 3 filas).

$$\underline{m = 1} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\underline{m = -1/2} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} -1/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1/2 - 4 + 2 + 1 = -3/2 \neq 0;$$

Entón
$m = 1 \Rightarrow rang(C^*) = 2$
$m \neq 1 \Rightarrow rang(C^*) = 3$

<u>Discusión:</u>

$m = -1/2 \Rightarrow rang(C) = 2 \neq 3 = rang(C^*)$. Sistema incompatible. Non ten solución
$m = 1 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.
$m \neq -1/2\ e\ m \neq 1 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(C^*) < número\ de\ incógnitas$.
Sistema compatible determinado. Solución única

b) $\boxed{m = 1}$
Tendo en conta o apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. O sistema é equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} -y + z &= -x \\ -y + 2z &= 1 - 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 1 - x;\; y = 1$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 1; \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= 1 - \lambda \end{aligned}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a) Os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son linealmente independentes e están contidos no plano π. Polo tanto, o vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ten a dirección da recta r:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2,4,-2)$$

E podemos tomar como $\vec{v}_r = (1,-2,1)$. Tendo en conta que a recta pasa pola orixe de coordenadas, as súas ecuacións paramétricas serán:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = & \lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}}$$

b) Tendo en conta que un punto da recta é $P_r(0,0,0)$, a distancia do punto $P(a,a,a)$ á recta r ven dada por:

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{P_rP} \times \vec{v_r}\|}{\|\vec{v_r}\|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & a \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\|(3a,0,-3a)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18a^2}}{\sqrt{6}} = |a|\sqrt{3}$$

O plano π pasa polo punto $A(1,0,2)$ e os vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,0,-2)$ son dous vectores contidos no plano, polo tanto a súa ecuación xeral é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x - 2y + z - 3 = 0$$

e a distancia do punto $P(a,a,a)$ ao plano π é:

$$d(P,\pi) = \frac{|a-2a+a-3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

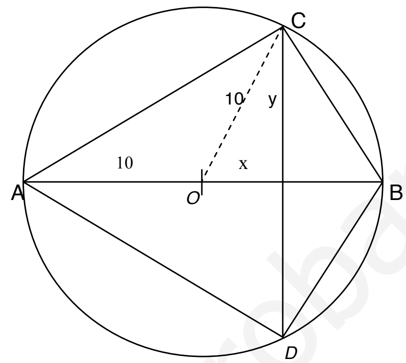
Polo tanto,

$$d(P,r) = d(P,\pi) \Leftrightarrow |a|\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\pm a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:



Triángulo ADC:
Base: $2y$
Altura: $10 + x$

$Área = y(10+x)$

Triángulo BCD:
Base: $2y$
Altura: $10 - x$

$Área = y(10-x)$

Diferencia de áreas:

$A_1 - A_2 = y(10+x) - y(10-x) = 2xy$

O teorema de Pitágoras proporciónanos unha relación entre x e y :

$y = \sqrt{10^2 - x^2}$

Polo tanto, a función a maximizar que nos proporciona a diferencia de áreas é:

$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Calculamos os valores que anulan a primeira derivada

$$f'(x) = 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(100-x^2) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

Comprobamos que $x = 5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo:

$$f''(x) = -\frac{2x}{\sqrt{100-x^2}} - \frac{4x\sqrt{100-x^2} + \frac{2x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2};\quad f''(5\sqrt{2}) = -\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} - \frac{200+100}{50} = -8 < 0$$

$\boxed{Solución: 5\sqrt{2}\ cm.}$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

a) Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 + ax - 1$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, xa que é unha función polinómica. Polo tanto, é continua en $[0,1]$ e derivable en $(0,1)$. Para aplicar Rolle neste intervalo, debemos impoñerlle a condición $f(0) = f(1)$

$f(0) = f(1) \quad \Rightarrow \boxed{a = -1}$

Un punto do intervalo $(0,1)$ no que a recta tanxente é paralela ao eixe OX, será un punto do intervalo no que se anule a primeira derivada (a existencia dese punto está garantida polo teorema de Rolle)

$f(x) = x^3 - x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1;$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, pero $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ non é un punto do intervalo $(0,1)$. Polo tanto:

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$\frac{x^3+3}{x^2-x} = x + 1 + \frac{x+3}{x^2-x}$

Como $x^2 - x = x(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$\frac{x+3}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow A = -3; B = 4$

Entón:

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-x}dx = \int \left(x + 1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|x| + 4ln|x-1| + C$$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{2}x^2 + x - 3ln|x| + 4ln|x-1| + C}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) $(M-2I)^2X = I \;\Leftrightarrow\; (M^2-4M+4I)X = I \;\underset{M^2=4M}{\Rightarrow}\; 4X = I \;\Rightarrow\; \boxed{X = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}$

b) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 2xy = 4y \\ x^2+y^2 = 4x \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; y(2x-4) = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \text{ ou } x = 2$$

<u>Se $y = 0$:</u>

$x^2 = 4x \;\Rightarrow\; x = 0$ ou $x = 4$.

<u>Se $x = 2$:</u>

$y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y = \pm 2$

Polo tanto, as matrices que cumpren as propiedades do exercicio son:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Destas matrices, a única que ten determinante distinto de cero, e polo tanto inversa, é a matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. A súa inversa é a matriz

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}.$$

c) Un sistema de ecuacións lineais dise <u>homoxéneo cando os termos independentes son todos cero.</u> Polo tanto, nun sistema lineal homoxéneo sempre o rango da matriz de coeficientes coincide co rango da matriz ampliada, xa que ao ser os termos independentes nulos a columna que se engade non inflúe a efectos do cálculo do rango. Polo tanto <u>un sistema de ecuacións lineais homoxéneo é sempre compatible.</u>

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Determinamos os vectores directores das dúas rectas:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_s = (1,2,2). \\ \\ \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,2)\end{array}\right\}$$

Como os vectores directoras das rectas non son paralelos, as rectas córtanse ou crúzanse.

Vemos que se cortan, calculando o punto de corte. Para iso, substituímos as expresións de x, y e z de s nas ecuacións de r:

$$\begin{array}{r} 2+t-6-4t+2+2t+1=0 \;\Rightarrow\; t=-1 \\ 6+4t-2-2t-2=0 \;\Rightarrow\; t=-1 \end{array}$$

as dúas ecuacións son compatibles e polo tanto as dúas rectas teñen un punto común, que se obtén facendo $t = -1$ nas ecuacións de s:

$$\boxed{Punto\ de\ corte: (1,1,0)}$$

Como as rectas se cortan, determinan un plano α. Elementos que determinan o plano α:

- O punto $(1,1,0)$
- O vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2,2,-1)$ que é un vector normal ao plano α

e a ecuación implícita do plano α será:

$$-2(x-1) + 2(y-1) - z = 0$$

é dicir

$$\boxed{\alpha : 2x - 2y + z = 0}$$

b) vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = (4,-4,2)$. Entón

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{v}_r \Rightarrow r$ e π son paralelos

Un punto da recta r é o punto de corte calculado antes: $P_r(1,1,0)$. Polo tanto:

$$d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|4-4+7|}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{7}{6}$$

Doutro modo:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha : 2x - 2y + z = 0 \\ \pi : 4x - 4y + 2z + 7 = 0\end{array}\right\}$$

Os planos α e π son paralelos e como a recta r está contida no plano α, entón a recta r é paralela ao plano π: $2x - 2y + z + \frac{7}{2} = 0$

Polo tanto:

$$d(r,\pi) = d(\alpha,\pi) = \frac{|7/2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{7}{6}$$

Así:

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{7}{6}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+1}{xe^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{x}+xe^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x}}{1+x} = \lim_{x\to\infty} 2e^{x} = \infty$$

Simplificamos

b)

$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx$ (Propiedade 1)

$\int_2^4 5f(x)dx = 5\int_2^4 f(x)dx$ (Propiedade 2)

Polo tanto

$$\int_2^4 5f(x)dx = 5\int_2^4 f(x)dx = 5\left[\int_1^4 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx\right] = 5(-4-2) = -30$$

Propiedade 2 Propiedade 1

Así:

$$\boxed{\int_2^4 5f(x)dx = -30}$$

Propiedade 1 (Aditividade respecto ao intervalo de integración): Se $a < b < c$ e $f(x)$ é continua en $[a,c]$ entón

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Propiedade 2: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ entón

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ para calquera $c \in \mathbb{R}$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

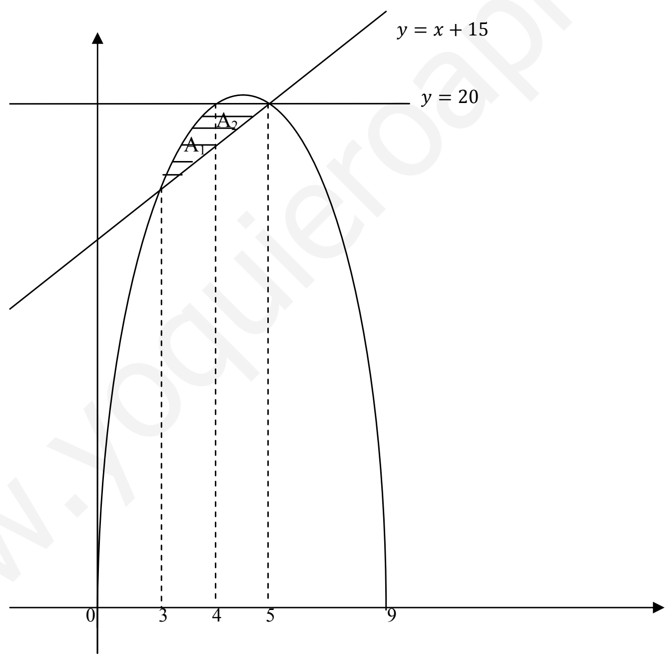
Exercicio 4:

Parábola: $y = -x^2 + 9x = x(-x+9) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Puntos de corte cos eixes: } (0,0),\ (9,0) \\ \text{Vértice: } \left({}^{9}/_{2},\ {}^{81}/_{4}\right) \\ \text{Cóncava (o coeficiente de } x^2 \text{ é negativo)} \end{cases}$

Puntos de corte da parábola coas rectas:

$-x^2 + 9x = 20 \;\Rightarrow\; x^2 - 9x + 20 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$ Puntos de corte: (4,20), (5,20)

$-x^2 + 9x = x + 15 \;\Rightarrow\; x^2 - 8x + 15 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ ou \\ x = 5 \end{cases}$ Puntos de corte: (3,18), (5,20)



$$A = A_1 + A_2 = \int_3^4 (-x^2 + 9x - x - 15)dx + \int_4^5 (20 - x - 15)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x\right]_3^4 + \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_4^5 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - 60 + 9 - 36 - 45 + 25 - \frac{25}{2} - 20 + 8 = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{7}{6}\,u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -m^2 + 1 \,; \qquad -m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Polo tanto

- $m = \pm 1 \Rightarrow rang(A) = 2$
- $m \neq \pm 1 \Rightarrow rang(A) = 3$

b) $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+1 & 0 & 2m \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto

$$\boxed{A = A^{-1} \Leftrightarrow m = 0}$$

Se $m = 0$, acabamos de obter que $A^2 = I$, entón

$$\boxed{A^{60} = (A^2)^{30} = I^{30} = I}$$

c) Vimos no apartado a) que se $m = 2$, entón $rang(A) = 3$

Como o rango da matriz ampliada é maior ou igual que o rango da matriz de coeficientes e tampouco pode ser maior que 3, pois ten 3 filas, estamos nun caso de

Rang(matriz de coeficientes) = rang(matriz ampliada) = número de incógnitas

Polo tanto, é un sistema compatible determinado con solución única.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Como a recta é perpendicular ao plano, entón o vector director da recta é perpendicular ao plano:

$\vec{v}_r = \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,4,6)$. Tomamos como vector director: (1,2,3)

Entón as ecuacións da recta en forma continua son:

$$\boxed{r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}}$$

Para calcular o punto de corte da recta e o plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta

$r: \begin{cases} x = \ \ 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$ ⇒ Punto xenérico $Q(2+\lambda, -3+2\lambda, -4+3\lambda)$

Calculamos a ecuación xeral do plano ($\vec{n}_\alpha = (1,2,3)$ e un punto do plano é (3,0,3))

$\alpha: x - 3 + 2y + 3(z-3) = 0 \ \Rightarrow \ \alpha: x + 2y + 3z - 12 = 0$

Impoñemos a condición de que $Q \in \pi$

$2 + \lambda - 6 + 4\lambda - 12 + 9\lambda - 12 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 2$

Polo tanto, o punto de corte será:

$$\boxed{P(4,1,2)}$$

b) Os vectores $\overrightarrow{PQ} = (1,1,-1)$ e $\vec{n}_\alpha = (1,2,3)$ son dous vectores contidos no plano β pedido. Polo tanto,

$\vec{n}_\beta = \overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5,-4,1)$ é un vector perpendicular ao plano β

e a ecuación xeral do plano β será:

$5(x-2) - 4(y+3) + z + 3 = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0}$

c) Basta resolver o sistema de ecuacións lineais dadas polas ecuacións xerais de α e β

$x + 2y + 3z - 12 = 0$

$5x - 4y + z - 19 = 0$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, o sistema anterior é equivalente ao seguinte:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 12 - 3z \\ 5x - 4y = 19 - z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 12-3z & 2 \\ 19-z & -4 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{43}{7} - z; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12-3z \\ 5 & 19-z \end{vmatrix}}{-14} = \frac{41}{14} - z;$$

e as ecuacións paramétricas da recta intersección son:

$$\boxed{s: \begin{cases} x = \dfrac{43}{7} - \lambda \\ y = \dfrac{41}{14} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

$f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$

O denominador non se anula nunca, polo tanto

$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$ e $\boxed{Non\ existen\ asíntotas\ verticais}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2xe^{x^2}} = 0$

Indeterminación. Aplicamos L'Hôpital

Polo tanto

$\boxed{Asíntota\ horizontal: y = 0. Non\ ten\ asíntota\ oblicua}$

Estudo da derivada:

$f'(x) = \frac{2e^{x^2} - (2x+1)2xe^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{e^{x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$

Como $e^{x^2} > 0$, o signo de $f'(x)$ determínao o numerador. Temos polo tanto que

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	Decrecente	Crecente	Decrecente

Crecente en: $(-1, 1/2)$

Decrecente en: $(-\infty, -1)$ e $(1/2, \infty)$

En $x = -1$, a función pasa de decrecente a crecente e en $x = 1/2$ pasa de crecente a decrecente. Polo tanto:

$\boxed{\begin{array}{l} Mínimo: (-1, -1/e) \\ Máximo: (1/2, 2/e^{\frac{1}{4}}) \end{array}}$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a) Unha función $F(x)$ dise que é unha *primitiva* de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

b) Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do polinomio do denominador, facemos a división:

$$\frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + B}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -{}^1/_2 ; B = {}^3/_2$$

Entón:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \int \left(x + \frac{x+2}{x^2-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1| + C$$

e aplicando a regra de Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{3}{2}ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{9}{4} - ln2 + \frac{3}{2}ln2 - (2 - \frac{1}{2}ln3) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{2}ln3$$

$$\boxed{Solución: \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln6}$$

MATEMÁTICAS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estuda, segundo os valores de m**,** o rango da matriz A.

b) Resolve, se é posible, o sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para o valor $m = 1$.

2. Dados os puntos $A(3,0,2)$, $B(1,-2,0)$, $C(1,-1,3)$ e $D(\lambda, \lambda - 2, -\lambda)$

a) Determina o valor de λ para que A, B, C e D sexan coplanarios. ¿Para algún valor de λ son A, B, C e D vértices dun paralelogramo?

b) Calcula as ecuacións paramétricas do plano π que pasa polo punto C e é perpendicular á recta r que pasa polos puntos A e B.

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. Probar que a función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$ ¿Pode cortalo en máis dun punto?

b) Calcula $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+2}{x^2 + x + 2} \right)^{1/x^2}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = 3x - x^2$ e a súa recta normal no punto $(3,0)$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. Dado o sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 5 \\ x - 3y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

a) Calcula o valor de α para que ao engadirlle a ecuación $\alpha x + 3y + z = 9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resólveo, se é posible, para $\alpha = 0$.

b) ¿Existe algún valor de α para o cal o sistema con estas 3 ecuacións non ten solución?

2. a) Se $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 10$ e $|\vec{v} + \vec{w}| = 14$, calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

b) Calcula as ecuacións paramétricas e a ecuación xeral do plano que pasa polos puntos $A(-1,5,0)$ e $B(0,1,1)$ e é paralelo á recta

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

3. a) Determina os valores de a para que a función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & se\ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & se\ x > 1 \end{cases}$$

sexa continua. ¿É derivable en $x = 1$ para algún valor de a?

b) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

4. Calcula $\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} dx$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA USC	**PAU** **SETEMBRO 2012**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(Responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Calcula, segundo os valores de a, o rango de $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$

Para $a = 1$, calcula o determinante da matriz $2A^t \cdot A^{-1}$

b) Sexa $B = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula x e y para que se cumpra que $B^{-1} = B^t$.

(Nota: A^t, B^t representan a matriz trasposta de A e B respectivamente).

2. Dado o plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

a) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos de corte de π cos eixes de coordenadas.

b) Calcula a ecuación xeral do plano que é perpendicular ao plano π, paralelo á recta que pasa polos puntos $B(0,3,0)$ e $C(0,0,2)$ e pasa pola orixe de coordenadas.

c) Calcula o punto simétrico da orixe de coordenadas respecto ao plano $\pi: x - 2y + 3z + 6 = 0$

3. a) Calcula as asíntotas e os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b) Calcula $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$

4. a) Dunha función derivable $f(x)$ sabemos que pasa polo punto $(0,1)$ e que a súa derivada é $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula $f(x)$ e a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto correspondente a $x = 0$

b) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral.

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema

$$\begin{aligned} x + \quad y &= m \\ x - my &= -13 \\ 3x + 5y &= 16 \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, para $m = 2$.

2. a) Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 \quad + \mu \end{cases}$

Se se cortan nunha recta, escribe as ecuacións paramétricas da mesma.

b) Calcula a ecuación do plano π_3, que pasa pola orixe de coordenadas e é perpendicular a π_1 e π_2. Calcula a intersección de π_1, π_2 e π_3.

3. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Se $c > 2$, calcula os valores de a, b, c para que a función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & se\ x < 2 \\ x + 1 & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

cumpra as hipótesis do teorema de Rolle no intervalo $[0, c]$.

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, a recta tanxente no punto donde a parábola ten un extremo e a tanxente á parábola no punto no a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixes, o vértice da parábola e a concavicade ou convexidade).

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención dos valores de m que anulan o determinante de A
- 1,5 puntos pola obtención do rango de A, segundo os valores de m.

b) 1 punto

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor de λ para que sexan coplanarios.
- 1 punto xustificar que non constitúen un paralelogramo.

b) 1 punto

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,25 puntos por xustificar que a función corta o eixe OX nalgún punto do intervalo $[1,2]$.
- 0,25 puntos por xustificar que a función non corta o eixe OX en máis de un punto.

b) 1 punto

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención da recta normal.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto por xustificar que o sistema é compatible indeterminado cando $\alpha = 0$.
- 1 punto pola resolución para $\alpha = 0$.

b) 1 punto

2) **a) 1 punto**

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación xeral do plano
- 1 punto polas ecuacións paramétricas do plano

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola determinación dos valores de a para que a función sexa continua.
- 0,5 puntos polo estudo da derivabilidade en $x = 1$.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

4) **2 puntos,** distribuídos en:

- 0,5 pola división do numerador entre o denominador e o cálculo das raíces do denominador.
- 0,5 puntos pola descomposición en suma de fraccións.
- 0,5 puntos pola integración.
- 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do valor da integral

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) 3 puntos (1 punto por cada unha das cuestión formuladas)

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos (0,5 puntos pola formulación teórica e 1,5 puntos pola resolución práctica)

OPCIÓN B

1) a) 2 puntos

b) 1 punto

2) a) 2 puntos

b) 1 punto

3) a) 1 punto

b) 1 punto

4) 2 puntos

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 + m^3 - m^4 - m^3 - m = -m(m^3 - m^2 - m + 1)$$

Calculamos, por Ruffini, as raíces de $m^3 - m^2 - m + 1 = 0$

	1	-1	-1	1
1)		1	0	-1
	1	0	-1	0

$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \ \ 0 \\ m = -1 \\ m = 1 \ (raíz\ doble) \end{cases}$$

$\boxed{m = 0}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

$\boxed{m = -1}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

$\boxed{m = 1} \Rightarrow rang(A) = 1$ (as tres filas son iguais e hai un elemento non nulo)

Resumindo:

$$\boxed{Rang(A) = 3, \quad se\ \ m \neq -1, 0, 1}$$
$$\boxed{Rang(A) = 2, \quad se\ \ m = \ 0\ ou\ m = -1}$$
$$\boxed{Rang(A) = 1, \quad se\ \ m = \ 1}$$

b) $\boxed{m = 1}$ Neste caso o sistema é equivalente a

$$x + y + z = 1$$

Como rango(matriz coeficientes) =rango(matriz ampliada) =1<nº de incógnitas, é un sistema compatible indeterminado. As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \quad \lambda \qquad ; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \qquad \mu \end{cases}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 2:

a)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,-2,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\end{array}\right\}$$ Non son colineais e polo tanto os puntos $A, B\ e\ C$ determinan un plano.

Ecuación do plano α que pasa polos puntos $A, B\ e\ C$:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \alpha: 2x-3y+z-8=0$$

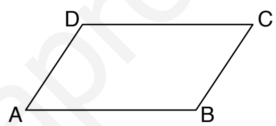
Para que o punto D esté no plano α, deberá satisfacer a súa ecuación:

$$2\lambda-3\lambda+6-\lambda-8=0,$$ e polo tanto $\boxed{\lambda=-1}$

Como un paralelogramo é unha figura plana,

bastará comprobar se para $\lambda = -1$ resulta

un paralelogramo



$$\lambda=-1 \Rightarrow D(-1,-3,1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-2,-2,-2) \\ \overrightarrow{DC}=(2,2,2) \\ \overrightarrow{AD}=(-4,-3,-1) \\ \overrightarrow{BC}=(0,1,3) \end{cases}$$

Non son paralelos
⇩
non constitúen un paralelogramo

b) Os vectores $\vec{v}=(-1,0,1)$ e $\vec{w}=(0,1,-1)$ son vectores non colineais e perpendiculares ao vector $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,-2)$. Polo tanto, o punto $C(1,-1,3)$ e os vectores $\vec{v}=(-1,0,1)$ e $\vec{w}=(0,1,-1)$ determinan o plano π e podemos escribir as súas ecuacións paramétricas como

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y=-1 \quad\quad +\ \mu \\ z = 3+\lambda-\mu \end{cases}}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 3:

a) *Teorema de Bolzano*: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ teñen distinto signo, é dicir $f(a)\cdot f(b)$<0, entón existe algún $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

- $f(x)=x^3+2x-4$ é continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica e polo tanto continua en $[1,2]$
- $f(1)=-1<0$
- $f(2)=8>0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\exists c \in (1,2) \text{ tal que } f(c)=0}$

Teorema de Bolzano

Como $f(x)$ é continua e derivable en $\mathbb{R}$, pois é unha función polinómica, tamén o será en calquera intervalo de $\mathbb{R}$ e si existisen c_1 e c_2 tales que $f(c_1)=f(c_2)=0$, entón aplicando o teorema de Rolle, existiría un t tal que $f'(t)=0$, pero $f'(x)=3x^2+2$ non se anula en ningún punto de $\mathbb{R}$. Así pois,

$$\boxed{f(x)\ corta\ ao\ eixe\ OX\ soamente\ nun\ punto}$$

b) É unha indeterminación do tipo 1^∞. Tomamos logaritmos neperianos:

$$ln \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} ln\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)-\ln(x^2+x+2)}{x^2}$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right)(aplicamos\ a\ regra\ de\ L'H\hat{o}pital) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{2x+1}{x^2+x+2}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+2-2x^2-5x-2}{2x(x+2)(x^2+x+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(-x-4)}{2x(x+2)(x^2+x+2)}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x+4}{2(x+2)(x^2+x+2)} = -\frac{1}{2}$$

e polo tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2} = e^{-1/2}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

$$y = 3x - x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3 - 2x \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \\ y'' = -2 < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \text{ máximo: } (3/2, 9/4) = \text{ vértice da parábola} \\ \Longrightarrow \text{ cóncava} \end{array}$$

$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Longrightarrow$ Puntos de corte da parábola cos eixes: (0,0), (3,0)

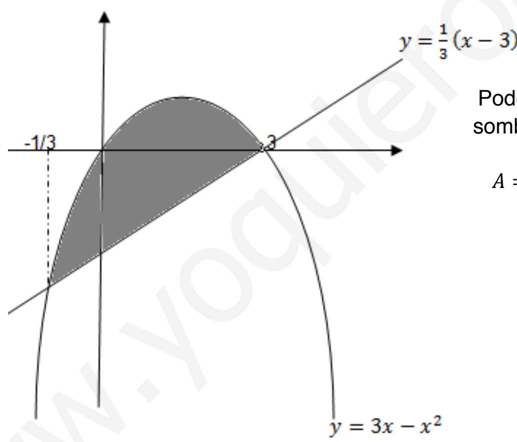
$y'(3) = -3 \Longrightarrow$ pendente da recta normal á parábola no punto (3,0): $1/3$

Ecuación da recta normal á parábola no punto (3,0):

$$y = \frac{1}{3}(x-3) \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0$$

Puntos de corte da recta normal e a parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ \\ y = \frac{1}{3}(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}(x-3) = 3x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (-1/3, -10/9) \\ \\ (3,0) \end{array}\right.$$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left[3x - x^2 - \frac{1}{3}(x-3)\right] dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{3} \left[\frac{8}{3}x - x^2 + 1\right] dx = \left[\frac{8}{6}x^2 - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-\frac{1}{3}}^{3} =$$

$$12 - 9 + 3 - \frac{12}{81} - \frac{1}{81} + \frac{27}{81} = \\ = \boxed{\frac{500}{81} u^2}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN B

Exercicio1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 - 4\alpha + 9\alpha - 2 + 2 = 5\alpha$$

Polo tanto:

- Se $\alpha \neq 0, rang(C) = 3$
- Se $\alpha = 0, rang(C) = 2$

Como sempre $rang(A) \geq rang(C)$ e o sistema será compatible indeterminado cando $rang(C) = rang(A) = 2$, calculamos $rang(A)$ cando $\alpha = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -27 + 5 + 4 + 18 = 0 \Rightarrow rang(A) = 2, se\ \alpha = 0$$

Polo tanto, o sistema é compatible indeterminado cando $\boxed{\alpha = 0}$.

Cando $\alpha = 0$, un sistema equivalente é:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = \ \ 5 - 3z \\ x - 3y = -4 - 2z \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \ y = 9 - z \quad \Rightarrow \ x = 23 - 5z$$

As infinitas solucións son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 23 - 5\lambda \\ y = \ 9 - \ \ \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \qquad \lambda \end{cases}}$$

b) Do apartado anterior deducimos que

- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad rang(C) = rang(A) = 2 < nº\ incógnitas$. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ incógnitas$. Sistema compatible determinado, solución única.

Polo tanto, $\boxed{o\ sistema\ sempre\ ten\ solución}$.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio2:

a) Utilizando as propiedades do producto escalar de dous vectores, temos:

$$\begin{aligned} |\vec{v}+\vec{w}|^2 &= <\vec{v}+\vec{w},\vec{v}+\vec{w}> = <\vec{v},\vec{v}> + <\vec{w},\vec{w}> + 2<\vec{v},\vec{w}> \\ &= |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot \cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) \end{aligned}$$

é dicir:

$$196 = 36 + 100 + 120\cdot\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w})$$

e polo tanto

$$\cos\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \boxed{\measuredangle(\vec{v},\vec{w}) = \frac{\pi}{3}}$$

b) Calculamos o vector director, $\vec{v}_r$, da recta r

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

O plano queda determinado polos elementos:

- O punto $A(-1,5,0)$
- Os vectores $\vec{v}_r = (-6,9,6)$ e $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ que son paralelos ao plano e independentes entre si. (En lugar do vector $(-6,9,6)$ podemos considerar o $(-2,3,2)$ xa que $(-6,9,6)||(-2,3,2)$).

$$\boxed{Ecuacións\ paramétricas: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = 5 + 3\lambda - 4\mu \\ z = 2\lambda + \mu \end{cases}}$$

Para obter a ecuación xeral, podemos eliminar os parámetros λ e μ nas ecuacións paramétricas ou ben calcular a ecuación do plano a partir dun punto do plano (por exemplo o $A(-1,5,0)$ e un vector normal ao plano $\vec{n}$:

$$\vec{n} = (-2,3,2)\times(1,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$

Polo tanto, a *ecuación xeral* do plano é:

$$11(x+1) + 4(y-5) + 5z = 0 \ \Longrightarrow \ \boxed{11x + 4y + 5z - 9 = 0}$$

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio3:

a)

- $f(x)$ é continua en $x < 1$, por ser polinómica.
- Se $a \neq 0$, $f(x)$ é continua en $x > 1$ por ser racional e non anularse o denominador.
- Estudo da continuidade en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x) = a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2/a \\ f(1) = a-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sexa continua en } x=1\text{, debe ser} \\ a-1 = 2/a \;\Rightarrow\; a^2-a-2=0 \Rightarrow a=-1 \text{ ou } a=2\end{array}$$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\text{ é } continua\ se\ a=-1\ \ ou\ \ a=2}$

Se unha función é derivable nun punto, necesariamente é continua nel. Polo tanto, para estudar a derivabilidade en $x = 1$, só teremos que facelo cando $a = -1$ ou $a = 2$

Caso: $a = -1$

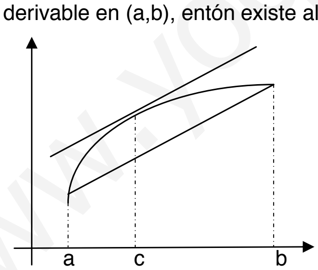
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & se\ x<1 \\ 2/x^2 & se\ x>1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = \ \ 2 \end{array} \quad\Rightarrow \text{Non é derivable en } x=1.$$

Caso: $a = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & se\ x<1 \\ -1/x^2 & se\ x>1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = -1 \end{array} \quad\Rightarrow \text{Non é derivable en } x=1$$

Polo tanto, $\boxed{f(x)\ non\ \text{é}\ derivable\ en\ x=1\ para\ ningún\ valor\ de\ a}$.

b) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial*: Se $f(x)$ é continua en [a,b] e derivable en (a,b), entón existe algún punto c∈(a,b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Interpretación xeométrica: Nas hipótesis do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á corda que une os puntos (a,f(a)) e (b,f(b)).

CONVOCATORIA DE XUÑO

Exercicio 4:

É a integral dunha función racional. Como o grao do numerador é igual ao grao do denominador, en primeiro lugar facemos a división para obter unha fracción cuxo numerador sexa de grao inferior ao denominador:

$$\frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x} = 5 + \frac{2x+1}{x^3 - x}$$

Calculamos as raíces do denominador:

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) \Rightarrow \text{Raíces: } 0, 1, -1.$$

Son todas raíces reais sinxelas, facemos a descomposición:

$$\frac{2x+1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+1)}$$

Como os denominadores son iguais, os numeradores deben ser iguais:

$$\begin{array}{rl} A+B+C=0 & (coeficiente\ de\ x^2) \\ B-C=2 & (coeficiente\ de\ x) \\ -A=1 & (termo\ independente) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 3/2 \\ C = -1/2 \end{cases}$$

A integral queda:

$$\int_2^3 \frac{5x^3 - 3x + 1}{x^3 - x}dx = \int_2^3 \left[5 + \frac{2x+1}{x^3 - x}\right]dx = \int_2^3 \left[5 - \frac{1}{x} + \frac{3/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right]dx$$

$$= \left[5x - ln|x| + \frac{3}{2}ln|x-1| - \frac{1}{2}ln|x+1|\right]_2^3$$

$$= 15 - ln3 + \frac{3}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln4 - \left(10 - ln2 - \frac{1}{2}ln3\right)$$

$$\boxed{Solución = 5 - 1/2\, ln3 + 3/2\, ln2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+1) + a(a+1)^2 = a(a+1)(2a+1)$$

Polo tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ \ 0 \\ a = -1 \\ a = -1/2 \end{cases}$$

$\boxed{a = 0}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

$\boxed{a = -1}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

$\boxed{a = -1/2}$

$$\begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow rang(A) = 2$$

Resumindo:

$$\boxed{Rang(A) = 3, \qquad se \ \ m \neq 0, -1, -1/2}$$

$$\boxed{Rang(A) = 2, \qquad se \ \ m = \ 0 \ ou \ m = -1 \ ou \ m = -1/2}$$

$\boxed{a = 1}$

$a = 1 \ \Rightarrow det(A) = 6$, e posto que $det(A) = det(A^t)$, $\ det(A^{-1}) = 1/det(A)$ e ademais que o determinante dun produto de matrices é igual ao produto dos determinantes desas matrices e que para unha matriz M de orde 3, se verifica que $det(\lambda M) = \lambda^3 det(M)$, temos:

$$\boxed{det(2A^t \cdot A^{-1}) = 2^3 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 8}$$

b) $B^{-1} = B^t \ \Leftrightarrow B \cdot B^t = I$, é dicir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & y & 0 \\ x & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1/4 & -y/2 + x/2 & 0 \\ -y/2 + x/2 & y^2 + 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtendo:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 1/4 = 1 \ \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}/2 \\ \\ y^2 + 1/4 = 1 \ \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}/2 \\ \\ -y/2 + x/2 = 0 \ \Rightarrow x = y \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Posibles valores:

$x = y = \sqrt{3}/2$

ou

$x = y = -\sqrt{3}/2$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Puntos de corte cos eixes de coordenadas: $A(-6,0,0); B(0,3,0); C(0,0,2)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,0) \\ \\ \\ \overrightarrow{AC} = (6,0,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-6,12,-18)$$

Área $\overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36+144+324} = \frac{1}{2}\sqrt{504} = \boxed{3\sqrt{14}\,u^2}$

b) $\vec{n}_\pi = (1,-2,3)$ é un vector do plano pedido

$\overrightarrow{BC} = (0,-3,-2)$ é un vector do plano pedido

Vector normal ao plano = $\vec{n}_\pi \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (13,2,-3)$

Como pasa polo punto (0,0,0), a ecuación xeral do plano pedido é:

$$\boxed{13x + 2y - 3z = 0}$$

c) $\vec{n}_\pi = (1,-2,3)$ é un vector director da recta perpendicular a π.

Ecuacións paramétricas da recta perpendicular a π, pasando polo (0,0,0)= $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3\lambda \end{array}\right.$

Calculamos o punto M de intersección desta recta co plano π:

$$\lambda + 4\lambda + 9\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3/7 \Rightarrow M = (-3/7, 6/7, -9/7)$$

Como o punto M é o punto medio entre $O(0,0,0)$ e o seu simétrico $O'(x,y,z)$

$$\left.\begin{array}{r} -3/7 = x/2 \\ 6/7 = y/2 \\ -9/7 = z/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{O'(-6/7, 12/7, -18/7)}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$

$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \boxed{f(x)\ non\ ten\ asíntotas\ verticais}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1\ \text{é}\ asíntota\ horizontal}$, $\boxed{f(x) non\ ten\ asíntotas\ oblicuas}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$, o signo de $f'(x)$ coincide co signo do numerador da fracción anterior. Así:

	$(-\infty, -1)$	(-1,1)	$(1,\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	crecente	decrecente	Crecente

A función é crecente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1,\infty)$. A función é decrecente no intervalo (-1,1).

b)

$$\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx = \int_1^e \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}dx = \int_1^e \left[1 - \frac{2x}{x^2+1}\right] dx = [x - lnx]_1^e =$$

$$= e - \ln(e^2+1) - 1 + ln2 = \boxed{0{,}2845}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 4:

a) $f(x)$ é a primitiva de $f'(x) = xe^{2x}$ que pasa polo punto (0,1). Calculamos a integral por partes

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^{2x}dx\,, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}}$$

e impoñemos a condición de que pase polo punto (0,1)

$1 = -\frac{1}{4} + C \Rightarrow C = 5/4$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + 5/4}$$

A función pasa por (0,1) e $f'(0) = 0$, polo que a recta tanxente pedida é

$$\boxed{y = 1}$$

b) Teorema fundamental do cálculo integral: *Se $f(x)$ é unha función continua en $[a, b]$ entón a función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x\epsilon[a, b]$$

é derivable e ademais verifícase que $F'(x) = f(x)$.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -m \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rang(C) = 2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -m & -13 \\ 3 & 5 & 16 \end{vmatrix} = 3m^2 - 11m + 10$$

$$3m^2 - 11m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ó } m = 5/3$$

Polo tanto:

- $m = 2 \Rightarrow$ rang(C) = 2 = rang(A) = nº de incógnitas. Sistema compatible determinado.
- $m = 5/3 \Rightarrow$ rang(C) = 2 = rang(A) = nº de incógnitas. Sistema compatible determinado.
- $m \notin \{2, 5/3\} \Rightarrow$ rang(C) = 2 <3 = rang(A). Sistema incompatible.

b) $\boxed{m = 2}$ Vimos no apartado anterior que neste caso é un sistema compatible determinado e ten solución única. Un sistema equivalente ao dado é:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ 3x + 5y & = & 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} -3x - 3y & = & -6 \\ 3x + 5y & = & 16 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow \boxed{y = 5} \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 2:

a) Calculamos a ecuación xeral do plano π_2. Das ecuacións paramétricas deste plano deducimos un punto do plano e dous vectores independentes contidos nel:

- Vectores independentes contidos en π_2: (1,-1,0); (2,-1,1)
- Punto pertencente a π_2: (3,1,1)

Ecuación xeral de π_2: $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y-z-3=0$

Para estudar a posición relativa dos planos π_1 e π_2 discutimos a solución do sistema

π_1: $x+y+z-5=0$
π_2: $x+y-z-3=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como

$$ran\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{os\ planos\ córtanse\ nunha\ recta}$$

Para calcular as ecuacións paramétricas desta recta, resolvemos o sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z & = & 5-y \\ x-z & = & 3-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ x & = & 4-y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \left\{\begin{array}{l} x = 4-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array}\right.}$$

b) Os vectores normais aos planos π_1 e π_2, $\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,1)$ e $\vec{n}_{\pi_2} = (1,1,-1)$ respectivamente, son dous vectores independentes que pertencen ao plano π_3 que ademais pasa polo (0,0,0). Polo tanto:

Ecuación xeral de π_3: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3: x-y=0}$

Para calcular a intersección dos tres planos, resolvemos o sistema formado polas súas ecuacións xerais:

$$x = y$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z-5=0 \\ x+y-z-3=0 \\ x-y \qquad =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+z=5 \\ 2x-z=3 \end{array}\right. \Rightarrow x=2,\ y=2,\ z=1$$

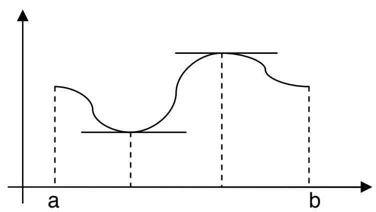
Polo tanto,

$$\boxed{Punto\ de\ corte\ dos\ tres\ planos: P(2,2,1)}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Exercicio 3:

a) Teorema de Rolle: *Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b). Se $f(a) = f(b)$, entón existe algún punto $c\epsilon(a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*



Interpretación xeométrica: *Dada función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b), que toma os mesmos valores nos extremos do intervalo, a súa gráfica ten algún punto con tanxente horizontal.*

b) $f(x)$ é continua en $[0,2)$ e $(2,c]$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Continuidade en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \\ f(2) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + 2a + b = 3 \Rightarrow 2a + b = -1$$

$f(x)$ é derivable en $(0,2)$ e $(2,c)$ por ser polinómica nos dous intervalos.

Derivabilidade en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + a = 1$$

Por outra parte $f(0) = f(c) \Rightarrow b = c + 1$

Temos así tres ecuacións con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = -1 \\ 4 + a = 1 \\ b - c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -3}; \boxed{b = 5}; \boxed{c = 4}$$

Exercicio 4:

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

En primeiro lugar calculamos os elementos necesarios para a representación da parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y' = -2x+2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Ten un máximo, que é o vértice, no punto } (1,4) \text{ e é cóncava}$$

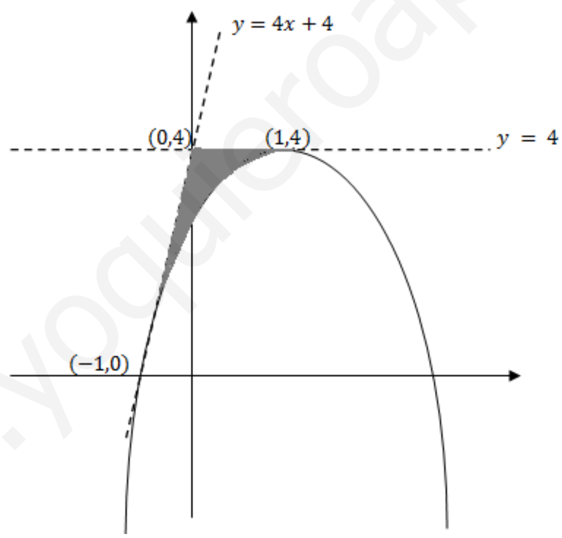
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Puntos de corte cos eixes: } (0,3), (-1,0), (3,0)$$

Tanxente no punto $(1,4)$: $y = 4$.

Determinamos o punto no que a tanxente é paralela á recta $y = 4x$. Como a derivada nun punto coincide coa pendente da recta tanxente nese punto, teremos que determinar o punto no que a derivada vale 4 (dúas rectas son paralelas se teñen a mesma pendente):

$$y' = 4 \Leftrightarrow -2x+2 = 4 \Rightarrow x = -1$$

Tanxente no punto $(-1,0)$: $y = 4(x+1)$



Podemos calcular a área pedida, rexión sombreada, mediante a integral definida:

$$A = \int_{-1}^{0}[4x+4-(-x^2+2x+3)]\,dx + \int_{0}^{1}[4-(-x^2+2x+3)]\,dx =$$

$$\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx + \int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1} = -\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+\frac{1}{3}-1+1 = \boxed{\frac{2}{3}u^2}$$

PAU **Código: 26**

XUÑO 2011

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Sexan C_1, C_2, C_3 as columnas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3 con $det(M) = 4$. Calcula, enunciando as propiedades de determinantes que utilices, o determinante da matriz cuxas columnas primeira, segunda e terceira son, respectivamente, $-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3$

b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos os valores de a e b para os que $A^{-1} = A^t$, sendo A^t a matriz trasposta de A.

2. a) ¿Son coplanarios os puntos $A(1,0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0)$ e $D(0,2,2)$? Se existe, calcula a ecuación do plano que os contén.

b) Calcula a ecuación xeral e as ecuacións paramétricas do plano que é perpendicular ao plano $\alpha: 2x + y - 3z + 4 = 0$ e contén a recta que pasa polos puntos $P(-1,1,2)$ e $Q(2,3,6)$.

3. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula o valor de k para que a función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-2,0]$ e para ese valor determina un punto do intervalo no que se anule a derivada de $f(x)$.

b) Calcula o dominio e os intervalos de crecemento e decrecemento da función $g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (Nota: ln=logaritmo neperiano).

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, a súa recta tanxente no punto (3,4) e o eixo OX (Nota: para o debuxo da gráfica da parábola, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} mx - 2y + 2z &= 1 \\ 2x + my + z &= 2 \\ x + 3y - z &= m \end{aligned}$$

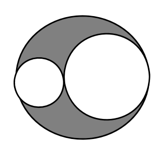
b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 1$.

2. a) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,2,-3)$ e é perpendicular á recta

$$r: \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Calcula a distancia d do punto $Q(-1,0,-2)$ ao plano $\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0$. Calcula, se existe, outro punto da recta r que tamén diste d do plano β.

3. Nunha circunferencia de radio 10 cm., divídese un dos seus diámetros en dúas partes que se toman como diámetros de dúas circunferencias tanxentes interiores a ela. ¿Que lonxitude debe ter cada un destes dous diámetros para que sexa máxima a área delimitada polas tres circunferencias (rexión sombreada)?



4.a) Define función derivable nun punto. Calcula, se existen, os valores de a e b, para que sexa derivable a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & se\ x < 0 \\ x^2 + ax + b & se\ x \geq 0 \end{cases}$

b) Define integral indefinida dunha función. Calcula $\int x^2\, cosx dx$

CiUG	**PAU**	**Código: 26**
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**SETEMBRO 2011**	

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só aos exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 2 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Se A é unha matriz tal que $A^3 + I = O$, sendo I a matriz identidade e O a matriz nula de orde 3, ¿cal é o rango de A? Calcula o determinante de A^{30}. Calcula A no caso de que sexa unha matriz diagonal verificando a igualdade anterior.

b) Dada a matriz $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula unha matriz X tal que $BXB - B = B^{-1}$

2. a) Dado o plano $\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$, calcula a ecuación da recta r que pasa polo punto $P(1,-2,1)$ e é perpendicular a π. Calcula o punto de intersección de r e π.

b) ¿Están aliñados os puntos $A(2,0,3)$, $B(0,0,1)$ e $C(2,1,5)$? Se non están aliñados, calcula a distancia entre o plano que determinan estes tres puntos e o plano π do apartado a).

3. a) Enuncia o teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica da función

$$f(x) = 3sen\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$$

corta o eixo OX nalgún punto do intervalo $(0,\pi)$? Razoa a resposta.

b) Descompón o número 40 en dous sumandos tales que o produto do cubo dun deles polo cadrado do outro sexa máximo. ¿Canto vale ese produto?

4. a) Calcula os valores de a, b, c sabendo que $y = ax^2 + bx + 1$ e $y = x^3 + c$, teñen a mesma recta tanxente no punto $(1,2)$.

b) Enuncia a regra de Barrow. Calcula $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - lnx\right)dx$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + 3z &= 1 \\ x + 2y + mz &= m \\ x + 4y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 4$.

2. a) Estuda a posición relativa da recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ e a recta s que pasa polos puntos $P(0,2,1)$ e $Q(1,1,1)$. Calcula a distancia de r a s.

b) Calcula a ecuación xeral do plano π que é paralelo á recta r e contén á recta s.

3. a) Calcula os extremos relativos da función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$. Calcula tamén o máximo absoluto e o mínimo absoluto desta función no intervalo $[-3,3]$.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = ax^2 + bxlnx$ teña un punto de inflexión no punto $(1,2)$. Para estes valores de a e b, calcula o dominio e os intervalos de concavidade e convexidade de $f(x)$. (Nota ln = logaritmo neperiano).

4. a) Define primitiva e integral indefinida dunha función.

b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica da parábola $f(x) = -3x^2 + 3$ e a recta $y = -9$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indica os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención do valor do determinante.
- 1 punto polo enunciado das propiedades de determinantes que utilice.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de *a* e *b*.

2) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto por probar que son coplanarios.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano que os contén.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola ecuación xeral do plano.
- 0,5 puntos polas ecuacións paramétricas do plano.

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.
- 0,25 puntos polo cálculo de k.
- 0,25 puntos polo cálculo do punto onde se anula a derivada da función.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos pola derivada da función.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto pola resolución do sistema para o caso $m = 1$.

2) **a) 1 punto** pola obtención dunha ecuación do plano.

b) 2 puntos, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención da distancia do punto ao plano.
- 1 punto pola obtención do outro punto da recta.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola función maximizada.
- 1 punto pola obtención dos valores que maximizan a área da rexión.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de función derivable nun punto.
- 0,5 puntos polo cálculo do valores de *a* e *b*.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición de integral indefinida dunha función.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

5) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz A.
- 0,5 punto polo cálculo do determinantes da matriz A^{30}.
- 0,5 puntos pola obtención da matriz diagonal.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo cálculo da matriz B^{-1}.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención da matriz X.

6) **a) 1,5 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola ecuación da recta r.
- 0,5 puntos polo punto de intersección da recta e o plano.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por probar que os tres puntos non están aliñados.
- 0,5 puntos pola ecuación do plano que determinan os tres puntos.
- 0,5 puntos pola distancia entre os planos.

7) **a) 1 punto**, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.
- 0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,25 puntos pola formulación do problema
- 0,5 puntos pola obtención dos sumandos
- 0,25 puntos produto dos sumandos.

8) **a) 0,75 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos pola obtención de c.
- 0,5 puntos pola obtención de a e b.

b) 1,25 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos polo enunciado da regra de Barrow.
- 0,75 puntos pola integral.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto polo estudo do rango das matrices
- 1 punto pola discusión do sistema.

b) 1 punto, pola resolución do sistema para o caso $m = 4$.

5) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa das rectas.
- 1 punto pola distancia entre as rectas.

b) 1punto, pola ecuación xeral do plano.

6) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polos extremos relativos.
- 0,5 puntos polos máximo e mínimo absolutos

b) 1 punto, distribuído en;

- 0,5 puntos pola obtención de a e b.
- 0,25 puntos polo dominio da función.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.

7) **a) 0,5 puntos**.

b) 1,5 puntos, distribuídos en;

- 0,5 puntos pola gráfica da parábola.
- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1. **a)** Se chamamos N á matriz da que queremos calcular o determinante $det(N) =$
$det(-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3) \overset{*}{=} det(-C_2, 2C_1 - C_3, C_3) \overset{*}{=} det(-C_2, 2C_1, C_3) \overset{**}{=}$
$-2det(-C_2, C_1, C_3) \overset{***}{=} 2det(C_1, C_2, C_3) = 8$
Propiedades utilizadas:
(*) Se a unha columna se lle suma outra columna multiplicada por un número, o determinante non varía.
(**) Se multiplicamos cada elemento dunha columna por un número, o determinante desa matriz queda multiplicado por ese número.
(***) Se permutamos dúas columnas dunha matriz, o determinante cambia de signo.
b) Se $A^{-1} = A^t$, entón $A \cdot A^t = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E así:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ 1 + b^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 0} \ \boxed{a = \pm 1}$$

2. **a)** $\overrightarrow{AC} = (-2,-2,-2)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,2,0)$ son dous vectores non proporcionais e polo tanto os puntos A, C e D determinan un plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - 3z + 4 = 0}$$ é a ecuación do plano que pasa polos puntos A, C e D.

E como as coordenadas de B verifican a ecuación anterior, entón B tamén pertence ao plano π e así os puntos dados son coplanarios.

b)

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n}_\alpha = (2,1,-3) \\ \overrightarrow{PQ} = (3,2,4) \end{array}\right\}$$ son dous vectores do plano pedido

Como $P(-1,1,2)$ é un punto do plano, xa temos os elementos suficientes para poder escribir as ecuacións paramétricas

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 2 - 3\lambda + 4\mu \end{array}}$$

E a ecuación xeral

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{10x - 17y + z + 25 = 0}$$

3. **a)** Teorema de Rolle: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e ademais $f(a) = f(b)$, entón existe a lo menos un punto $c\ (a,b)$ onde se anula a derivada: $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 - kx + 10$ é unha función polinómica e polo tanto continua en $[-2,0]$ e derivable en $(-2,0)$. Para poder aplicarlle o teorema de Rolle só resta impoñerlle a condición de que tome o mesmo valor nos extremos do intervalo

$f(-2) = f(0) \Rightarrow -8 + 2k + 10 = 10 \Rightarrow \boxed{k = 4}$

$f(x) = x^3 - 4x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Pero $\frac{2\sqrt{3}}{3} \notin (-2,0)$, polo que o punto do intervalo $(-2,0)$ no que se anula a derivada de $f(x)$ é o punto $\boxed{c = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

b) A función lnx non está definida para $x < 0$, e como $x^2 + 1 > 0$, a función $g(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ está definida para os valores de x tales que $x^2 - 1 > 0$. É dicir

$$\boxed{Domg(x) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)}$$

$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin Domg(x)$

	$(-\infty$,-1)	(-1,1)	(1,∞)
$f'(x)$	< 0	Non está no dominio	> 0
$f(x)$	decrecente		crecente

4. $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$f'(x) = 2(x-1);\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

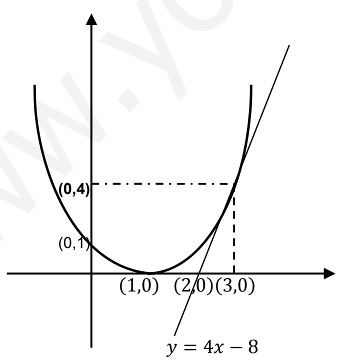
$f''(x) = 2 > 0$

$\Rightarrow f(x)$ é convexa e ten un mínimo (vértice) no punto (1,0)

Ademais

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ (1,0) punto de corte co eixo OX

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow$ (0,1) punto de corte co eixo OY



Recta tanxente no punto (3,4):

$$y - 4 = f'(3)(x-3)$$

É dicir

$$y - 4 = 4(x-3);\ y = 4x - 8$$

e a área pedida podemos calculala como

$$A = \int_1^3 (x^2 - 2x + 1)dx - \frac{1}{2}(3-2) * 4 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^3 - 2 = \boxed{\frac{2}{3}\ u^2}.$$

OPCIÓN B

1. a)

$\begin{matrix} Matriz\ de \\ coeficientes \end{matrix} (C) = \begin{pmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{matrix} Matriz \\ ampliada \end{matrix} (A) = \begin{pmatrix} m & -2 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & m \end{pmatrix}$;

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 5m + 6$$

Como

$m^2 + 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -6$ ou $m = 1$

Temos:

$m = -6 \ \Rightarrow rang(C) = 2$

$m = 1 \ \Rightarrow rang(C) = 2$

$m \neq -6, e \ m \neq 1 \ \Rightarrow rang(C) = 3$

Como $rang(C) \ \leq rang(A) \leq 3,$ só necesitamos calcular o rango da matriz ampliada nos casos $m = -6$ e $m = 1$:

$\boxed{m = -6}$

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 49 \ \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

$\boxed{m = 1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$$

Discusión:

$m = -6 \ \Rightarrow rang(C) = 2 < \ 3 = rang(A).$ Sistema incompatible.

$m = 1 \ \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < n^{o}\, incógnitas.$ Sistema compatible indeterminado.

$m \neq -6$ e $m \neq 1 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^{o}\, incógnitas.$ Sistema compatible determinado.

b) Caso $\boxed{m = 1}$. Polo visto no apartado anterior, o sistema é compatible indeterminado e ten infinitas solucións. Un sistema equivalente é:

$$\begin{matrix} 2x & + & z & = 2 - \ \ y \\ x & - & z & = 1 - 3y \end{matrix}$$

e as infinitas solucións son

$$\left\{ \begin{matrix} x = 1 \ - \ \frac{4}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \ \frac{5}{3}\lambda \end{matrix} \right. \ ; \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

2. a) Como o plano é perpendicular á recta, o vector director da recta é un vector perpendicular ao plano

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,-3)$$

Como conocemos un punto, $P(1,2,-3)$, e un vector perpendicular ao plano, a ecuación xeral do plano é:

$$-(x-1) + 2(y-2) - 3(z+3) = 0$$

é dicir

$$\boxed{\beta: x - 2y + 3z + 12 = 0}$$

b) Utilizando a fórmula da distancia dun punto a un plano

$$d(Q,\beta) = \left|\frac{-1-6+12}{\sqrt{1+4+9}}\right| = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14}\ u}$$

Como $\vec{v}_r = (-1,2,-3)$ é un vector director da rectas r, e (0,-2,1) é un punto da mesma, as ecuacións paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = & & -\lambda \\ y = & -2 & +2\lambda \\ z = & 1 & -3\lambda \end{cases}$$

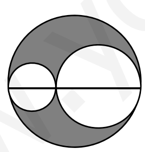
Temos que atopar un punto da recta, será da forma ($-\lambda, -2+2\lambda, 1-3\lambda$), distinto de Q que tamén diste $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ unidades do plano β. Utilizando novamente a fórmula da distancia dun punto a un plano, temos

$$\frac{5\sqrt{14}}{14} = \frac{|-\lambda+4-4\lambda+3-9\lambda+12|}{\sqrt{1+4+9}} \Rightarrow 5 = |19-14\lambda|$$

$5 = 19 - 14\lambda \Rightarrow \lambda = 1$ e obteriamos o punto Q.

$-5 = 19 - 14\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{12}{7} \Rightarrow \boxed{Q'(-\frac{12}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{29}{7})}$

3. Se chamamos x e y aos radios das dúas circunferencias tanxentes interiores á dada, entón verificarase que



$$2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$$

Polo tanto, a función a maximizar está dada por

$$A(x) = \pi * 10^2 - [\pi x^2 + \pi(10-x)^2]$$

$A'(x) = -2\pi x + 2\pi(10-x)$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (punto crítico)

$A''(x) = -4\pi < 0 \Rightarrow A''(5) < 0$ *(máximo)*

Polo tanto, a área da rexión sombreada resulta máxima cando se divide o diámetro da circunferencia de partida en dúas partes iguais, é dicir que as circunferencias tanxentes interiores teñen 10cm. de diámetro

4. **a)** A función $f(x)$ dise derivable no punto x_0 se existe e é finito o seguinte límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En $x < 0,$ a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & se\ x < 0 \\ x^2 + ax + b & se\ x \geq 0 \end{cases}$ é continua e derivable por ser cociente de funcións continuas e derivables e non anularse o denominador.
En $x > 0$, a función é continua e derivable por ser polinómica.
Para que $f(x)$ sexa continua en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1-x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = b = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{r} f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\dfrac{1-x}{e^x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - x - e^x}{xe^x} \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1 - e^x}{e^x + xe^x} = -2 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + ax + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + a) = a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

(*) É unha indeterminación da forma $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L'Hopital

b) Chámase integral indefinida de $f(x)$ ao conxunto de todas as primitivas de $f(x)$. Represéntase por $\int f(x)dx = F(x) + C$.
O símbolo $\int$ chámase integral, mentras que $f(x)dx$ recibe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ e C é a constante de integración.

Para calcular $\int x^2 cosxdx$, utilizamos o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \\ dv = cosxdx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} du = 2xdx \\ v = senx \end{array}$$

$$\int x^2 cosxdx = x^2 senx - \int 2xsenxdx$$

Volvemos a utilizar o método de integración por partes

$$\left.\begin{array}{r} u = 2x \\ dv = senxdx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} du = 2dx \\ v = -cosx \end{array}$$

$$\int x^2 cosxdx = x^2 senx + 2xcosx - \int 2cosxdx = = x^2 senx + 2xcosx - 2senx + C$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1. **a)** $\mathrm{A}^3 + \mathrm{I} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}^3 = -\mathrm{I}$. Polo tanto

$[\det(A)]^3 = -1 \Rightarrow \det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{rang(A) = 3}$.

$\mathrm{A}^{30} = (\mathrm{A}^3)^{10} = (-\mathrm{I})^{10} = \mathrm{I} \Rightarrow \det(A^{30}) = 1.$

Se A é ademais unha matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} = -I \Rightarrow \begin{cases} a^3 = -1 \\ b^3 = -1 \\ c^3 = -1 \end{cases}$$

E así $\boxed{A = -I.}$

b) $\det(B) = -1/2 \neq 0 \Rightarrow \exists\, B^{-1}$

$$BXB - B = B^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1}(B + B^{-1})B^{-1} = B^{-1} + (B^{-1})^3$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\left(Ad(B_{ij})\right)^t = -2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} + (B^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 14 & -18 \end{pmatrix}}$$

2. **a)** (2,0,0) é un punto do plano π

$\left.\begin{matrix} (-1,1,1) \\ (1,0,1) \end{matrix}\right\}$ son vectores do plano π

Ecuación xeral do plano π:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 2 = 0$$

Como a recta e o plano son perpendiculares, como vector director da recta tomamos o vector asociado ao plano π: $(1,2,-1)$ e a ecuación da recta será

$$\boxed{r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}}$$

Para calcular o punto de corte da recta e o plano, escribimos as ecuacións paramétricas da recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

E sustituimos na ecuación xeral do plano

$$1 + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) - 1 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Punto de corte: $\boxed{(2,0,0)}$.

b) Os vectores

$\overrightarrow{AB} = (-2,0,-2)$, $\overrightarrow{AC} = (0,1,2)$ non son proporcionais e polo tanto os puntos non están aliñados e determinan un plano.

Ecuación xeral do plano que pasa por estes tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 1 = 0$$

Temos polo tanto dous planos paralelos

$\pi: x + 2y - z - 2 = 0;$
$\alpha: x + 2y - z + 1 = 0$
e a distancia entre eles ven dada por
$d(\pi, \alpha) = \dfrac{|-2-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{2}\ unidades}$

3. **a)** Teorema de Bolzano: Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ (toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo), entón existe a lo menos un punto $c \in (a, b)$ no que a función se anula: $f(c) = 0$.

$f(x) = 3sen\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ continua en $[0, \pi]$
$f(0) < 0$
$f(\pi) > 0$
Polo teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Sumandos: x; $40 - x$. Hai que maximizar a función

$$P(x) = x^3(40 - x)^2$$

Calculamos os puntos críticos

$$P'(x) = 3x^2(40-x)^2 - 2x^3(40-x) = x^2(40-x)(120-5x)$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x = 40, \text{que evidentemente non maximiza a } P(x) \\ x = 24 \end{cases}$$

Posto que
$x \in (0,24) \Rightarrow P'(x) > 0$
$x \in (24,40) \Rightarrow P'(x) < 0$
podemos afirmar que $P(x)$ ten un máximo relativo en $x = 24$. Polo tanto, os sumandos son 24 e 16 e o produto será

$$P(24) = 24^3 \cdot 16^2 = \boxed{3.538.944}$$

4. **a)** $2 = 1^3 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}$
Pendente da recta tanxente no punto (1,2): $y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$
Tendo en conta que $y = ax^2 + bx + 1$, pasa polo punto (1,2) e que a pendente da súa recta tanxente neste punto é 3, temos o sistema de ecuacións
$2 = a + b + 1$
$3 = 2a + b$
Obtendo que $\boxed{a = 2}$, e $\boxed{b = -1}$

b) Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a, b]$ e $G(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entón

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

$\int (\frac{1}{x} - lnx)dx = ln|x| - \int lnx\, dx$
Utilizando o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x \end{array}\right\} \Rightarrow \int lnx\,dx = xlnx - \int dx = x(lnx-1)$$

e utilizando a regra de Barrow

$$\int_1^e \int (\frac{1}{x} - lnx)dx = [ln|x| - x(lnx-1)]_1^e = 1 - 1 = 0$$

OPCIÓN B

1. a)

$$\begin{matrix} Matriz\ de \\ coeficientes \end{matrix}(C) = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} Matriz \\ ampliada \end{matrix}(A) = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 & 1 \\ 1 & 2 & m & m \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 7m + 12$$

Como

$m^2 - 7m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ ou $m = 4$

Temos:

$m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2$

$m = 4 \Rightarrow rang(C) = 2$

$m \neq 3, e\ m \neq 4 \Rightarrow rang(C) = 3$

Como $rang(C) \leq rang(A) \leq 3,$ só necesitamos calcular o rango da matriz ampliada nos casos $m = 3$ e $m = 4$:

$\boxed{m = 3}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

$\boxed{m = 4}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang(A) = 2$$

Discusión:

$m = 3 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$ Sistema incompatible.

$m = 4 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) < n^o\ incógnitas.$ Sistema compatible indeterminado.

$m \neq 3$ e $m \neq 4 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^o\ incóg$. Sistema compatible determinado.

b) Caso $\boxed{m = 4}$. Polo visto no apartado anterior, o sistema é compatible indeterminado e ten infinitas solucións. Un sistema equivalente é:

$$\begin{array}{llll} x & + & 2y & = 4 - 4z \\ x & + & 4y & = 1 - 3z \end{array}$$

e as infinitas solucións son

$$\begin{cases} x = -5\lambda + 7 \\ y = \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} \; ; \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

2. a)

Punto da recta r: $P_r(1,1,0)$

Vector director da recta r: $\vec{v}_r = (1,2,1)$

Vector director da recta s: $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (1,-1,0)$; $\overrightarrow{P_rP} = (-1,1,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang\left(\overrightarrow{P_rP}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right) = 3 \Rightarrow \boxed{As\ rectas\ crúzanse.}$$

$$\vec{v}_r \mathrm{x}\, \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-3)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{P_rP}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right)\right|}{|\vec{v}_r \mathrm{x}\, \vec{v}_s|} = \frac{3}{\sqrt{1+1+9}} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{11}\ unidades}$$

b) $P(0,2,1)$ é un punto do plano π

$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r \mathrm{x}\, \vec{v}_s = (1,1,-3)$ é un vector perpendicular ao plano π. Polo tanto, a ecuación do plano π será:

$$x + y - 2 - 3(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi :\ x + y - 3z + 1 = 0}$$

3. a) $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(0) = -16 < 0$. $\boxed{Máximo\ relativo: (0,1)}$

$f''(-2) = f''(2) = 32>0$. $\boxed{Mínimos\ relativos: (-2,15), (2,15)}$

$f(x)$ función polinómica $\Rightarrow$ $f(x)$ é continua no intervalo $[-3,3] \Rightarrow$ $f(x)$ alcanza o mínimo e máximo absolutos no intervalo $[-3,3]$

$f(-3) = f(3) = 10$

Polo tanto:

$$\boxed{Mínimo\ absoluto\ no\ intervalo\ [-3,3]: -15}$$

$$\boxed{Maximo\ absoluto\ no\ intervalo\ [-3,3]:\ 10}$$

b) A función pasa polo punto (1,2)

$\boxed{f(1) = 2 \Rightarrow a = 2}$.

$f(x) = 2x^2 + bxlnx$

$f'(x) = 4x + blnx + b$

$f''(x) = 4 + \frac{b}{x}$

En $x = 1$, a función ten un punto de inflexión

$0 = f''(1) = 4 + b \Rightarrow \boxed{b = -4}$

Polo tanto: $f(x) = 2x^2 - 4xlnx$.

Como a función ln só está definida para números positivos, temos que

$\boxed{Dom(f(x)) = (0, +\infty)}$

Por outra parte

$f''(x) = 4 - \frac{4}{x} = \frac{4(x-1)}{x}$

E analizando o signo da segunda derivada:

	(0,1)	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava	convexa

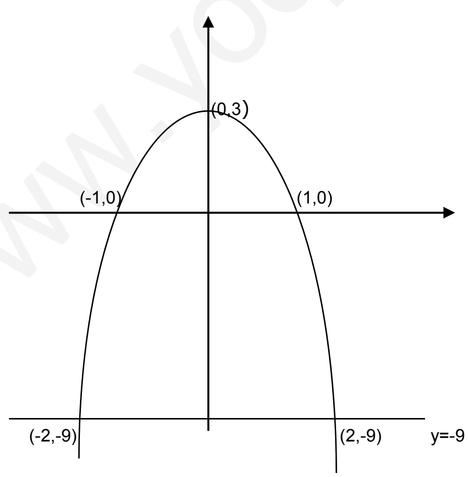
4. a) A función $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Chámase integral indefinida de $f(x)$ ao conxunto de todas as primitivas de $f(x)$. Represéntase por $\int f(x)dx = F(x) + C$.
O símbolo $\int$ chámase integral, mentras que $f(x)dx$ recibe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ e C é a constante de integración.

b) Vértice da parábola: (0,3)

- 3 < 0 ⇒ convexa

Puntos de corte da parábola cos eixos: (0,3), (-1,0), (1,0)



Puntos de corte das gráficas

$\left.\begin{array}{l} y = -3x^2 + 3 \\ y = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (-2,-9), (2,-9)

Polo tanto

$A = \int_{-2}^{2}(-3x^2 + 3 + 9)dx;$

$A = [-x^3 + 12x]_{-2}^{2} = \boxed{32\ u^2}$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA USC	**PAU** **XUÑO 2010**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a deber responder só aos exercicios dunha das opcións . Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos).

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$,

a) Se I é a matriz identidade de orde 3, calcula os valores de λ para os que $A+\lambda I$ non ten inversa. Calcula, se existe, a matriz inversa de $A-2I$.

b) Calcula a matriz X tal que $XA+A^t=2X$, sendo A^t a matriz trasposta de A.

2. Sexa r a recta que pasa polo punto P(1,-1,-2) e é perpendicular ao plano $\alpha: x+2y+3z+6=0$. Sexa s a recta que pasa polos puntos A(1,0,0) e B(-1,-3,-4).

a) Estuda a posición relativa das rectas r e s. Se se cortan, calcula o punto de corte.

b) Calcula a distancia do punto A(1,0,0) ao plano β que pasa polo punto P(1,-1,-2) e é paralelo a α.

3. Debuxa a gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+1}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Enuncia o teorema fundamental do cálculo integral. Sabendo que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, con f unha función continua en todos os puntos da recta real, calcula $f(2)$.

b) Calcula $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro a, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} ax + 2y + 2z &= a\\ x + y + z &= 0\\ 2x - y + 2z &= a \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $a=0$.

2. Dada a recta $r:\begin{cases} y=1\\ x-z+4=0\end{cases}$

a) Calcula a ecuación do plano α que pasa polo punto Q(0,2,2) e contén a recta r. Calcula a área do triángulo que ten por vértices os puntos de intersección de α cos eixos de coordenadas.

b) Calcula a ecuación xeral do plano que contén a recta r e é perpendicular ao plano α.

3. a) Define función continua nun punto. ¿Cando se di que unha discontinuidade é evitable?¿Para que valores de k, a función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ é continua en todos os puntos da recta real?

b) Determina os valores de a, b, c, d para que a función $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un máximo relativo no punto (0,4) e un mínimo relativo no punto (2,0).

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola recta $x+y=7$ e a gráfica da parábola $f(x)=x^2+5$. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade)

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **SETEMBRO 2010**	**Código: 26**

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 3 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 2 puntos, exercicio 4 = 2 puntos).

OPCIÓN A

1. a) Pon un exemplo de matriz simétrica de orde 3 e outro de matriz antisimétrica de orde 3.
b) Sexa M unha matriz simétrica de orde 3, con $\det(M) = -1$. Calcula, razoando a resposta, o determinante de $M + M^t$, sendo M^t a matriz trasposta de M.
c) Calcula unha matriz X simétrica e de rango 1 que verifique: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dada a recta $r: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

a) Calcula a ecuación xeral do plano π perpendicular a r e que pasa polo punto $P(2,-1,-2)$.
b) Calcula o punto Q no que r corta a π. Calcula o ángulo que forma o plano π con cada un dos planos coordenados.

3. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{sen(x^2)}$

4. Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola gráfica de $y = -x^2 + 1$ e as rectas tanxentes a esta parábola nos puntos de corte da parábola co eixo OX. (Nota: para o debuxo das gráficas, indicar os puntos de corte cos eixos, o vértice da parábola e concavidade ou convexidade).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións lineais

$$\begin{aligned} mx + y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = -1$.

2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = -6 \end{cases}$; $\quad s: \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 5y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa. Se se cortan, calcula o punto de corte e o ángulo que forman r e s.
b) Calcula, se existe, o plano que as contén.

3. Debuxa a gráfica da función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, estudando: dominio, puntos de corte cos eixos, asíntotas, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidade e convexidade.

4. a) Calcula $\int x \ln(1 + x^2)\,dx$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)
b) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención dos valores de λ para os que $A+\lambda I$ non ten inversa.
- 1 punto polo cálculo da matriz inversa de A-2I.

b) 1 punto, distribuídos en:

- 0,5 puntos por despexar X
- 0,5 puntos polos cálculos de $-A^t(A-2I)^{-1}$

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención das rectas r e s.
- 1 punto polo estudo da posición relativa das rectas.
- 0,5 puntos pola obtención do punto de corte.

b) 1punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola obtención do plano β.
- 0,5 puntos pola obtención da distancia do punto ao plano.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio e puntos de corte cos eixes.
- 0,25 puntos polas asíntotas.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen máximos nin mínimos relativos.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen puntos de inflexión.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,25 puntos pola gráfica.

4) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema fundamental do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola obtención de $f(2)$.

b) 1punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola división do polinomio do numerador entre o do denominador e a descomposición en fraccións simples.
- 0,5 puntos polas integrais e aplicación da regra de Barrow.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz de coeficientes.
- 0,5 puntos polo cálculo do rango da matriz ampliada.
- 0,5 puntos. Sistema incompatible.
- 0,5 puntos. Sistema compatible determinado.

b) 1 punto, pola solución do sistema para o caso $a = 0$.

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola obtención dunha ecuación do plano α.
- 1 punto polo cálculo da área do triángulo.

b) 1 punto, pola obtención da ecuación do plano.

3) **a) 1 punto**, distribuído en:

- 0,25 puntos pola definición de función continua nun punto.
- 0,25 puntos pola definición de descontinuidade evitable.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de k.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos pola obtención dos valores de a, b, c, d.

4) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,75 puntos polas gráficas.
- 0,75 puntos pola formulación do problema.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) **a) 0,5 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo exemplo de matriz simétrica.
- 0,25 puntos polo exemplo de matriz antisimétrica.

b) 1 punto

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,5 puntos por expresar a condición do rango.
- 0,5 puntos polas ecuacións do produto de matrices.
- 0,5 puntos por resolver as ecuacións.

2) **a) 1,5 puntos**

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

- 0,75 puntos pola obtención do punto de corte.
- 0,75 puntos (0,25 puntos por cada ángulo).

3) **a) 1 punto,** distribuído en:

- 0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1 punto

4) **2 puntos,** distribuídos en:

- 0,5 puntos por representar a parábola.
- 0,5 puntos pola obtención das tanxentes.
- 0,5 puntos pola formulación da área.
- 0,5 puntos polo cálculo da integral definida.

OPCIÓN B

1) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 0,5 puntos pola obtención do rango da matriz de coeficientes.

- 0,5 puntos polo cálculo do rango da matriz ampliada.
- 0,5 puntos. Sistema incompatible
- 0,5 puntos. Sistema compatible determinado.

b) 1 punto (0,5 puntos por cada caso)

2) **a) 2 puntos**, distribuídos en:

- 1 punto pola posición relativa
- 0,5 puntos polo punto de corte.
- 0,5 puntos polo ángulo que forman as rectas.

b) 1 punto, pola obtención da ecuación do plano.

3) **2 puntos**, distribuídos en:

- 0,25 puntos polo dominio e puntos de corte cos eixes.
- 0,25 puntos polas asíntotas.
- 0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.
- 0,25 puntos polo máximo e mínimo relativos.
- 0,25 puntos por xustificar que non existen puntos de inflexión.
- 0,25 puntos polos intervalos de concavidade e convexidade.
- 0,25 puntos pola gráfica.

4) **a) 1 punto,** distribuído en:

- 0,5 puntos pola integración por partes.
- 0,5 puntos pola integral da función racional.

b) 1 punto, distribuído en:

- 0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral.
- 0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

CONVOCATORIA DE XUÑO

OPCIÓN A

1) a) $A+\lambda I=\begin{pmatrix}-1+\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1+\lambda\end{pmatrix}$; $|A+\lambda I| = (\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)$.

Polo tanto, $A+\lambda I$ non ten inversa $\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1\\ \lambda=-1\end{cases}$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix};\quad |A-2I|=(-3)^2\cdot(-1)=-9\neq 0$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}(Ad(A-2I)_{ij})^t=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

b) $XA+A^t=2X \Leftrightarrow X(A-2I)=-A^t$. E, polo apartado anterior, sabemos que $A-2I$ ten inversa. Polo tanto: $X=-A^t(A-2I)^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2) a) $\left.\begin{array}{l}P(1,-1,2)\in r\\ \vec{v_r}=\vec{n_\alpha}=(1,2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=-2+3\lambda\end{cases}\qquad \left.\begin{array}{l}A(1,0,0)\in s\\ \vec{v_s}=\overrightarrow{AB}=(-2,-3,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1-2\mu\\ y=\ \ -3\mu\\ z=\ \ -4\mu\end{cases}$

$rang(\vec{v_r},\vec{v_s})=rang\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -4\end{pmatrix}=2 \Rightarrow$ as rectas córtanse ou crúzanse. Ademais

$rang(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{PA})=rang\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=2$, logo as rectas córtanse.

Punto de corte:

$$\left.\begin{array}{r}1+\lambda=1-2\mu\\ -1+2\lambda=-3\mu\\ -2+3\lambda=-4\mu\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu=-1\\ \lambda=2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{T(3,3,4)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

b) $\left.\begin{array}{r} P(1,-1,-2)\in\beta \\ \overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}=(1,2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \beta:(x-1)+2(y+1)+3(z+2)=0\Rightarrow \beta: x+2y+3z+7=0$

$$d(A,\beta)=\frac{|1+7|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{4\sqrt{14}}{7}\,unidades$$

3) $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left.\begin{array}{r} x=0\Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=0\Rightarrow x(x+3)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{(0,0)};\boxed{(-3,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\quad \boxed{x=-1}\ \text{Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{r} m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+3x}{x(x+1)}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}-x}{x+1}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{y=x+2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+1)-x^2-3x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x+3=0$, que non ten raíces reais.

Polo tanto, non existen máximos nin mínimos relativos.
Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	>0	>0
$f(x)$	crecente	crecente

$f(x)$ é crecente no intervalo $(-\infty,-1)$ e no intervalo $(-1,+\infty)$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x+3)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

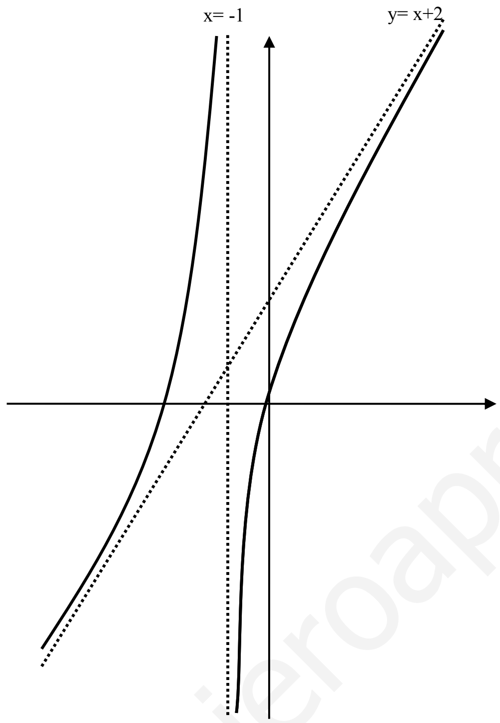
$f''(x)\neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f''(x)$	>0	<0
$f(x)$	convexa	cóncava

$f(x)$ é convexa no intervalo $(-\infty,-1)$ e cóncava no intervalo $(-1,+\infty)$

Con todos estes datos a gráfica da función será:



4) a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entón $F(x)$ é derivable en (a,b) e ademais $F'(x)=f(x)$.

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x) \Rightarrow f(x)=F'(x)=2x+3x^2$$

e polo tanto:

$$f(2)=4+12=16$$

b) O numerador e denominador son funcións polinómicas do mesmo grao. Polo tanto, en primeiro lugar, facemos a división:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{1-x}{x^2+x}$$

e, tendo en conta que $x^2+x=x(x+1)$, facemos a descomposición en fraccións simples

$$\frac{1-x}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+Bx+A}{x^2+x}\Rightarrow\begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

Polo tanto

$$\int\frac{1-x}{x^2+x}dx=\int dx+\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2dx}{x+1}$$

e aplicando a regra de Barrow

$$\int_1^2\frac{1-x}{x^2+x}dx=\left[x+\ln|x|-2\ln|x+1|\right]_1^2=2+\ln 2-2\ln 3-1+2\ln 2=1+3\ln 2-2\ln 3=1+\ln(8/9)$$

Exemplos de resposta / Solucións

OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes $(C)=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada $(A)=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & a \end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$|C| = 2a - 2 + \cancel{4} - \cancel{4} + a - 4 = 3a - 6; \quad 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Polo tanto:

$a = 2 \Rightarrow rang(C) = 2$

$a \neq 2 \Rightarrow rang(C) = 3$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$a \neq 2 \Rightarrow rang(A) = 3$, pois $3 = rang(C) \leq rang(A) \leq 3$

para $a = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{4} - 2 - \cancel{4} - 4 = -6 \neq 0$$

Concluímos que $rang(A) = 3$, para calquera valor do parámetro.

Discusión:

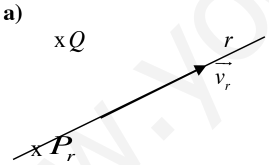
$a = 2 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

$a \neq 2 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^{o}\,incógnitas$. Sistema compatible determinado. Solución única.

b) $\boxed{a = 0}$. Estamos no caso de sistema compatible determinado e é un sistema homoxéneo. Polo tanto a solución única é a solución trivial

$$\boxed{x = 0, y = 0, z = 0}$$

2) a)



$$r: \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$P_r(-4,1,0) \in r; \quad Q(0,2,2) \in \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{QP_r} = (-4,-1,-2) \end{array}\right\} \text{ vectores directores de } \alpha$$

Estes elementos determinan o plano α:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha : x - 2y - z + 6 = 0}$$

Vértices do triángulo: $M(-6,0,0)$; $N(0,3,0)$; $P(0,0,6)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=(6,3,0)\\ \overrightarrow{MP}=(6,0,6)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 3 & 0\\ 6 & 0 & 6\end{vmatrix}=(18,-36,-18)$$

$$\text{Área } \widehat{MNP}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+36^2+18^2}=9\sqrt{6}\ u^2$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(1,0,1)\\ \overrightarrow{n_\alpha}=(1,-2,-1)\end{array}\right\}\text{vectores directores de } \pi$$

$P_r(-4,1,0)\in\pi$

Estes elementos determinan o plano π:

$$\begin{vmatrix}x+4 & y-1 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y-z+3=0}$$

3) **a)** Dise que $f(x)$ é continua no punto $x=x_0$, se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x);\quad \exists f(x_0);\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Dise que $f(x)$ ten unha descontinuidade evitable no punto $x=x_0$, se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\nexists f(x_0) \text{ ou ben } \exists f(x_0) \text{ pero } f(x_0)\neq \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$ é un cociente de funcións continuas en $\mathbb{R}$. Polo tanto $f(x)$ será continua en $\mathbb{R}$ se non se anula o denominador, pero

$$x^2+k=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-k}$$

Así $f(x)$ é continua en $\mathbb{R}$ para $k\in(0,\infty)$.

b) Máximo relativo en $(0,4)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}g(0)=4\Rightarrow\boxed{d=4}\\ g'(0)=0\Rightarrow\boxed{c=0}\end{array}\right\}\Rightarrow g(x)=ax^3+bx^2+4$

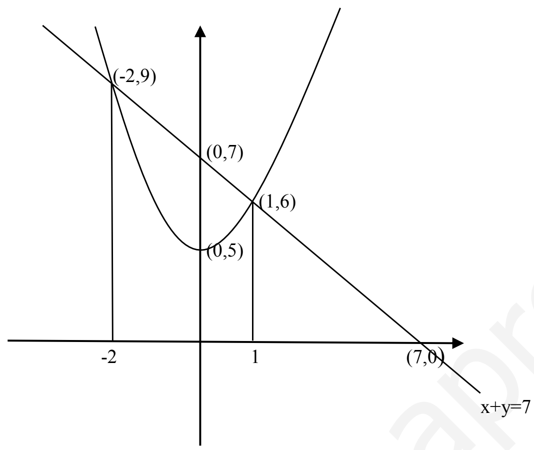
Mínimo relativo en $(2,0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}g(2)=0\Rightarrow 8a+4b+4=0\\ g'(2)=0\Rightarrow 12a+4b=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{a=1}\\ \boxed{b=-3}\end{array}\right.$

4) $x+y=7\Rightarrow$ Puntos de corte da recta cos eixes: (0,7), (7,0)

$$f(x)=x^2+5\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}f'(x)=2x\Rightarrow \text{Decrecente en } (-\infty,0) \text{ e crecente en } (0,\infty)\\ \text{Corte cos eixes: (0,5); Vértice (0,5); } f''(x)=2>0\Rightarrow \text{convexa}\end{array}\right.$$

Puntos de corte de recta e parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y=7-x \\ y=x^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Puntos de corte das gráficas: } (-2,9);(1,6)$$



$$\acute{A}rea=\int_{-2}^{1}\left[7-x-(x^2+5)\right]dx=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\boxed{\frac{9}{2}u^2}$$

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

1) a) Exemplo de matriz simétrica de orde 3: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; Exemplo de matriz antisimétrica de orde 3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) M simétrica $\Leftrightarrow (a_{ij}=a_{ji}) \Leftrightarrow M=M^t \quad \Leftrightarrow M+M^t=2\,M$. Entón, tendo en conta que M é de orde 3:

$$\det(M+M^t)=\det(2M)=2^3\det(M)=-8$$

c) X cadrada de orde 2 e simétrica $\Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$rang(X)=1 \Rightarrow ac-b^2=0$, e non todos nulos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ b+2c & -b-2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos así:

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=2 \\ b+2c=0 \\ ac-b^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) **a)** Calculamos as ecuacións paramétricas de r:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y=-z+3 \\ 3x+5y=-3z+7 \end{array}\right\} \Rightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=\ 4-\lambda \\ y=-1 \\ z=\qquad \lambda \end{array}\right.$$

Por ser o plano e a recta perpendiculares:

$$\pi \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{v_r}=(-1,0,1)$$

Polo tanto:

$$\pi\left\{\begin{array}{l} \text{pasa polo punto } P(2,-1,-2) \\ \qquad \vec{n}_\pi=(-1,0,1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \pi:-1(x-2)+(z+2)=0 \Leftrightarrow \boxed{\pi: x-z-4=0}$$

b) Punto de corte da recta e o plano:

$$\cancel{4}-\lambda-\lambda-\cancel{4}=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \boxed{Q(4,-1,0)}$$

Ángulo que forma π cos planos coordenados:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plano XY} \equiv \alpha: z=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\alpha,\pi)=\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\pi})=\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(\alpha,\pi)=\pi/4}$$

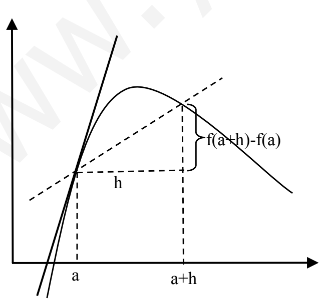
$$\left.\begin{array}{l} \text{Plano YZ} \equiv \beta: x=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\beta,\pi)=\cos(\overrightarrow{n_\beta},\overrightarrow{n_\pi})=\frac{\left|\overrightarrow{n_\beta}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\beta}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{(\beta,\pi)=\pi/4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Plano XZ} \equiv \gamma: y=0 \\ \pi: x-z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\gamma,\pi)=\cos(\overrightarrow{n_\gamma},\overrightarrow{n_\pi})=\frac{\left|\overrightarrow{n_\gamma}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_\gamma}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=0 \Rightarrow \boxed{(\gamma,\pi)=\pi/2}$$

3) a) Dada a función $y=f(x)$, dise que $f(x)$ é derivable en $x=a$, se existe e é finito o límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

represéntase por $f'(a)$ e chámase derivada de $f(x)$ en $x=a$.



Interpretación xeométrica: o cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ coincide coa pendente da recta secante que pasa por $(a,f(a))$ e $(a+h,f(a+h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[a,a+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convírtese na tanxente.

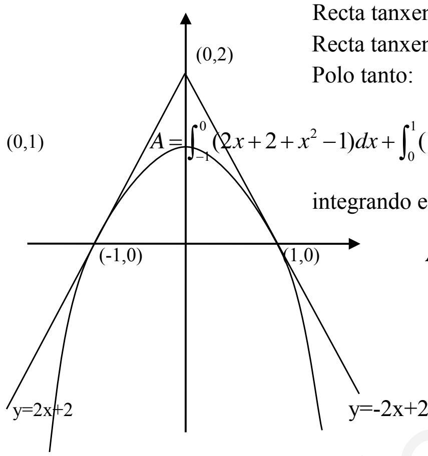
Así: a derivada de $f(x)$, en $x=a$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(a,f(a))$.

b) É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital

Exemplos de resposta / Solucións

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2\cos x}{sen(x^{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}+2senx}{2x\cos(x^{2})}\underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}+2\cos x}{2\cos(x^{2})-4x^{2}sen(x^{2})}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

4) parábola: $y=-x^2+1\begin{cases}\text{vértice}:(0,1)\\ \text{Puntos corte eixe 0X: }(-1,0),(1,0)\\ y'=-2x;\quad y''=-2<0\quad \text{cóncava}\end{cases}$



Recta tanxente en (-1,0): $y=2(x+1)\Leftrightarrow y=2x+2$

Recta tanxente en (1,0): $y=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Polo tanto:

$$A=\int_{-1}^{0}(2x+2+x^{2}-1)dx+\int_{0}^{1}(-2x+2+x^{2}-1)dx$$

integrando e aplicando a regra de Barrow

$$A=\left[\frac{x^{3}}{3}+x^{2}+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^{3}}{3}-x^{2}+x\right]_{0}^{1}=\boxed{\frac{2}{3}u^{2}}$$

OPCIÓN B

1) a) Matriz de coeficientes $(C)=\begin{pmatrix}m&1&-2\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$; Matriz ampliada $(A)=\begin{pmatrix}m&1&-2&0\\1&1&1&0\\1&-1&1&m\end{pmatrix}$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l}|C|=2m+4\\ \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}m=-2\Rightarrow rang(C)=2\\ m\neq -2\Rightarrow rang(C)=3\end{cases}$$

Calculamos o rango da matriz ampliada:

$$m\neq -2,\quad 3=rang(C)\le rang(A)\le 3\Rightarrow rang(A)=3$$

pero para $m=-2$

$$\begin{vmatrix}-2&1&0\\1&1&0\\1&-1&-2\end{vmatrix}=6\neq 0$$

Así, $rang(A)=3,\ \forall m$

Exemplos de resposta / Solucións

Discusión do sistema:

- $m=-2 \Rightarrow rang(C)=2<3=rang(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.
- $m\neq -2 \Rightarrow rang(C)=3=rang(A)=n^{\text{o}}\,incógnitas$ Sistema compatible determinado. Solución única.

b) Caso $\boxed{m=0}$. Queda un sistema homoxéneo e como estamos no caso dun sistema compatible determinado, a única solución é a trivial: $\boxed{x=y=z=0}$

Caso $\boxed{m=-1}$. Tamén estamos no caso dun sistema compatible determinado e a solución única podémola obter por Cramer:

$$x=\frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{2}=-\frac{3}{2};\quad y=\frac{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{2}=\frac{1}{2};\quad z=\frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}{2}=1$$

2) a) Determinamos un punto e un vector director de cada unha das rectas r e s:

$P_r(3,0,-6)$; $\overrightarrow{v_r}=(-3,-4,0)$

$$\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}=(12,16,20)$$. Consideramos $\overrightarrow{v_s}=(3,4,5)$; $P_s(3,0,-1)$

Podemos estudar a posición relativa utilizando rangos:

$$rang\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow$$ As rectas córtanse ou crúzanse.

Pero como $$rang\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix}=rang\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=2$$, as rectas son secantes.

Punto de corte:

$$\cancel{4(3-3\lambda)+12\lambda-12=0}$$

$$-20\lambda+24-4=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \boxed{P(0,-4,-6)}$$

O ángulo que forman as rectas podemos calculalo como:

$$\alpha=\angle(r,s)=ar\cos\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_r}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{v_s}\right\|}=ar\cos\frac{|-9-16|}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{9+16+25}}=ar\cos\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha=\pi/4$$

b) Como as rectas son secantes, están contidas nun plano:

$$\left.\begin{array}{l} (0,-4-6)\in\pi \\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}\text{ vectores de }\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\pi:\begin{cases} x= & -3\lambda+3\mu \\ y=-4-4\lambda+4\mu \\ z=-6 & +5\mu \end{cases}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

3) $Dom(g) = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte cos eixes:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad \boxed{x=2} \text{ Asíntota vertical}$$

Non existen asíntotas horizontais pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Cálculo da asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)} = 1 \\ b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$$

Cálculo dos puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Intervalos de crecemento e decrecemento:

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$g'(x)$	> 0	< 0	<0	>0
$g(x)$	crecente	decrecente	decrecente	crecente

$g(x)$ é crecente nos intervalos $(-\infty,0)$ e $(4,+\infty)$ e $g(x)$ é decrecente nos intervalos $(0,2)$ e $(2,4)$.

Calculamos a segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$g''(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo: $(0,0)$

$g''(4) = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo: $(4,8)$

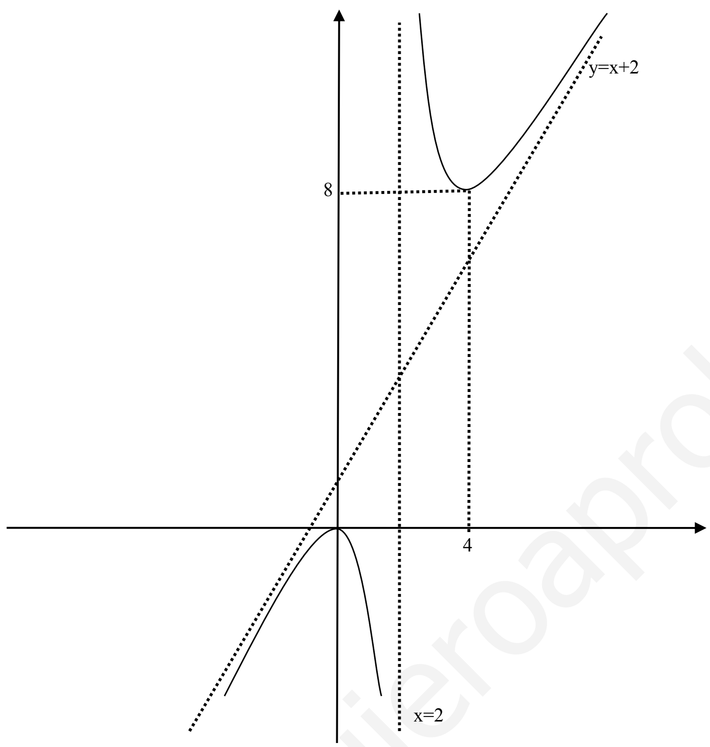
$g''(x) \neq 0$ e polo tanto a función non ten puntos de inflexión.

Intervalos de concavidade e convexidade:

x	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$g''(x)$	< 0	> 0
$g(x)$	cóncava	convexa

$g(x)$ é convexa no intervalo $(2,+\infty)$ e cóncava no intervalo $(-\infty,2)$

Con todos estes datos, a gráfica de $g(x)$ será:



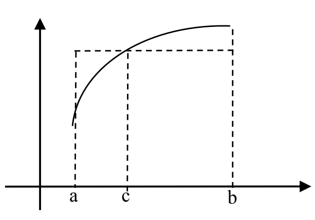
4) a) Utilizamos o método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln(1+x^2)\Rightarrow du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv=xdx\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow I=\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$$

Como o grao do polinomio do numerador é maior que o grao do denominador, facemos a división dos polinomios. Así:

$$I=\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\int(x-\frac{x}{1+x^2})dx=\boxed{\frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C}$$

b) Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$



Interpretación xeométrica: A área encerrada pola gráfica de unha función continua nun intervalo pechado, o eixo OX e as rectas $x=a$, $x=b$ é igual á área dun rectángulo de base $b-a$ e altura $f(c)$, sendo $f(c)$ o valor que toma a función nun punto intermedio c.

CiUG — COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE)	Código: 21
	XUÑO 2009	

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula os rangos de AA^t e de A^tA, sendo A^t a matriz transposta de A. Para o valor $a = 1$, resolve a ecuación matricial $AA^tX = B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Sexa M unha matriz cadrada de orde 3 con det(M) = -1 e que ademais verifica $M^3 + M + I = 0$, sendo I a matriz unidade de orde 3. Calcula os determinantes das matrices: $M + I$ e $3M + 3I$.

Opción 2. a) Resolve, se é posible, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 2x + y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

b) Calcula o valor de m, para que ao engadir ao sistema anterior a ecuación:

$$x + 2y - z = m$$

resulte un sistema compatible indeterminado.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Sexa r a recta que pasa polos puntos P(0,8,3) e Q(2,8,5) e s a recta

$$s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

a) Estuda a posición relativa de r e s Se se cortan, calcula o punto de corte.
b) Calcula a ecuación da recta que pasa por P e é perpendicular ao plano que contén a r e s.

Opción 2. Sexan π o plano que pasa polos puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) e r a recta dada por

$$r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

a) Calcula o ángulo que forman a recta r e o plano π. Calcula o punto de intersección de r e π.
b) Calcula os puntos da recta r que distan 6 unidades do plano π.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Define función continua nun punto. ¿Qué tipo de descontinuidade presenta a función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en $x = 0$?

b) Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento, os extremos relativos e os puntos de inflexión da función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.

c) Calcula a área do recinto limitado pola gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ e a recta $y = 2x$.

Opción 2. a) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) Calcula un punto da gráfica da función $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ no que a recta tanxente sexa paralela ao eixo OX; escribe a ecuación desa recta tanxente. Calcula as asíntotas, se as ten, de $g(x)$.

c) Calcula: $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$; (Nota: ln = logaritmo neperiano)

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)**	**Código: 21**
	SETEMBRO 2009	

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Estuda, segundo os valores de m o rango da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Resolve a ecuación matricial $A^2X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & m \end{array}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dados os planos $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$; $\pi_2 : y - z + 2 = 0$; e a recta $r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

a) Calcula o ángulo que forman π_1 e π_2. Calcula o ángulo que forman π_1 e r.

b) Estuda a posición relativa da recta r e a recta intersección dos planos π_1 e π_2.

Opción 2. a) Calcula a ecuación da recta que pasa polo punto P(2,3,5) e é perpendicular ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \ \ 2 + 2\lambda + \mu \\ z = \ \ 2 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

a) Calcula a distancia do punto P(2,3,5) ao plano π. Calcula o punto de π que está máis próximo ao punto P(2,3,5).

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema de Bolzano. Dada a función $f(x) = e^x + 3x\ln(1 + x^2)$, xustifica se podemos asegurar que a súa gráfica corta ao eixo OX nalgún punto do intervalo [-1, 0].

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax + b & se \quad x \le 0 \\ sen(2x) + 1 & se \quad x > 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.

c) Calcula a área do recinto limitado polo eixo OX e a parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$.

Opción 2. a) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (1 + x^2)e^{-x}$ no punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula o dominio, as asíntotas, os intervalos de crecemento e decrecemento e os extremos relativos da función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

c) Enuncia e interpreta xeometricamente o teorema do valor medio do cálculo integral.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Bloque 1 (Álxebra lineal) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 2 puntos

0,5 puntos polo rango de AA^t

0,5 puntos polo rango de A^tA

1 punto polo cálculo da matriz X

b) 1 punto

0,5 puntos polo det(M + I)

0,5 puntos polo det(3M + 3I)

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos

0,5 puntos por deducir que ten infinitas solucións

1 punto por obter as infinitas solucións

b) 1,5 puntos

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos por deducir que o rango da matriz ampliada ten que ser 2

0,5 puntos por obter o valor de m

Bloque 2 (Xeometría) (3 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos

1 punto polo estudo da posición relativa

0,5 puntos polo cálculo do punto de corte

b) 1,5 puntos

1 punto pola obtención do vector director da recta

0,5 puntos pola ecuación da recta

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos

0,5 puntos pola ecuación do plano

0,5 puntos polo ángulo que forman a recta e o plano

0,5 puntos polo cálculo do punto de corte.

b) 1,5 puntos

0,75 puntos pola igualdade que expresa que un punto da recta dista 6 unidades do plano

0,75 puntos pola obtención dos dous puntos da recta que distan 6 unidades

Bloque 3 (Análise) (4 puntos)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto

0,5 puntos pola definición de función continua nun punto

0,5 puntos polo tipo de descontinuidade

b) 1,5 puntos

0,75 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento

0,5 puntos polos extremos relativos (0,25 puntos por cada un)

0,25 puntos polo punto de inflexión

c) 1,5 puntos

0,75 puntos pola formulación do problema (expresión da área como suma de integrais definidas)

0,75 puntos polo cálculo da área (0,25 puntos pola integración e 0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do resultado)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto

0,5 puntos: enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial

0,5 puntos: interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial

b) 1,5 puntos

0,5 puntos polo cálculo do valor de x no que se anula a derivada de g(x)

0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente

0,5 puntos polas asíntotas

c) 1,5 puntos

1 punto polo cálculo da integral indefinida

0,5 puntos pola aplicación da regra de Barrow e obtención do resultado

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos por obter m = 4.

0,5 puntos por rang(M) = 3 se m ≠ 4

0,5 puntos por rang(M) = 1 se m = 4.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención de A^2.

0,5 puntos polo cálculo de $(A^2)^{-1}$ ou pola formulación do sistema de ecuacións expresando X como unha matriz 2x1.

0,5 puntos pola obtención da matriz X.

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes.

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada.

1 punto pola discusión do sistema:

- 0,5 puntos. Sistema Incompatible.
- 0,5 puntos. Sistema Compatible Indeterminado.

b) 1 punto pola resolución do sistema.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,75 puntos polo ángulo que forman os planos.

0,75 puntos polo ángulo que forman o plano e a recta.

b) 1,5 puntos, distribuído en:

0, 5 puntos polo cálculo do vector director da recta intersección dos planos ou pola expresión da recta como intersección de dous planos.

0,5 puntos polo paralelismo das rectas.

0,5 puntos, as rectas non son coincidentes.

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola obtención do vector director da recta.

0,5 puntos pola ecuación da recta.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto pola distancia do punto ao plano.

1punto pola obtención do punto do plano máis próximo ao punto dado.

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

OPCIÓN 1:

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Bolzano.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema de Bolzano.

0,5 puntos pola aplicación do teorema de Bolzano.

b) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola obtención de b (condición de continuidade).

0,5 puntos pola obtención de a (condición de derivable).

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto pola formulación do problema.

0,5 puntos pola integración e aplicación de Barrow.

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola derivada en x=0.

0,5 puntos pola ecuación da recta tanxente.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto polo dominio e asíntotas.

0,5 puntos polos intervalos de crecemento e decrecemento.

0,5 puntos polo máximo relativo.

c) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$|AA^t| = (1+a^2)^2 - a^2 = 1 + a^4 + a^2 > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow rang(AA^t) = 2$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \\ \left|{}^tAA\right| = a^2(1+a^2) - a^2 - a^4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang({}^tAA) = 2$$

$\boxed{a=1}$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ |AA^t| = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists (AA^t)^{-1};$$

$$X = (AA^t)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $M^3 + M + I = 0 \Rightarrow M + I = -M^3$

$\det(M+I) = \det(-M^3) = (-1)^3 \cdot (-1)^3 = 1$

$\det(3M+3I) = \det(3(M+I)) = (3)^3 \cdot \det(m+I) = 3^3 \cdot 1 = 27$

Opción 2. a) As infinitas solucións do sistema veñen dadas por:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 + z \\ 2x + y = 2 + 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = t-3 \\ y = 8 \\ z = t \end{array}};\ t \in \mathbb{R}$$

b)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & m \end{pmatrix}$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} |C| = -1-4-2+1+4+2 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

Para que sexa un sistema compatible indeterminado, terá que ser $rang(A) = 2$, xa que entón

$rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = n^o$ *de incógnitas*

Como $rang(A) \geq rang(C) = 2,\ rang(A) = 2 \Leftrightarrow \det(A) = 0$. Entón:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m + 20 + 2 - 5 - 4 - 2m = -m + 13 \Rightarrow \boxed{m = 13}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Determinamos un punto, un vector director e as ecuacións paramétricas de cada unha das rectas r e s:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (2,0,2) \\ P_r(0,8,3) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = -7 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s(-7,0,0) \in s \\ \vec{v_s} = (2,2,1) \end{cases}$$

a)

$$rang(\vec{v_r}, \vec{v_s}) = rang\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ as rectas}$$

córtanse ou crúzanse, pero como

$$rang(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}) = rang\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{ as}$$

rectas córtanse.

Calculamos o punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} 2t - 8 + 7 = 0 \\ 8 - 6 - 4t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1/2;\ \text{Punto de corte: } \boxed{(1,8,4)}$$

b) Un vector director da recta perpendicular ao plano que contén as rectas r e s é o vector

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 2, 4)$$

Polo tanto, as ecuacións paramétricas da recta pedida serán:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 8 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Opción 2. Calculamos a ecuación do plano π que pasa polos puntos dados:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6(x-1)+3(y+1)-6(z-1)=0$$

é dicir, $\pi \equiv 2x - y + 2z - 5 = 0$.

a) Vector normal ao plano π: $\vec{n}_\pi = (2,-1,2)$. Vector director da recta r: $\vec{v}_r = (2,-1,2)$. Como os dous vectores son proporcionais, podemos afirmar que a recta e o plano son perpendiculares.

Para calcular o punto de intersección da recta co plano, consideramos as ecuacións paramétricas da recta r:

$$r: \begin{cases} x = 7+2\lambda \\ y = -6-\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$$

e substituimos na ecuación do plano:

$2(7+2\lambda) - (-6-\lambda) + 2(-3+2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

e polo tanto o punto de corte é: $\boxed{(5,-5,-5)}$.

b) A condición de que un punto $(7+2\lambda, -6-\lambda, -3+2\lambda)$ da recta r diste 6 unidades do plano π, vén dada pola igualdade:

$$6 = \frac{|2(7+2\lambda)-(-6-\lambda)+2(-3+2\lambda)-5|}{\sqrt{4+1+4}}$$

de onde:

$$|9\lambda+9| = 18 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9\lambda + 9 = 18 \\ -9\lambda - 9 = 18 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{array} \right\}$$

obtendo así os puntos da recta: $\boxed{(9,-7,-1)}$ e $\boxed{(1,-3,-9)}$.

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>. a) Unha función $f(x)$ dise continua en $x = x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

A función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ non está definida en $x = 0$, pero

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

polo tanto esta función presenta, en $x = 0$, unha descontinuidade evitable. Evítase esta descontinuidade definindo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

b) $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

$g'(x) = 6x^2 - 6x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Estudamos o signo de $g'(x)$ nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, \infty)$:

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$g'(x)$	>0	<0	>0
$g(x)$	crecente	decrecente	crecente

$x \in (-\infty,0) \Rightarrow g'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

$x \in (0,1) \Rightarrow g'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo

$x \in (1,\infty) \Rightarrow g'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

Para os extremos relativos, estudamos o signo da segunda derivada nos valores que anulaban a primeira derivada

$$g''(x) = 12x - 6$$

$$g''(0) = -6 < 0;\ g''(1) = 6 > 0$$

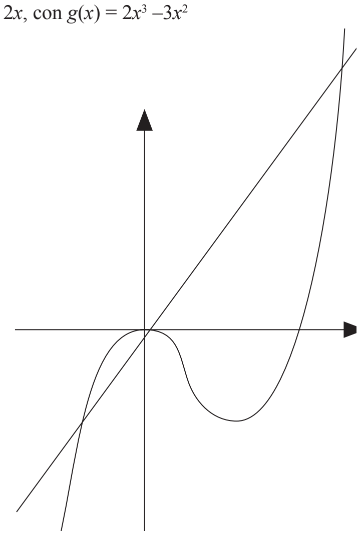
Polo tanto hai un <u>máximo relativo</u> no punto (0, 0) e un <u>mínimo relativo</u> no punto (1, –1).

Finalmente

$$\left. \begin{array}{l} g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ g'''(x) = 12 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Punto de inflexión no}$$

punto (1/2, –1/2).

c) Calculamos os puntos de intersección da recta $y = 2x$, con $g(x) = 2x^3 - 3x^2$



$$x(2x^2-3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

e polo tanto

$$A=\int_{-1/2}^{0}(2x^3-3x^2-2x)dx+\int_0^2(2x-2x^3+3x^2)dx$$

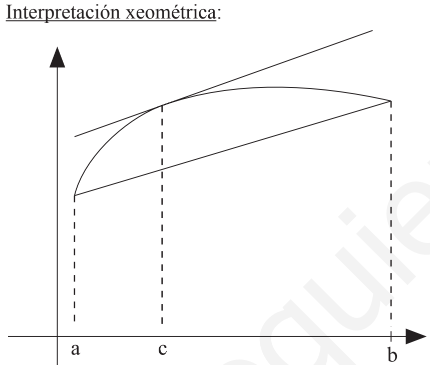
integrando e aplicando Barrow, resulta

$$A=\left[\frac{x^4}{2}-x^3-x^2\right]_{-1/2}^{0}+\left[x^2-\frac{x^4}{2}+x^3\right]_0^2=\frac{131}{32}u^2$$

<u>Opción 2.</u> a) Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b), entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>Interpretación xeométrica</u>:



Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b), entón existe polo menos un punto intermedio c tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(c, f(c))$ é paralela á corda que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

b) As rectas paralelas ao eixo OX teñen pendente 0. Como a pendente da recta tanxente á gráfica dunha función coincide coa derivada da función nese punto, temos que encontrar os valores que anulan a derivada de $g(x)$.

$$g'(x)=\frac{e^x(1+e^x)^2-2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4}=\frac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$

e tendo en conta que $e^x \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0 \Leftrightarrow$$

$$e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

Así, a recta tanxente á gráfica de $g(x)$ no punto $(0, g(0))$ é paralela ao eixo OX e vén dada pola ecuación

$$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$$

entón, como $g(0) = 1/4$, a ecuación da recta tanxente pedida será: $\boxed{y = 1/4}$.

<u>Asíntotas verticais</u> de $g(x)$:

$1 + e^x > 0 \Rightarrow$ Non existen asíntotas verticais

<u>Asíntotas horizontais</u> de $g(x)$:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^x\cdot(1+e^x)}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=0}$$

asíntota horizontal.

<u>Asíntotas oblicuas</u> de $g(x)$: Non hai.

c) É unha integral case inmediata

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^{\ln 5}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

tamén poderiamos resolvela facendo a substitución

$$t=1+e^x;\ dt=e^x dx$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{vmatrix} = -m^2 + 8m - 16$;

$|M| = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Polo tanto:

- $m \neq 4 \Rightarrow rang(M) = 3$
- $m = 4 \Rightarrow rang(M) = 1$ (2ª fila = 2x1ªfila, e 3ª fila = 4x1ªfila)

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

Como $|A^2| = 4 \neq 0$, existe a matriz inversa de A^2 e temos: $A^2 X = B \Leftrightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot B$

$$X = \left(A^2\right)^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A^2|}(Adj(A^2)^t) \cdot B =$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes $(C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

Matriz ampliada $(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & m \end{pmatrix}$

Calculamos os rangos da matriz de coeficientes e da matriz ampliada:

$$\left.\begin{array}{l} |C| = -4 - 4 + 1 + 1 - 2 + 8 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} |A| = m \\ rang(A) \geq rang(C) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow rang(A) = 2 \\ m \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 \end{array}\right.$$

Discusión do sistema:

- $m = 0 \Rightarrow rang(C) = 2 = rang(A) <$ *nº incógnitas*. Sistema compatible indeterminado, infinitas solucións.
- $m \neq 0 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

b) Caso $\boxed{m = 0}$. As infinitas solucións do sistema veñen dadas por:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -z \\ 2x - y = z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3t \\ z = t \end{array}} \ ; \ t \in \mathbb{R}$$

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Vector normal ao plano π_1: $\vec{n}_{\pi 1} = (1,1,1)$.

Vector normal ao plano π_2: $\vec{n}_{\pi 2} = (0,1,-1)$.

$< \vec{n}_{\pi 1}, \vec{n}_{\pi 2} > = 0 \Rightarrow \pi_1$ e π_2 son perpendiculares.

Vector director da recta r: $\vec{v}_r = (-2,1,1)$

$$áng(r, \pi_1) = arcsen \frac{<\vec{v}_r, \vec{n}_{\pi 1}>}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_{\pi 1}|} = arcsen \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 0º$$

b) Un vector director $\vec{v}_s$ da recta s é perpendicular aos vectores $\vec{n}_{\pi 1}$ e $\vec{n}_{\pi 2}$, polo tanto

$$\vec{v}_s = \vec{n}_{\pi 1} \times \vec{n}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_s = \vec{v}_r \\ P_r = (0,-1,1) \in r \\ P_r = (0,-1,1) \notin s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{As rectas son paralelas.}$$

Opción 2.

a) Como a recta e o plano son perpendiculares, un vector director da recta é o vector normal ao plano:

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,2)$$

Polo tanto, a recta pedida é:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{2}$$

b) O punto $Q(-1,2,2) \in \pi$, e $\vec{n}_\pi = (-1,-2,2)$ é un vector normal ao plano π. Polo tanto

$\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$

e aplicando a fórmula da distancia dun punto a un plano

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 6 - 10 + 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3} unidades$$

O punto de π máis próximo a P será o punto de intersección de π coa recta perpendicular a π pasando por P. Esta recta, xa obtida no apartado a), ten por ecuacións paramétricas

$$r:\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

polo tanto, un punto xenérico desta recta vén dado por $(2–t,\ 3–2t,\ 5+2t)$ e sustituindo na ecuación de π

$$2 - t + 6 - 4t - 10 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow 9t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1/9$$

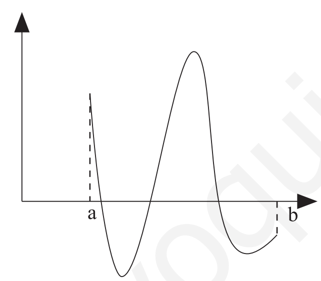
e polo tanto, o punto de π máis próximo a P é

$$\boxed{Q(19/9,\ 29/9,\ 43/9)}$$

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Teorema de Bolzano: se $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$, é dicir $f(a)$ e $f(b)$ son de distinto signo, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Interpretación xeométrica:



Se unha función continua nun intervalo pechado toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, entón a función corta ao eixo OX polo menos nun punto.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [-1,0] \\ f(-1) = \frac{1}{2} - 3\ln 2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (-1,0) / f(c) = 0$$

b) Para que sexa continua en x=0

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(ax+b) = b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(sen2x+1) = 1 \\ f(0) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

para que tamén sexa derivable en x=0

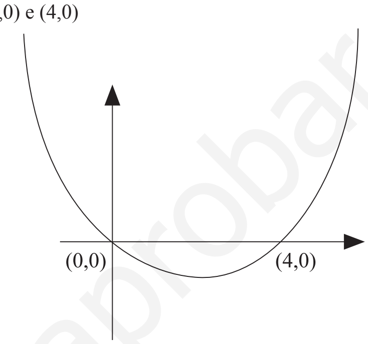
$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{ah+1-1}{h} = a$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{sen2h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{sen2h}{h} = 2$$

de donde $\boxed{a=2}$

c) $\dfrac{x^2}{4} - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Así, os puntos de corte da parábola co eixo OX son (0,0) e (4,0)



$$\left.\begin{array}{l} y' = \frac{x}{2} - 1 \\ y' = 0 \Rightarrow x = 2 \\ f(2) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow vértice(2,-1).$$

Como é a área dunha rexión situada por debaixo do eixo OX, a área será

$$A = -\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}u^2$$

Opción 2. a) A ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ no punto correspondente a $x = 0$, vén dada por

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

e como

$f(0) = 1$

$f'(x) = 2xe^{-x} - (1 + x^2)e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -1$

a ecuación da recta tanxente pedida é: $\boxed{x + y = 1}$

b) Como é unha función racional, analizamos cando se anula o denominador

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

e polo tanto $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

Asíntotas verticais: $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Asíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow\ y = 1 \text{ é unha asíntota horizontal}$$

Non hai asíntotas oblicuas.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estudamos o signo de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(1,\infty)$

$x \in (-\infty,-1) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

$x \in (-1,0) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo

$x \in (0,1) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo

$x \in (1,\infty) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	>0	>0	<0	<0
$f(x)$	crecente	crecente	decrecente	decrecente

Para os extremos relativos, estudamos o signo da segunda derivada nos valores que anulaban a primeira derivada

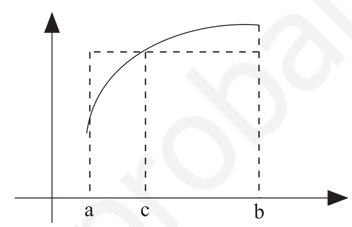
$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^2+8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(0) = -2 < 0$$

Polo tanto hai un máximo relativo no punto (0,0).

c) Se $f(x)$ é unha función continua nun intervalo $[a,b]$, existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Interpretación xeométrica:



A área encerrada pola gráfica dunha función continua nun intervalo pechado, o eixo OX e as rectas $x = a$, $x = b$ é igual á área dun rectángulo de base $b - a$ e altura $f(c)$, o valor que toma a función nun punto intermedio c.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)** **XUÑO 2008**	**Código: 21**

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & m & 0\\ 0 & 0 & m\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula os valores de m para os que A ten inversa.

b) Para $m=1$, calcula a matriz X que verifica: $X\cdot A+X-2A=0$.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= m\\ x - 2y + z &= 2\\ 3x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m=-1$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Sexan $\vec{u}$, $\vec{v}$ dous vectores tales que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=4$, $|\vec{u}-\vec{v}|=5$. Calcula o ángulo que forman os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Calcula o produto m.ixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}]$, sendo $\vec{u}\times\vec{v}$ o produto vectorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) Dadas as rectas $r:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$; $s:\begin{cases} x = 1+6\lambda\\ y = 4\lambda\\ z = -4\lambda\end{cases}$

estuda a súa posición relativa e calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e contén a r.

Opción 2. a) ¿Son coplanarios os puntos $A(1,0,0)$, $B(3,1,0)$, $C(1,1,1)$ e $D(3,0,-1)$? En caso afirmativo, calcula a distancia da orixe de coordenadas ao plano que os contén.

b) Calcula o punto simétrico do punto $P(0,0,1)$ respecto do plano $\pi: x-2y+2z-1=0$.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Definición e interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

b) Calcula os valores de a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} ax+b & se\ x<-1\\ x^2-4x & se\ x\geq -1\end{cases}$ sexa continua e derivable en $x=-1$.

c) Calcula a área do recinto limitado polas parábolas $y=x^2-4x$; $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x$.

Opción 2. a) Enunciado do teorema de Weierstrass. Se unha función $f(x)$ é continua en $[a,b]$ e é estritamente decrecente nese intervalo, ¿onde alcanza a función o máximo e o mínimo absoluto?

b) Calcula o valor de m para que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx^2-1+\cos x}{sen(x^2)}=0$

c) Calcula $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2+4x+3}dx$.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)** **SETEMBRO 2008**	**Código: 21**

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Estuda, segundo os valores de m , o rango da matriz $M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$

b) Para o valor $m = 1$, resolve a ecuación matricial $MX = 3A^t$, sendo $A = (1\ 0\ 1)$ e A^t= matriz transposta de A. Para este valor de m, ¿canto valerá o determinante da matriz $2M^{21}$?

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} 3x - y - 3z &= m \\ x + y - z &= 1 \\ mx + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

b) Resolve, se é posible, o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Calcula a distancia da orixe de coordenadas ao plano que pasa polo punto $P(1,1,2)$ e é perpendicular á recta $r:\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

b) Calcula a área do triángulo que ten por vértices os puntos de intersección do plano $\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$ cos eixos de coordenadas. ¿É un triángulo rectángulo?

Opción 2. a) Dados os planos $\pi_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2 :\begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda - 3\mu \end{cases}$

estuda a súa posición relativa e calcula a distancia entre eles.

b) Dado o punto $P(2,1,7)$, calcula o seu simétrico respecto ao plano π_2.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Sexa $f(x) = e^x (2x - 1)$. Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto de abscisa $x = 0$.

c) Calcula: $\int_0^1 e^x (2x-1)\, dx$

Opción 2. a) Calcula a, b, c, para que $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & se \quad x \le 0 \\ x+\ln(1+x^2) & se \quad x>0 \end{cases}$

sexa continua e derivable en R e teña un extremo relativo en $x = -2$. (Nota: ln = logaritmo neperiano)

b) Sexa $g(x) = x(x - 1)$, $0 \le x \le 2$. Razoa se $g(x)$ ten máximo e mínimo absolutos no intervalo $[0,2]$. En caso afirmativo, calcúlaos.

c) Definición de primitiva dunha función. Enunciado da regra de Barrow.

Criterios de Avaliación / Corrección

CONVOCATORIA DE XUÑO

<u>BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)</u>

<u>Opción 1</u>

a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos por despexar X

1 punto polo cálculo de $(A+I)^{-1}$

0,5 puntos polos cálculos de $2A$ e $2A\cdot(A+I)^{-1}$

<u>Opción 2</u>

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención do rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada

0,5 puntos. Sistema Incompatible

0,5 puntos. Sistema Compatible Indeterminado

b) 1 punto, pola resolución do sistema

<u>BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)</u>

<u>Opción 1</u>

a) 1 punto, distribuído en

0,5 puntos por obter que os vectores son perpendiculares

0,5 puntos polo cálculo do producto mixto

b) 2 puntos, distribuídos en:

1 punto polo estudo da posición relativa das rectas

1 punto pola obtención da ecuación do plano.

<u>Opción 2</u>

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,5 puntos por probar que os puntos son coplanarios.

1 punto polo cálculo da distancia da orixe ao plano

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención da recta perpendicular ao plano

0,5 puntos polo punto de intersección da recta co plano

0,5 puntos polo cálculo do punto simétrico

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u>

<u>Opción 1</u>

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos pola definición da derivada dunha función nun punto.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1,5 punto, distribuído en:

0,75 puntos pola continuidade

0,75 puntos pola derivabilidade

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,75 puntos pola formulación do problema

0,75 puntos polo cálculo da integral definida.

<u>Opción 2</u>

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Weierstrass

0,5 puntos pola cuestión relativa ao máximo e ao mínimo da función.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto pola aplicación da regra de L'Hôpital

0,5 puntos pola obtención de m

c) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola descomposición en fraccións simples.

1 punto pola integración

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

<u>BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)</u>

<u>Opción 1</u>

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 3$ se $m \neq 0$.

0,5 puntos por $\text{rang}(M) = 1$ se $m = 0$.

b) 2 puntos, distribuídos en:

1,5 puntos pola obtención de X.

0,5 puntos polo cálculo do determinante da matriz $2M^{21}$.

<u>Opción 2</u>

a) 2 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos polo rango da matriz dos coeficientes

0,5 puntos polo rango da matriz ampliada

1 punto pola discusión do sistema:

0,5 puntos. Sistema Incompatible

0,5 puntos. Sistema Compatible Determinado

b) 1 punto, pola resolución do sistema

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)

Opción 1

a) 1,5 puntos, distribuídos en

0,5 puntos pola obtención do vector normal ao plano

0,5 puntos pola obtención do plano

0,5 puntos polo cálculo da distancia

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0, 5 puntos polo cálculo dos vértices

0,5 puntos polo cálculo da área

0,5 puntos por ver que non é rectángulo.

Opción 2

a) 1,5 puntos, distribuídos en

1 punto polo estudo da posición relativa.

0,5 puntos polo cálculo da distancia entre os planos.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención da recta perpendicular ao plano

0,5 puntos polo punto de intersección da recta co plano

0,5 puntos polo cálculo do punto simétrico

BLOQUE 3 (ANÁLISE)

Opción 1

a) 1 punto, distribuído en:

0,5 puntos polo enunciado do teorema de Rolle.

0,5 puntos pola interpretación xeométrica.

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

1 punto polo cálculo dos intervalos de crecemento e decrecemento.

0,5 puntos pola obtención da recta tanxente.

c) 1,5 puntos, distribuídos en

1 punto pola integración por partes

0,5 puntos pola aplicación de Barrow.

Opción 2

a) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,5 puntos pola obtención de c (condición de continuidade)

0,5 puntos pola obtención de b (condición de derivable).

0,5 puntos pola obtención de a (condición de extremo relativo).

b) 1,5 puntos, distribuídos en:

0,50 puntos polo razoamento

0,50 puntos polo máximo absoluto

0,50 puntos polo mínimo absoluto

c) 1 punto, distribuído en

0,5 puntos pola definición de primitiva.

0,5 puntos pola regra de Barrow.

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) A ten inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$. Calculamos polo tanto o determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2)$$

así, A ten inversa para os valores de m distintos de 0 e 2: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ **(1 punto)**

b) $\boxed{m = 1}$; $XA + X = 2A \Leftrightarrow X(A+I) = 2A$. Para poder despexar X estudamos se a matriz $A+I$ ten inversa

$$|A+I| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A+I)^{-1}$$

entón, $X = 2A(A+I)^{-1}$. **(0,5 puntos)**

Calculamos $(A+I)^{-1}$:

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{|A+I|}(Adj(A+I))^t = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(1 punto)**

e así:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Opción 2. a)

$$\text{Matriz de coeficientes } (C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada } (A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos o rango da matriz de coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ |C| = -8+1+9+6-2-6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

(0,5 puntos)

Calculamos o rango da matriz ampliada, orlando o menor de orde 2 non nulo anterior coa columna dos termos independentes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4+m+18+6m-4-3 = 7m+7 = 7(m+1)$$

Polo tanto

$$m \neq -1 \Rightarrow rang(A) = 3$$
$$m = -1 \Rightarrow rang(A) = 2$$

(0,5 puntos)

Discusión:

$m \neq -1$, $rang(C) = 2 \neq 3 = rang(A)$, sistema incompatible, non ten solución **(0,5 puntos)**

$m = -1$, $rang(C) = 2 = rang(A) < 3 =$ *nº incógnitas*, sistema compatible indeterminado, infinitas solucións. **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m = 1}$; estamos no caso dun sistema compatible indeterminado. Un sistema equivalente ao dado é:

$$2x + 3y = -1-z$$
$$x - 2y = 2-z$$

polo tanto

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 3 \\ 2-z & -2 \end{vmatrix}}{-7} = -\frac{5}{7}z + \frac{4}{7}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-7} = \frac{1}{7}z - \frac{5}{7}$$

e as infinitas solucións son:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{7}\lambda + \dfrac{4}{7} \\ y = \dfrac{1}{7}\lambda - \dfrac{5}{7}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$ **(1 punto)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a)

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = 3 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = 9 \\ |\vec{v}| = 4 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v} = 16 \\ |\vec{u}-\vec{v}| = 5 \Leftrightarrow 25 = (u-v)\cdot(u-v) = u\cdot u + v\cdot v - 2u\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$25 = 9 + 16 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é nulo e polo tanto son dous vectores perpendiculares. **(0,5 puntos)**

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}] = [\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}] = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = |\vec{u}\times\vec{v}|^2 =$$

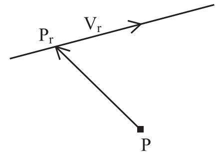
$$|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot sen^2(\vec{u},\vec{v}) = 9\cdot 16\cdot 1 = 144$$ **(0,5 puntos)**

b) A partir das ecuacións das rectas podemos comparar os seus vectores directores:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (3,2,-2) \\ \vec{v_s} = (6,4,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r} \text{ e } \vec{v_s} \text{ son paralelos} \Rightarrow$$ as rectas son paralelas ou coincidentes.

Pero o punto $P_r(3,1,-1) \in r$ e $P_r(3,1,-1) \notin s$. Polo tanto as rectas son paralelas non coincidentes **(1 punto)**

As coordenadas do punto $P(1,1,1)$ non cumpren as ecuacións da recta r, e polo tanto $P(1,1,1) \notin r$.



O plano pedido quedará determinado por:

$P(1,1,1)$, punto exterior a r;

$\vec{v}_r = (3,2,-2)$, vector director de r

$\overrightarrow{PP_r} = (2,0,-2)$

Así, a ecuación xeral do plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$ e desenvolvendo o determinante

obtense $2x - y + 2z - 3 = 0$ **(1 punto)**

<u>Opción 2</u>. a)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,1) \end{array}\right\}$$ son dous vectores non nulos e non proporcionais; polo tanto, o punto A e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinan un plano π que será o plano que contén aos puntos A, B e C:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \pi: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Como as coordenadas do punto D verifican a ecuación anterior, os puntos son coplanarios. **(0,5 puntos)**

A ecuación do plano que os contén é:

$$\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$$

A distancia da orixe $O(0,0,0)$ ao plano π será:

$$d(O,\pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}$$ **(1 punto)**

b) Sexa r a recta perpendicular a π pasando por $P(0,0,1)$, entón r ten como vector director $\vec{v}_r$ = vector normal a $\pi = (1,-2,2)$; polo tanto, as ecuacións paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

Substituindo na ecuación de π, calculamos a intersección de r con π

$$\lambda + 4\lambda + 2 + 4\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1/9$$

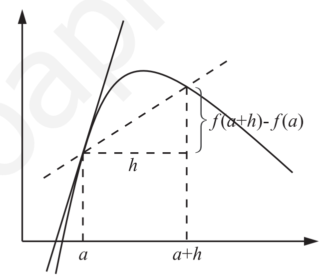
e así, o punto de intersección da recta co plano é $M(-1/9, 2/9, 7/9)$ **(0,5 puntos)**

Como $M(-1/9, 2/9, 7/9)$ é o punto medio de $P(0,0,1)$ e o seu simétrico $P'(x,y,z)$, entón

$$\left.\begin{array}{r} -1/9 = x/2 \\ 2/9 = y/2 \\ 7/9 = z+1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow P'(-2/9, 4/9, 5/9)$$ **(0,5 puntos)**

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>. a) Dada a función $y = f(x)$, dise que $f(x)$ é derivable en $x = a$, se existe e é finito o límite: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ represéntase por $f'(a)$ e chámase derivada de $f(a)$ en $x = a$. **(0,5 puntos)**



Interpretación xeométrica: o cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ coincide coa pendente da recta secante que pasa por $(a, f(a))$ e $(a+h, f(a+h))$. A medida que vai diminuíndo a amplitude do intervalo $[a, a+h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así: a derivada de $f(x)$, en $x = a$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(a, f(a))$. **(0,5 puntos)**

b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(ax+b) = -a+b \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^2-4x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b = 5, \text{ para}$$

que sexa continua en $x = -1$ **(0,75 puntos)**

Para ser derivable en $x = -1$ ten que ser continua nese punto, polo tanto $-a + b = 5$ e ademais,

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{a}+ah+\cancel{b}-\cancel{5}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h} = a \\ f'(-1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{1}-2h+h^2+\cancel{4}-4h-\cancel{5}}{h} = \lim_{h\to 0^+}(-6+h) = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -6 \Rightarrow b = -1$$

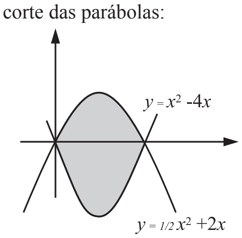
(0,75 puntos)

c)

$$y = x^2 - 4x \begin{cases} \text{puntos de corte cos eixos: } (0,0),\ (4,0) \\ y'=2x-4;\ y'=0 \Leftrightarrow x=2 \\ y''=2 \end{cases} \Rightarrow \text{mínimo } (2,-4)$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \begin{cases} \text{puntos de corte cos eixos: } (0,0),\ (4,0) \\ y'=-x+2;\ y'=0 \Leftrightarrow x=2 \\ y''=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{máximo } (2,2)$$

Puntos de corte das parábolas:



$$x^2 - 4x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Polo tanto a área da rexión limitada polas parábolas estará dada pola integral definida

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right) dx$$ **(0,75 puntos)**

Calculamos agora a integral anterior:

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - x^2 + 4x \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x \right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \right]_0^4 = -32 + 48 = 16u^2$$ **(0,75 puntos)**

<u>Opción 2</u>. a) Teorema de Weierstrass: Se unha función $f(x)$ é continua nun intervalo pechado $[a,b]$, a función alcanza nese intervalo o máximo e o mínimo absolutos. **(0,5 puntos)**

Por ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, polo teorema anterior alcanza nese intervalo o máximo e o mínimo absolutos. Entón, como por hipótese a función é estritamente decrecente

$a < x \leq b \Rightarrow f(a) > f(x) \Rightarrow f(x)$ alcanza o máximo absoluto en $x = a$

$a \leq x < b \Rightarrow f(b) < f(x) \Rightarrow f(x)$ alcanza o mínimo absoluto en $x = b$ **(0,5 puntos)**

b) $\lim_{x\to 0} \frac{mx^2-1+\cos x}{sen(x^2)}$ é unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$.
Utilizamos a regra de L´Hôpital dúas veces xa que despois de utilizala a primeira vez segue sendo unha indeterminación do tipo tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{sen(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx - senx}{2x \cdot \cos(x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2m - \cos x}{2\cos(x^2) - 4x^2 sen(x^2)} = \frac{2m-1}{2}$$ **(1 punto)**

entón $\lim_{x\to 0} \frac{mx^2 - 1 + \cos x}{sen(x^2)} = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1/2$

(0,5 puntos)

c) Factorizamos o denominador $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (raíces simples)}$$

descompoñemos o integrando en fraccións

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

e calculamos A e B

$$x = -1 \Rightarrow 4 = 2A \Rightarrow A = 2$$
$$x = -3 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$ **(0,5 puntos)**

polo tanto

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$= 2\ln|x+1| - \ln|x+3| + C$ **(1 punto)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

<u>BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)</u> *(Puntuación máxima 3 puntos)*

<u>Opción 1</u>.

a) $$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{vmatrix} = -m^2 \ ; \ |M| = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Polo tanto: $m \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3$ **(0,5 puntos)**

$m = 0 \Rightarrow rang(M) = 1$

(2^a e 3^a columnas son de ceros) **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m = 1}$

$\left.\begin{matrix} M \text{ matriz cadrada de orde } 3 \\ A^t \text{ matriz columna de orde } 3\times 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X$ é unha matriz columna de orde 3×1

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} -x & & -z = 3 \\ -x & & = 0 \\ 2x & -y & +z = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$ **(1,5 puntos)**

$m = 1 \Rightarrow \det(M) = -1.$

$\det(M^{21}) = (-1)^{21} = -1 \Rightarrow \det(2M^{21}) = 2^3 \cdot (-1) = -8$ **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Cálculo do rango da matriz C dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 + m + 3m + 9 + 2 = 4m + 8$$

Polo tanto:

$m \neq -2 \Rightarrow rang(C) = 3$

$m = -2 \Rightarrow rang(C) = 2$ **(0,5 puntos)**

Cálculo do rango da matriz ampliada A (polo anterior xa podemos dicir que ten rango 3 se $m \neq 2$), para $m = 2$ temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 9 + 6 - 2 - 4 - 9 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$rang(A) = 3$ **(0,5 puntos)**

Discusión do sistema:

$m = -2 \Rightarrow rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible, non ten solución. **(0,5 puntos)**

$m \neq -2 \Rightarrow rang(C) = 3 = rang(A) = n^o incógnitas$. Sistema compatible determinado, solución única. **(0,5 puntos)**

b) $\boxed{m = 0}$ Estamos no caso de sistema compatible determinado, solución única. Resolvémolo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{8} = 5/8; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{8} = 3/4;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{8} = 3/8$$ **(1 punto)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Poñendo $z = \lambda$, obtemos as ecuacións paramétricas da recta r:

$$\begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Polo tanto, $\vec{v} = (1/2, -1, 1)$= vector director da recta r = vector normal aos planos perpendiculares a r.

Entón o plano π perpendicular a r pasando polo punto $P(1,1,2)$ será:

$1/2(x-1) - (y-1) + (z-2) = 0$; é dicir

$\pi : x - 2y + 2z - 3 = 0$ **(1 punto)**

e a distancia da orixe $O(0,0,0)$ ao plano π será:

$$d(O, \pi) = \frac{|-3|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$$ **(0,5 puntos)**

b) Intersecando o plano cos eixes de coordenadas obtemos as coordenadas dos vértices do triángulo:

A(3,0,0); B(0,-3/2,0); C(0,0,3/2) **(0,5 puntos)**

Polo tanto $\overrightarrow{AB} = (-3, -3/2, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3/2)$;

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3/2 & 0 \\ -3 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j} - \frac{9}{2}\vec{k}$$

$$\text{Área } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81}{16} + \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = 27/8\, u^2$$

(0,5 puntos)

Ademais, como os produtos escalares

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Non hai dous lados perpendiculares}$$

e polo tanto o triángulo non é rectángulo. **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Das ecuacións paramétricas do plano π_2 dedúcese que un punto deste plano é (3,0,1) e dous vectores do plano son (2,2,1) e (2,-2,-3). Podemos entón obter a ecuación xeral deste plano:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \;;\; -4(x-3) + 8y - 8(z-1) = 0;$$

$\pi_2 : x - 2y + 2z - 5 = 0$

Polo tanto, comparando os coeficientes das ecuacións xerais dos dous planos, temos:

$$\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} \neq \frac{-5}{-1} \Rightarrow$$ Os planos son paralelos e distintos. **(1 punto)**

A distancia entre π_1 e π_2 será

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|-5-(-1)|}{\sqrt{1+4+4}} = 4/3$$ **(0,5 puntos)**

b) Para obter as ecuacións paramétricas da recta r perpendicular a π_2 pasando por $P(2,1,7)$, basta ter en conta que o vector (1,-2,2) normal a π_2 é un vector director de r. Polo tanto:

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 7+2\lambda \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

Substituindo na ecuación de π_2, calculamos a intersección de r con π_2

$2 + \lambda - 2(1-2\lambda) + 2(7+2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

e así, o punto de intersección de r con π_2 é $M(1,3,5)$ **(0,5 puntos)**

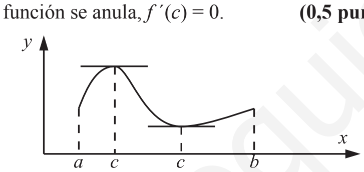
Como $M(1,3,5)$ é o punto medio de $P(2,1,7)$ e o seu simétrico $P'(x,y,z)$, entón

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{x+2}{2} \\ 3 &= \frac{y+1}{2} \\ 5 &= \frac{z+7}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{P}'(0,5,3)$$ **(0,5 puntos)**

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1.

a) Teorema de Rolle: sexa $f(x)$ unha función continua en [a,b], derivable en (a,b) e con $f(a) = f(b)$. Entón, existe algún punto $c \in (a,b)$ no que a derivada da función se anula, $f'(c) = 0$. **(0,5 puntos)**



Interpretación xeométrica:

Baixo as hipóteses do teorema de Rolle, podemos garantir a existencia de polo menos un punto c en (a,b) tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(c,f(c))$ é paralela ao eixe OX. **(0,5 puntos)**

b) $f(x) = e^x(2x-1)$

$f'(x) = e^x(2x-1) + 2e^x = e^x(2x+1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$ (a función exponencial non se anula en ningún punto)

Estudamos o signo de $f'(x)$ nos intervalos $(-\infty,-1/2)$ e $(-1/2,\infty)$: **(1 punto)**

$x \in (-\infty,-1/2) \Rightarrow f'(x) < 0$. A función é decrecente neste intervalo.

$x \in (-1/2,-\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$. A función é crecente neste intervalo.

x	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,-\infty)$
$f'(x)$	<0	>0
$f(x)$	decrecente	crecente

A ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(0, f(0))$ está dada por: $y - f(0) = f'(0)(x-0)$. Entón, como $f(0) = -1$, e $f'(0) = 1$, a ecuación da recta tanxente pedida é: $y = x + 1$ **(0,5 puntos)**

c) Calculamos a integral indefinida polo método de integración por partes:

$\int e^x(2x-1)dx = e^x(2x-1) - \int 2e^x dx = e^x(2x-3) + C$

$u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ **(1 punto)**

e aplicando a regra de Barrow

$\int_0^1 e^x(2x-1)dx = [e^x(2x-3)]_0^1 = e(-1) - (-3) = 3 - e$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = c \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ &f(0) = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = 0,$$ para que sexa continua en $x = 0$ **(0,5 puntos)**

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^2+bx}{x} = b \\ f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\ln(1+x^2)}{x} = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{1+x^2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{b=1},$$

para que sexa derivable en $x = 0$ **(0,5 puntos)**

Finalmente, analizamos a condición de extremo relativo:

$$\left.\begin{aligned} &f'(x) = 2ax+1, \text{ se x<0} \\ &f'(-2) = -4a+1 \\ &f'(-2) = 0, \text{ por ser un extremo relativo} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{a} = 1/4$$

(0,5 puntos)

b) $g(x) = x^2 - x$ é continua no intervalo pechado [0,2] xa que é unha función polinómica. Polo teorema de Weierstrass, $g(x)$ alcanza en [0,2]o máximo e o mínimo absolutos. **(0,5 puntos)**

$$\left.\begin{aligned} &g'(x) = 2x-1 \\ &g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ &g''(x) = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{mínimo relativo en } \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$$

Como nos extremos do intervalo $g(0)=0$; $g(2)=2$ entón, $g(x)$ alcanza o mínimo absoluto en $x = 1/2$

(0,5 puntos)

e alcanza o máximo absoluto en $x = 2$. **(0,5 puntos)**

c) Dada unha función $f(x)$, dise que a función $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ **(0,5 puntos)**

Regra de Barrow: Se $f(x)$ é unha función continua en $[a,b]$ e $F(x)$ é unha primitiva de $f(x)$, entón cúmprese que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. **(0,5 puntos)**

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Sexan F_1, F_2, F_3 as filas primeira, segunda e terceira, respectivamente, dunha matriz cadrada M de orde 3, con $\det(M) = -2$. Calcula o valor do determinante da matriz que ten por filas $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$.

b) Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, acha dúas matrices X e Y que verifican:

$$X + Y^{-1} = C$$
$$X - Y^{-1} = C^t$$

sendo C^t a matriz trasposta de C.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & my & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

b) Resólveo, se é posible, no caso $m = 2$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Os puntos $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$ e $C(-1,0,1)$ son vértices consecutivos dun paralelogramo $ABCD$. Calcula as coordenadas do vértice D e a área do paralelogramo.

b) Calcula a ecuación do plano que pasa polo punto $B(0,1,1)$ e é perpendicular á recta que pasa polos puntos $A(1,1,0)$ e $C(-1,0,1)$.

Opción 2. Dadas as rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$; $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{2}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) Calcula a ecuación do plano que contén as dúas rectas.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Dada a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

calcula a para que $f(x)$ sexa continua en $x = 2$. Para o valor obtido de a, ¿é $f(x)$ derivable en $x = 2$?

b) Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula os valores de a, b, c para que $g(x)$ teña no punto $(1, -1)$ un mínimo relativo e a recta tanxente á gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sexa paralela á recta $y = 4x$.

c) Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral. Dada a función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿ten $F(x)$ puntos de inflexión? Xustifica a resposta.

Opción 2. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Rolle.

b) Dada $f(x) = x^3 - 9x$, calcula para $f(x)$: puntos de corte cos eixes, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos, intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión.

c) Calcula a área da rexión do plano limitada polo eixe OX e a curva $y = x^3 - 9x$.

CiUG — COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)**	**Código: 21**
	SETEMBRO 2007	

MATEMÁTICAS

(Responder só a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Estuda, segundo os valores de m, o rango de A

b) Para $m = -1$, calcula a matriz X que verifica $X \cdot A + A = 2I$, sendo I a matriz unidade de orde 3.

Opción 2. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{aligned} x + my + mz &= 1 \\ x + my + mz &= m \\ my + mz &= 4m \end{aligned}$$

b) Resólveo, se é posible, no caso $m = 1$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Calcula m para que os puntos $A(2,1,-2)$, $B(1,1,1)$ e $C(0,1,m)$ estean aliñados.

b) Calcula o punto simétrico do punto $P(-2,0,0)$ respecto da recta que pasa polos puntos $A(2,1,-2)$ e $B(1,1,1)$.

Opción 2. Dadas as rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$; $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa .

b) Calcula a ecuación do plano que contén á recta r e é paralelo á recta s.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{e^x\, senx - x}{2x^2 + x^4}$.

b) Calcula os vértices e a área do rectángulo de área máxima que se pode construír de modo que a súa base estea sobre o eixe OX e os vértices do lado oposto estean sobre a parábola $y = -x^2 + 12$.

c) Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $F(x) = \int_0^x \left[2 + cos(t^2)\right] dt$, no punto de abscisa x=0.

Opción 2. a) Enunciado do teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que a gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta ao eixe OX nalgún punto do intervalo (1, 2)?

b) Dada a función $g(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \le -\sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & se \quad x > -\sqrt{2} \end{cases}$

¿É $g(x)$ continua en $x = -\sqrt{2}$? ¿É derivable en $x = -\sqrt{2}$?

c) Calcula a área da rexión do plano limitada polas gráficas de $g(x)$ e $h(x) = |x|$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álxebra lineal) **(3 puntos)**

OPCIÓN 1:

a) 1 punto

b) 2 puntos, distribuídos en

Cálculo de X (0,5 puntos)

Cálculo de Y (1,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos

b) 1 punto

Bloque 2 (Xeometría) **(3 puntos)**

OPCIÓN 1:

a) 2 puntos, distribuídos en

Cálculo do vértice D (1 punto)

Cálculo da área (1 punto)

b) 1 punto

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos

b) 1 punto

Bloque 3 (Análise) **(4 puntos)**

OPCIÓN 1:

a) 1 punto, distribuído en

Cálculo de **a** para que a función sexa continua en x = 2 (0,5 puntos)

Estudo da derivabilidade en x = 2 (0,5 puntos)

b) 1,5 puntos

c) 1,5 puntos, distribuídos en

Enunciado do teorema fundamental do cálculo integral (1 punto)

Punto de inflexión (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuído en

Enunciado do teorema de Rolle (0,5 puntos)

Interpretación xeométrica do teorema de Rolle (0,5 puntos)

b) 2 puntos, distribuídos en

Puntos de corte cos eixes (0,25 puntos)

Intervalos de crecemento e decrecemento (0,75 puntos)

Máximos e mínimos relativos (0,25 puntos)

Intervalos de concavidade e convexidade (0,5 puntos)

Punto de inflexión (0,25 puntos)

c) 1 punto

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) **(3 puntos)**

Opción 1.

a) 1,5 puntos

b) 1,5 puntos

Opción 2.

a) 2 puntos

b) 1 punto

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) **(3 puntos)**

Opción 1.

a) 1 punto

b) 2 puntos

Opción 2.

a) 1,5 puntos

b) 1,5 puntos

BLOQUE 3 (ANÁLISE) **(4 puntos)**

Opción 1.

a) 1 punto

b) 2 puntos

c) 1 punto

Opción 2.

a) 1 punto

b) 1 punto

c) 2 punto

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Sabemos que $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2$. Entón, polas propiedades dos determinantes, temos que

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_2 \\ 2F_1 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -4$$

(1 punto)

b) Sumando membro a membro as dúas ecuacións obtemos $2X = C + C^t$. Polo tanto:

$$X = \frac{1}{2}(C + C^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,5 puntos)

Da primeira ecuación obtemos:

$$Y^{-1} = C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ ½ & 0 \end{pmatrix}$$

e tendo en conta que $Y = (Y^{-1})^{-1}$, só nos resta o cálculo da matriz inversa de Y^{-1}. Así:

$$Y = \frac{1}{\det(Y^{-1})}\,(Adj(Y^{-1}))^t = 4\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes Matriz ampliada

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo do rango de C: **(0,5 puntos)**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$|C| = -m^2 + 3m - 2$; $|C| = 0 \Leftrightarrow m = 1$, ou $m = 2$

Polo tanto: $rang(C) = 2$, se $m = 1$ ou $m = 2$

$rang(C) = 3$, nos demais casos.

Cálculo do rango de A: **(0,5 puntos)**

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - m$$

Polo tanto: $rang(A) = 2$, se $m = 2$

$rang(C) = 3$, se $m \neq 2$.

Discusión: **(1 punto)**

Se $m = 1$, $rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$. Sistema incompatible. Non ten solución.

Se $m = 2$, $rang(C) = 2 = rang(A) <$ *nº incógnitas*. Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.

Se $m \neq 1$ e $m \neq 2$, $rang(C) = 3 = rang(A) =$ *nº incógnitas*. Sistema compatible determinado. Solución única.

b) Segundo vimos no apartado anterior, estamos no caso dun sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. Neste caso, un sistema equivalente ao dado é:

$$\begin{aligned} x - z &= 1 + 2y \\ 2x + z &= -y \end{aligned}$$

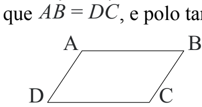
e as infinitas solucións serán:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}; \\ y = t; & t \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}; \end{cases}$$

(1 punto)

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Se ABCD é un paralelogramo, cumprirase que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, e polo tanto, se $D(x, y, z)$



(-1,0,1)=(-1-x,-y,1-z)

Obtendo así que o vértice D é a orixe de coordenadas, $D(0,0,0)$. **(1 punto)**

A área do paralelogramo vén dada polo módulo do vector $\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA}$. Entón:

$$\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1);$$

$$Área = \sqrt{(-1)^2 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3}\,u^2$$ **(1 punto)**

b) Un vector normal ao plano pedido é $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1) - (1,1,0) = (-2,-1,1)$. Como o plano pasa polo punto $B(0,1,1)$, podemos escribir a ecuación xeral do plano

$$-2(x - 0) - (y - 1) + (z - 1) = 0$$

é dicir, $2x + y - z = 0$ **(1 punto)**

Opción 2.

a) Vector director da recta r : $\vec{v_r} = (0,1,2)$. Vector director da recta s : $\vec{v_s} = (1,2,2)$.

Un punto da recta r : $P_r = (1,2,2)$. Un punto da recta

$s : Q_s = (0,-1,-2)$

Polo tanto, $\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-1,-2) - (1,2,2) = (-1,-3,-4)$.

Consideramos as matrices $M = \begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

$$N = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rQ_s} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 2$. Xa podemos dicir que as rectas se cortan ou cruzan. Para decidir entre estas dúas posibilidades, recorremos ao rango da matriz N, e como

$$|N| = -2 - 6 + 4 + 4 = 0 \Rightarrow rang(N) = 2$$

as rectas córtanse. **(2 puntos)**

b) Como son dúas rectas secantes, o plano que as contén queda determinado por un punto dunha recta, por exemplo P_r, que será un punto do plano e polos vectores directores das rectas, é dicir $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$, que serán dous vectores contidos no plano. Así, a ecuación do plano será:

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; é dicir: $2x-2y+z=0$ **(1 punto)**

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1.

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2+1) = 4a+1$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (e^{2-x}+2) = 3$; $\quad f(2) = 3$

Polo tanto, para que a función sexa continua en $x = 2$ ten que cumprirse $4a+1 = 3$. Así, a función é continua para $a = 1/2$. **(0,5 puntos)**

Calculamos as derivadas laterais:

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{1/2x^2 - 2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2}(x+2) = 2$;

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{e^{2-x} - 1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} e^{2-x} = -1$

Polo tanto, a función non é derivable en $x = 2$.
(0,5 puntos)

b) $g(x) = ax^4 + bx + c$; $g'(x) = 4ax^3 + b$

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1 \\ g'(1) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \\ g'(0) = 4 \Rightarrow b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1;\ b = 4;\ c = -4$$

(1,5 puntos)

c) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en [a,b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e a súa derivada é $F'(x) = f(x)$. **(1 punto)**

$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \Rightarrow F'(x) = e^{-x^2} \Rightarrow F''(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow F'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

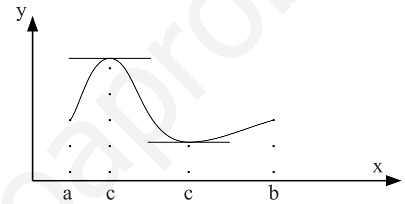
$$\left.\begin{array}{l} F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ F'''(0) = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \text{En } x=0, \text{ hai un punto de inflexión.}$$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a) Teorema de Rolle: sexa $f(x)$ unha función continua en [a,b], derivable en (a,b) e con $f(a) = f(b)$. Entón, existe algún punto $c \in (a,b)$ no que a derivada da función se anula, $f'(c) = 0$. **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica:



Baixo as hipóteses do teorema de Rolle, podemos garanti-la existencia de polo menos un punto c en (a,b) tal que a recta tanxente á gráfica de $f(x)$ en $(c,f(c))$ é paralela ao eixe OX. **(0,5 puntos)**

b) $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x(x^2-9) = 0 \end{array}\right\} \text{Puntos de corte cos eixes:}$$

(0,0); (-3,0); (3,0) **(0,25 puntos)**

$f'(x) = 3x^2 - 9$; $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$f''(x) = 6x$; $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(-\sqrt{3}) < 0$; $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$. Máximo relativo no punto $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

$f''(\sqrt{3}) > 0$; $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. Mínimo relativo no punto $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ **(0,25 puntos)**

$f'''(x) = 6$; $f'''(0) \neq 0$; $f(0) = 0$. Punto de inflexión no punto (0,0) **(0,25 puntos)**

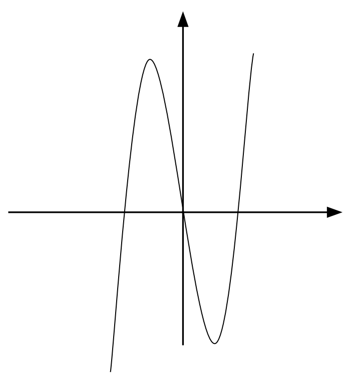
Crecemento e decrecemento:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	crecente	decrecente	crecente

(0,75 puntos)

Concavidade e convexidade: **(0,5 puntos)**

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava	convexa



c) Os resultado obtidos no apartado b) permítennos debuxa-la rexión do plano da que queremos calcula-la área

$$Área = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0} = -2\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) = \frac{81}{2}u^2$$

(1 punto)

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)
(Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2$; $|A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Temos así:
$m \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$
$m = 0 \Rightarrow rang(A) = 1$ (A ten dúas filas de ceros)
(1,5 puntos)
b) Por a), se $m = -1$, $|A| = 1 \neq 0$ e existe a inversa da matriz A. Ademais, para este valor de m

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = I \text{ e polo tanto, } A = A^{-1}$$

Entón

$$XA + A = 2I \Leftrightarrow X = (2I - A)A^{-1} = 2A - I\,;$$

$$X = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1,5 puntos)

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes Matriz ampliada

$$C = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m & m \\ 0 & m & m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 0 & m & m & 4m \end{pmatrix}$$

Cálculo do rango de C:
1ª fila = 2ª fila. Eliminámo-la 2ª fila.
2ª columna = 3ª columna. Eliminámo-la 3ª columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m \end{vmatrix} = m$$

Polo tanto:
$m = 0 \Rightarrow rang(C) = 1$
$m \neq 0 \Rightarrow rang(C) = 2$
Cálculo do rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \\ 0 & m & 4m \end{vmatrix} = 4m^2 + m - m^2 - 4m^2 = m(1 - m)$$

Se $m = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Se $m = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Polo tanto:
Se $m = 0$, $rang(A) = 2$
Se $m = 1$, $rang(A) = 2$
Nos demais casos, $rang(A) = 3$
Discusión:
Se $m = 0$, $rang(C) = 1 < 2 = rang(A)$.
Sistema incompatible. Non ten solución.
Se $m = 1$, $rang(C) = 2 = rang(A) <$ *nº incógnitas*.
Sistema compatible indeterminado. Infinitas solucións.
Se $m \neq 0$ e $m \neq 1$, $rang(C) = 2 < 3 = rang(A)$.
Sistema incompatible. Non ten solución. **(2 puntos)**
b) Para $m = 1$, temos un sistema compatible indeterminado. Un sistema equivalente ao dado é

$$x + y + z = 1$$
$$y + z = 4$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, temos: $x = -3$, $y = 4 - z$. As infinitas solucións serán

$$\begin{cases} x = -3\,; \\ y = 4 - t\,; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t\,; \end{cases}$$

(1 punto)

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Calculámo-la recta r que pasa polos puntos $A(2,1,-2)$ e $B(1,1,1)$. Vector director da recta: $\overrightarrow{AB} = (-1,0,3)$. Punto de r: $A(2,1,-2)$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Vector director da recta } r\text{: } \overrightarrow{AB} = (-1,0,3) \\ \text{Punto de } r \ \ A(2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

Para que os puntos estean aliñados, C debe pertencer á recta r. Polo tanto

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 2 - \lambda \\ 1 = 1 \\ m = -2 + 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

(1 punto)

b) Calculámo-lo plano π perpendicular á recta r, polo tanto o vector $\overrightarrow{AB}$ é un vector perpendicular ao plano, pasando polo punto $P(-2,0,0)$:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB} \perp \pi \Rightarrow -x + 3z + D = 0 \\ P \in \pi \end{array}\right\} D = -2; \quad \pi: x - 3z + 2 = 0$$

Calculámo-lo punto $M(2-\lambda, 1, -2+3\lambda)$ intersección da recta r co plano π:

$$2 - \lambda - 3(-2+3\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \quad M = (1,1,1)$$

Se $P'(x,y,z)$ é o simétrico de $P(-2,0,0)$, como $M = (1,1,1)$ é o punto medio de $\overline{PP'}$, temos que

$$\frac{x-2}{2} = 1; \qquad \frac{y}{2} = 1; \qquad \frac{z}{2} = 1$$

e así, $\boxed{P'(4,2,2)}$ **(2 puntos)**

Opción 2. a) Das ecuacións das rectas podemos obtelos seus vectores directores:

$$\vec{v_r} = (1,-1,-3)$$
$$\vec{v_s} = (1,2,1)$$

e estudando o rango da matriz formada polas compoñentes destes vectores $rang(M) = rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$, xa podemos dicir que as rectas se cortan ou cruzan.

Para decidirmos entre estas dúas posibilidades, consideramos agora un punto en cada unha das rectas

$$P_r(0,1,2) \in r; \quad Q_s(1,3,1) \in s; \quad \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,2,-1)$$

e a matriz

$$N = \begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rQ_s} \\ \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|N| = -1 -2 -6 -1 +6 -2 = -6 \neq 0 \Rightarrow rang(N) = 3$ podemos concluír que as rectas se cruzan. **(1,5 puntos)**

b) O plano está determinado polo punto P_r e os vectores $\vec{v_r}$ e $\vec{v_s}$. Polo tanto, a ecuación do plano será

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ 5x - 4y + 3z - 2 = 0$$

(1,5 puntos)

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1.

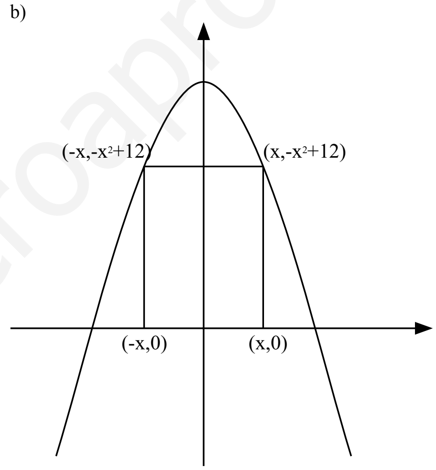
a) É unha indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$ e aplicamos a regra de L´Hôpital dúas veces

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\, senx - x}{2x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\, senx + e^x\, cosx - 1}{4x + 4x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x\,(senx + cosx) + e^x\,(cosx - senx)}{4 + 12x^2} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

(1 punto)

b)



O vértice da parábola é o punto V(0,12). A función a maximizar, área do rectángulo, é

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$$ **(1 punto)**

Determinamo-lo máximo:

$A'(x) = -6x^2 + 24$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$A''(x) = -12x; \qquad A''(2) = -24 < 0$

Polo tanto,

$A(x)$ alcanza o máximo para $x = 2$. **(0,5 puntos)**

Vértices (-2,8),(2,8),(2,0),(-2,0) **(0,25 puntos)**

Área: $A(2) = 32\ u^2$ **(0,25 puntos)**

c) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é unha función continua en [a,b], a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e a súa derivada é $F'(x) = f(x)$. **(0,5 puntos)**

Ecuación da recta tanxente á gráfica de $F(x)$ no punto de abscisa $x = 0$:

$$y - F(0) = F'(0)(x-0).$$

$F(0) = \int_0^0 [2+cos(t^2)]dt$=0, e polo teorema fundamental do cálculo integral $F'(x) = 2 + cos(x^2) \Rightarrow F'(0) = 3$

Polo tanto, a ecuación da recta tanxente é: $y = 3x$

(0,5 puntos)

<u>Opción 2</u>.

a) Teorema de Bolzano: se $f(x)$ é continua en [a,b] e toma valores de signo contrario nos extremos do intervalo, é dicir $f(a)\cdot f(b) < 0$, entón existe algún punto $c \in (a,b)$ onde a función se anula, é dicir $f(c) = 0$.

(0,5 puntos)

A función $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ é continua en $\mathbb{R}$ e polo tanto en [1,2], por ser polinómica.

$f(1) = -1 < 0$; $\quad f(2) = 60 > 0$

Entón, polo teorema de Bolzano, existe polo menos un punto $c \in (1,2)$ no que a función se anula, é dicir $f(c) = 0$

(0,5 puntos)

b)
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to -\sqrt{2}^-} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{2}^+} g(x) = 0 \\ g(-\sqrt{2}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sqrt{2}} g(x) = g(-\sqrt{2}).$$

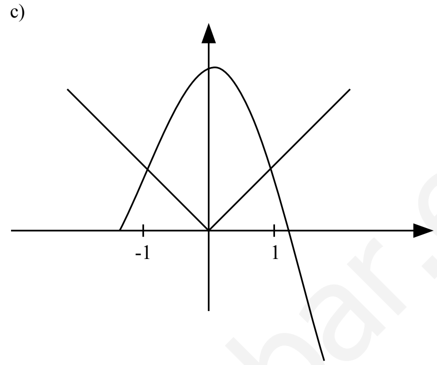
Polo tanto, $g(x)$ é continua en $x = -\sqrt{2}$. **(0,5 puntos)**

$$g'(-\sqrt{2}^-) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{0}{x+\sqrt{2}} = 0$$

$$g'(-\sqrt{2}^+) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{-x^2+2}{x+\sqrt{2}} = \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{(-x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Dado que $g'(-\sqrt{2}^-) \neq g'(-\sqrt{2}^+)$, temos que $g(x)$ non é derivable en $x = -\sqrt{2}$. **(0,5 puntos)**

c)



$$h(x) = \begin{cases} -x & se \quad x \le 0 \\ x & se \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Calculámo-los puntos de corte de $g(x)$ con $h(x)$

$$-x = -x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \cancel{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = -x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\cancel{2} \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{0}(-x^2+2+x)dx + \int_0^1(-x^2+2-x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}$$

$$+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1 = \frac{7}{3}u^2$$

(2 puntos)

MATEMÁTICAS

(Responder soamente a unha das opcións de cada bloque temático).

<u>BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)</u> *(Puntuación máxima 3 puntos)*

<u>Opción 1</u>. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula os valores do parámetro m para os que A ten inversa.

b) Para $m = 0$, calcula A^3 e A^{25}.

c) Para $m = 0$, calcula a matriz X que verifica $X \cdot A = B$, sendo $B = (0\ \ -1\ \ -1)$

<u>Opción 2</u>. a) Discute e interpreta xeometricamente, segundo os valores do parámetro m, o sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & m \\ mx & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

b) Resólveo, se é posible, para os casos $m = 0$ e $m = 2$.

<u>BLOQUE 2 (XEOMETRÍA)</u> *(Puntuación máxima 3 puntos)*

<u>Opción 1</u>. a) Definición e interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores en $\mathbb{R}^3$.

b) Calcula os vectores unitarios e perpendiculares ós vectores $\vec{u} = (1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

c) Calcula a distancia da orixe de coordenadas ó plano determinado polo punto (1,1,1) e os vectores $\vec{u} = (1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$.

<u>Opción 2</u>. Dado o plano π: $2x + \lambda y + 3 = 0$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Calcula o valor de λ para que a recta r e o plano π sexan paralelos. Para ese valor de λ, calcula a distancia entre r e π.

b) ¿Para algún valor de λ , a recta está contida no plano π? Xustifica a resposta.

c) ¿Para algún valor de λ , a recta e o plano π son perpendiculares? Xustifica a resposta.

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>. a) Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ no punto de corte de $f(x)$ co eixo OX.

b) Calcula, para $f(x) = (x + 1)e^{-x}$: intervalos de crecemento e decrecemento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidade e convexidade.

c) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral.

<u>Opción 2</u>. a) Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial.

b) De entre tódolos triángulos rectángulos con hipotenusa 10cm., calcula as lonxitudes dos catetos que corresponden ó de área máxima

c) Calcula o valor de m, para que a área do recinto limitado pola recta $y = mx$ e a curva $y = x^3$, sexa 2 unidades cadradas.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE) SETEMBRO 2006	Código: 21

MATEMÁTICAS

(Responder somente a unha das opcións de cada bloque temático).

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Sexan A, B e C tres matrices tales que o produto $A{\cdot}B{\cdot}C$ é unha matriz 3x2 e o produto $A{\cdot}C^t$ é unha matriz cadrada, sendo C^t a trasposta de C. Calcula, razoando a resposta, as dimensións de A, B e C.

b) Dada $M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, obtén todas as matrices X que conmutan con M, é dicir, verifican $X.M = M.X$.

c) Calcula a matriz Y que verifica $M{\cdot}Y + M^{-1}{\cdot}Y = I$, sendo a matriz dada en b), M^{-1} a matriz inversa de M e I a matriz unidade de orde 2.

Opción 2. a) Se nun sistema de tres ecuacións lineais con tres incógnitas, o rango da matriz dos coeficientes é 3, ¿podemos afirmar que o sistema é compatible? Razoa a resposta.

b) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{array}{rcl} y + mz &=& 0\\ x + z &=& 0\\ mx - y &=& m\end{array}$$

c) Resolve o sistema anterior para o caso $m = 0$.

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1. a) Dados os vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, calcula os vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonais ós dous vectores dados.

b) Sexa π o plano determinado polo punto $P(2, 2, 2)$ e os vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(1,1,0)$. Calcula o ángulo que forma o plano π coa recta que pasa polos puntos $O(0, 0, 0)$ e $Q(2, -2, 2)$.

c) Calcula o punto simétrico de $O(0, 0, 0)$ respecto do plano $x - y + z - 2 = 0$.

Opción 2. Os lados dun triángulo están sobre as rectas

$$r_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}\ ; \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t\\ y = 2 + t\\ z = -1\end{cases} ; \qquad r_3 : \begin{cases} x - y - z - 1 = 0\\ x - z = 0\end{cases}$$

a) Calcula os vértices do triángulo. ¿É un triángulo rectángulo? Razoa a resposta

b) Calcula a ecuación do plano π que contén ó triángulo. Calcula a intersección do plano π cos eixes OX, OY e OZ.

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1. a) Calcula os valores de a e b para que a gráfica de $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ teña un mínimo relativo no punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, Para eses valores de a e b, calcula: asíntotas e intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x)$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\ e^x}{\cos^2 x-1}$

c) Definición de primitiva e integral indefinida dunha función. Enunciado da regra de Barrow.

Opción 2. a) Definición de función continua nun punto. ¿Que tipo de descontinuidade ten en x = 0 a función $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$?

b) Un arame de 170 cm. de lonxitude divídese en dúas partes. Con unha das partes quérese formar un cadrado e coa outra un rectángulo de xeito que a base mida o dobre da altura. Calcula as lonxitudes das partes nas que se ten que dividir o arame para que a suma das áreas do cadrado e do rectángulo sexa mínima

c) Calcula a área do recinto limitado pola recta $y = 2 - x$; e a curva $y = x^2$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto
b) 1 punto, distribuido en
Cálculo de A^3 (0,5 puntos)
Cálculo de A^{25} (0,5 puntos)
c) 1 punto

OPCIÓN 2:

a) 2 puntos, distribuidos en
Discusión (1 punto)
Interpretación xeométrica (1 punto)
b) 1 punto, distribuido en
Resolución no caso m = 0 (0,50 puntos)
Resolución no caso m = 2 (0,50 puntos)

Bloque 2 (Xeometría)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto, distribuido en
Definición do producto vectorial de dous vectores (0,5 puntos)
Interpretación xeométrica do producto vectorial de dous vectores (0,5 puntos)
b) 1 punto.
c) 1 punto, distribuido en
Determinación do plano (0,5 puntos)
Cálculo da distancia (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 1,5 puntos, distribuidos en
Determinación de λ. (0,75 puntos)
Cálculo da distancia (0,75 puntos)
b) 0,75 puntos
c) 0,75 puntos

Bloque 3 (Análise)

OPCIÓN 1:

a) 1 punto, distribuido en
Cálculo do punto de corte co eixo OX (0,25 puntos)
Cálculo da derivada (0,25 puntos)
Ecuación da recta tanxente (0,5 puntos)
b) 2 puntos, distribuidos en
Intervalos de crecemento e decrecemento (0,5 puntos)
Extremos relativos (0,5 puntos)
Puntos de inflexión (0,5 puntos)
Concavidade e convexidade (0,5 puntos)
c) 1 punto, distribuido en
Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral (0,5 puntos)
Interpretación xeométrica do teorema (0,5 puntos)

OPCIÓN 2:

a) 1 punto, distribuido en
Enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial (0,5 puntos)
Interpretación xeométrica do teorema (0,5 puntos)
b) 1,5 puntos, distribuidos en
Formulación do problema (0,5 puntos)
Obtención dos catetos (1 punto)
c) 1,5 puntos, distribuidos en
Formulación do problema (0,75 puntos)
Cálculo da integral e obtención de m (0,75 puntos)

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

Soamente se puntuará a primeira pregunta respondida de cada un dos tres bloques.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

Opción 1:

a) 1 punto, distribuido en
Dimensión de A (0,5 puntos)
Dimensión de B (0,25 puntos)
Dimensión de C (0,25 puntos)
b) 1 punto, distribuido en
Formulación das ecuacións (0,5 puntos)
Solución (0,5 puntos)
c) 1 punto, distribuido en
Cálculo de M^{-1} (0,5 puntos)
Cálculo de Y (0,5 puntos)

Opción 2:

a) 1 punto
b) 1 punto, distribuido en
Sistema incompatible (0,5 puntos)
Sistema compatible indeterminado (0,5 puntos)
c) 1 punto

Bloque 2 (Xeometría)

Opción 1:

a) 1 punto, distribuido en
Cálculo álculo de $\vec{u} \times \vec{v}$ (0,25 puntos)
Cálculo de $|\vec{u} \times \vec{v}|$ (0,25 puntos)
Por cada solución (0,25 puntos)
b) 1 punto, distribuido en
Vector asociado ó plano (0,25 puntos)
Vector director da recta (0,25 puntos)
Cálculo do ángulo (0,5 puntos)
c) 1 punto

Opción 2:

a) 1,5 puntos, distribuidos en
Cálculo dos vértices (1 punto)
Triángulo rectángulo (0,5 puntos)
b) 1,5 puntos, distribuidos en
Obtención do plano (1 punto)
Intersección cos eixos (0,5 puntos)

Bloque 3 (Análise)

Opción 1:

a) 2 puntos, distribuidos en
Cálculo de a e b (0,5 puntos)
Asíntotas (0,75 puntos)
Intervalos de crecemento e decrecemento (0,75 puntos)
b) 1 punto
c) 1 punto, distribuido en
Definición de primitiva (0,25 puntos)
Definición de integral indefinida (0,25 puntos)
Regla de Barrow (0,5 puntos)

Opción 2:

a) 1 punto, distribuido en
Definición de función continua nun punto (0,5 puntos)
Tipo de discontinuidade (0,5 puntos)
b) 1,5 puntos, distribuidos en
Expresión a minimizar (0,75 puntos)
Cálculo da lonxitude das dúas partes nas que se divide o arame (0,5 puntos)
Comprobación de mínimo (0,25 puntos)
c) 1,5 puntos, distribuidos en
Formulación do problema (0,75 puntos)
Determinación dos límites de integración (0,25 puntos)
Cálculo da integral (0,5 punto)

CONVOCATORIA DE XUÑO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL)
(Puntuación máxima 3 puntos)

Opción 1.

a) $|A| = m^2 - 1$. Polo tanto $|A| = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Así, A ten inversa $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$. **(1 punto)**

b) Se m = 0, utilizando as propiedades do produto de matrices $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = -I$; **(0,5 puntos)**

$A^{25} = (-I)^8 \cdot A = I \cdot A = A.$ **(0,5 puntos)**

c) Tendo en conta a), para m = 0, $\exists A^{-1}$ e ademais, por b), $A^{-1} = -A^2$. Polo tanto $X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$,
$X = (0\ -1\ -1) \cdot (-A^2) = (-1\ \ 0\ \ 1)$ **(1 punto)**

Opción 2.

a) Matriz de coeficientes : $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz ampliada : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & m \\ m & -1 & 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$

$|C| = m - 2$

$m \neq 2 \Rightarrow$ rang(C) = rang(A) =3

$m = 2$: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang(C) = 2;

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ rang(A) = 2

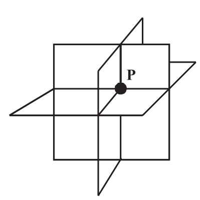
Discusión: **(1 punto)**

$m \neq 2$, rang(C) = rang(A) =3 = nº de incógnitas. Sistema compatible determinado (S.C.D.). Solución única.

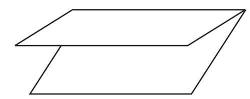
$m = 2$, rang(C) = rang(A) =2 < nº de incógnitas. Sistema compatible indeterminado (S.C.I.). Infinitas solucións. **(1punto)**

Interpretación xeométrica:

$m \neq 2$, tres planos que se cortan nun punto P



$m = 2$, dous planos coincidentes (o 1º e o 3º) que se cortan co outro plano ó longo dunha recta



b) Se m=0, estamos no caso dun S.C.D. e como é un sistema homoxéneo, a solución única é a trivial:
$x = 0;\ \ y = 0;\ \ z = 0;$ **(0,5 puntos)**

Se m= 2, estamos no caso dun S.C.I.

$\left\{\begin{matrix} -y + z = -2x \\ -2y + z = 2-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y - z = 2x \\ -2y + z = 2-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = -x - 2 \\ z = -3x - 2 \end{matrix}\right\}$

As infinitas solucións pódense expresar:

$\{x = \lambda,\ y = -\lambda - 2,\ z = -3\lambda - 2 \ /\ \lambda \in \mathbf{R}\}$; **(0,5 puntos)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Definición do produto vectorial de dous vectores en $\mathbf{R}^3$. **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do produto vectorial de dous vectores en $\mathbf{R}^3$. **(0,5 puntos)**

b) $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, 1, 2)$; $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3$

Os dous vectores unitarios e ortogonais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ son
$\vec{w}_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $\vec{w}_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ **(1 punto)**

c) A ecuación do plano será: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

é dicir $\pi : 2x - y - 2z + 1 = 0$ **(0,5 puntos)**

Utilizando a fórmula da distancia dun punto, neste caso $O = (0, 0, 0)$, a un plano temos:
$d(O, \pi) = 1/3$ **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Vector asociado ó plano π: $\vec{n}_\pi = (2, \lambda, 0)$

Vector director da recta $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;

$\vec{v}_r = (-6, -12, -15)$

Como $r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$, e $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$, temos que $r \parallel \pi \Leftrightarrow \lambda = -1$ **(0,75 puntos)**

Para $\lambda = -1$, temos o plano $\pi : 2x - y + 3 = 0$. Como

$r \parallel \pi$, podemos calcular a distancia de r a π como a distancia entre un punto calquera de r, por exemplo $P_r = (0, -2, 1)$, e o plano π. Polo tanto

$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ **(0,75 puntos)**

b) Vimos no apartado anterior que $r \parallel \pi \Leftrightarrow \lambda = -1$ e ademais, para este valor de λ, $d(r, \pi) = \sqrt{5}$. Polo tanto Non existe ningún valor de λ para o que a recta r estea contida no plano. **(0,75 puntos)**

c) $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi$, pero non existe λ que faga que os vectores $\vec{v}_r = (-6, -12, -15)$ e $\vec{n}_\pi = (2, \lambda, 0)$ sexan proporcionais. Polo tanto, non hai ningún valor de λ para o que r e π son perpendiculares. **(0,75 puntos)**

BLOQUE 3 (ANÁLISE) *(Puntuación máxima 4 puntos)*

Opción 1.

a) Punto de corte co eixo OX: (-1,0) **(0,25 puntos)**

$f'(x) = -xe^{-x}$; $f'(-1) = e$ **(0,25 puntos)**

Recta tanxente en (-1,0): $y = e\,(x+1)$ **(0, 5 puntos)**

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

A función é crecente en $(-\infty, 0)$ e decrecente en $(0, \infty)$ **(0,5 puntos)**

$f''(x) = e^{-x}(x-1)$; $f''(0) < 0$. Hai un máximo relativo no punto (0,1) **(0,5 puntos)**

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Cóncava en $(-\infty, 1)$ e convexa en $(1, \infty)$ **(0,5 puntos)**

$f'''(x) = e^{-x}(2-x)$; $f'''(1) \neq 0$. Hai un punto de inflexión no punto $(1, 2/e)$ **(0,5 puntos)**

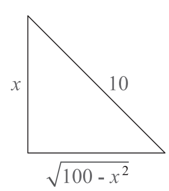
c) Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral. **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral. **(0,5 puntos)**

Opción 2.

a) Enunciado do teorema do valor medio do cálculo diferencial. **(0,5 puntos)**
Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo diferencial. **(0,5 puntos)**

b)



Función a optimizar:

$A(x) = \dfrac{1}{2}\, x\, \sqrt{100 - x^2}$, **(0,75 puntos)**

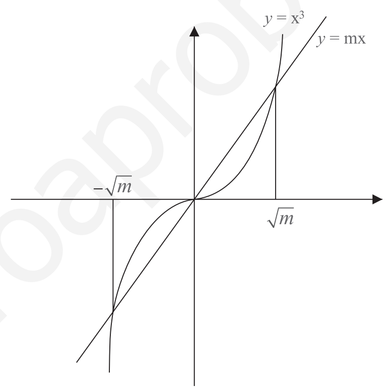
$A'(x) = \dfrac{100x - 2x^3}{\sqrt{100x^2 - x^4}}$ **(0,25 puntos)**

Puntos críticos: $x = 0$ (non vale), $x = -5\sqrt{2}$ (non vale), $x = 5\sqrt{2}$ **(0,25 puntos)**

Xustificación de que $5\sqrt{2}$ corresponde a un máximo: $A''(5\sqrt{2}) < 0$ **(0,25 puntos)**

Polo tanto, de entre tódolos triángulos rectángulos de hipotenusa 10cm, o que ten área máxima corresponde a un triángulo rectángulo isósceles de catetos $5\sqrt{2}$ cm.

c)



Abscisas dos puntos de corte das gráficas

$x^3 = mx \Leftrightarrow x = 0$; $x = \pm\sqrt{m}$

Como a área do recinto ten que ser 2 unidades cadradas

$2 = \int_{-\sqrt{m}}^{0} (x^3 - mx)dx + \int_{0}^{\sqrt{m}} (mx - x^3)dx$ **(0,75 puntos)**

Integrando

$$2 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2}\right]_{-\sqrt{m}}^{0} + \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{m}}$$

e así $m = \pm 2$, pero m = -2 non vale, polo tanto m = 2 **(0,75 puntos)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

BLOQUE 1 (ÁLXEBRA LINEAL) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) Da hipótese $A \cdot B \cdot C \in M_{3x2}$, dedúcese que $A \in M_{3xm}, B \in M_{mxn}, C \in M_{nx2}$. Polo tanto $C^t \in M_{2xn}$ e para que $\exists A \cdot C^t$, necesariamente $m = 2$ e $A \in M_{3x2}$.

(0,5 puntos)

Da hipótese $A \cdot C^t$ é unha matriz cadrada, dedúcese que $n = 3$ e polo tanto $B \in M_{2x3}$, $C \in M_{3x2}$,

(0,5 puntos)

b) Para que existan os produtos $X \cdot M$ e $M \cdot X$, X ten que ser unha matriz cadrada de orde 2. Da igualdade $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deducimos que $b = 0$, $a = d$ e polo tanto $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} / \ a, c \in \mathbf{R} \right\}$

(1 punto)

c) $|M| = 1$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, **(0,5 puntos)**

$M \cdot Y + M^{-1} \cdot Y = I \Leftrightarrow Y = (M + M^{-1})^{-1}$ e como $M + M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, obtemos que $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

(0,5 puntos)

Opción 2.

a) Se denotamos por C a matriz dos coeficientes e por A a matriz ampliada, temos que $C \in M_{3x3}$ e $A \in M_{3x4}$, polo que rang(A) ≤ 3. Ademais sabemos que sempre rang(C) $\leq$ rang(A), entón

$$\left. \begin{array}{r} 3 = \text{rang (C)} \leq \text{rang (A)} \\ \text{rang (A)} \leq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang(C)} = \text{rang (A)} = 3$$

Polo tanto, o sistema é compatible. Como o número de incógnitas tamén é 3, trátase dun sistema compatible determinado (S.C.D.). **(1 punto)**

b) Matriz dos coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

Matriz ampliada: $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ m & -1 & 0 & \cdot & m \end{pmatrix}$;

$$\left. \begin{array}{l} |A| = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow rang(C) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m \Rightarrow rang(A) = \begin{cases} 3 & se \quad m \neq 0 \\ 2 & se \quad m = 0 \end{cases}$$

Discusión: **(1 punto)**

Se $m \neq 0$, rang(C) = 2 < 3 = rang(A). Sistema incompatible. Non ten solución.

Se $m = 0$, rang(C) = 2 = rang(A) < nº incógnitas. Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.). Infinitas solucións

c) Se $m = 0$, é un sistema homoxéneo e vimos que era un (S.C.I.). Para obter as infinitas solucións

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Solucións} : \{(-\lambda, 0, \lambda) / \lambda \in \mathbf{R}\}$$ **(1 punto)**

BLOQUE 2 (XEOMETRÍA) *(Puntuación máxima 3 puntos)*

Opción 1.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)$ **(0,25 puntos)**

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}$ **(0,25 puntos)**

Entón, os dous vectores unitarios e ortogonais a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$ son: $w_1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$; $w_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} -\frac{\sqrt{3}}{3})$

(0,5 puntos)

b) Vector asociado ó plano: $\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 1)$.

(0,25 puntos)

Vector director da recta: $\vec{v}_r = \overline{OQ} = (2, -2, 2)$. **(0,25 puntos)**

Estes dous vectores son proporcionais e polo tanto a recta e plano son perpendiculares **(0,5 puntos)**

c) Ecuación da recta que pasa por O (0, 0, 0) e é perpendicular a π

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

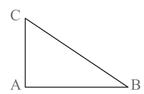
Punto de intersección de S con π: $P(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Este punto P é o punto medio de O e o seu simétrico O'. Polo tanto $O'(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. **(1 punto)**

Opción 2.

a) Calculamos as coordenadas dos vértices facendo a intersección das rectas $r_1 \cap r_2 : A\ (1, 1, -1)$

$r_2 \cap r_3 : B\ (-1, -1, -1)$ $\quad r_1 \cap r_3 : C\ (3, -1, 3)$



(1 punto)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 0)\\ \overrightarrow{AC} = (\ 2, -2, 4)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Polo tanto, o triángulo é rectángulo en A **(0,5 puntos)**

b) Podemos calcular o plano π como o plano determinado polo punto A e os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Así

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ é dicir } \pi : x - y - z - 1 = 0$$

(1 punto)

Intersección cos eixos OX, OY e OZ: $P(1, 0, 0)$, $Q(0, -1, 0)$ e $R(0, 0, -1)$ respectivamente. **(0,5 puntos)**

<u>BLOQUE 3 (ANÁLISE)</u> *(Puntuación máxima 4 puntos)*

<u>Opción 1</u>.

a) $f'(x) = a - \dfrac{b}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1/2) = 4 \Rightarrow a + 4b = 8 \\ f'(1/2) = 0 \Rightarrow a - 4b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4, b = 1 \text{ e temos así}$$

que $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ **(0,5 puntos)**

Asíntota vertical: $x = 0$ **(0,25 puntos)**

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1}{x^2} = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{x} - 4x\right) = 0$$

Polo tanto a asíntota oblicua é a recta $y = 4x$

(0,5 puntos)

Como $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2}$, temos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
f' (x)	+	-	-	+
f (x)	↗	↘	↘	↗

é dicir> Crecente en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$,
Decrecente en $(-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$ **(0,75 puntos)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot e^x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot e^x}{-\text{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-\text{sen}^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} e^x = -1$

(1 punto)

c) Definición de primitiva **(0,25 puntos)**
Definición de integral indefinida **(0,25 puntos)**
Enunciado da regra de Barrow **(0,5 puntos)**

<u>Opción 2</u>.

a) Definición de función continua nun punto

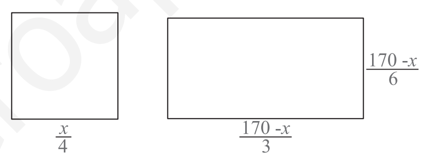
(0,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \\ \nexists\ f(0) \end{array}\right\} \text{Discontinuidade evitable, que se evita}$$

definindo $f(0) = 0$ **(0,5 puntos)**

b) Parte de arame para o cadrado: x cm. Parte de arame para o rectángulo: $(170 - x)$ cm

$$A(x) + \frac{x^2}{16} + \frac{(170 - x)^2}{18}; \qquad A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{170 - x}{9}$$



$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 80$; $A''(x) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} > 0$

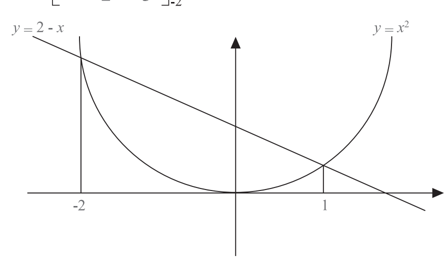
Solución: 80 cm para o cadrado e 90 cm para o rectángulo. **(1,5 puntos)**

c) Abscisas dos puntos de corte das gráficas

$$2 - x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$ **(0,25 puntos)**

$A = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx$ **(0,75 puntos)**

$A = \left[2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$; $\quad A = \dfrac{9}{2}\ u^2$ **(0,5 puntos)**



CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)**	**Código: 21**
	XUÑO 2005	

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte ***tódolos*** *alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 **(Álxebra Lineal)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Ache tódalas matrices $A = (a_{ij})$, cadradas de orde tres, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ e $A + A^t = 4I$, sendo I a matriz identidade de orde tres e A^t a matriz trasposta de A, das que ademáis sábese que o seu determinante vale 10.

2. Discuta e interprete xeométricamente, según os diferentes valores do parámetro m, o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -x + y - z &= -1 \\ 4x - 2y + 2z &= 2m \\ -3x - 2y + mz &= -4 \end{aligned}$$

Bloque 2 **(Xeometría)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Calcule a distancia entre as rectas de ecuacións $r:\left\{x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7}\right\}$ e $s:\left\{x-2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}\right\}$.

2. Demostre que os puntos $P=(0,0,4)$, $Q=(3,3,3)$, $R=(2,3,4)$ e $S=(3,0,1)$ son coplanarios e determine o plano que os contén.

Bloque 3 **(Análise)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Enunciado e interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral para funcións continuas.

B. Sexa $f:[-2, 2] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua en [-2, 2] tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$, ¿pódese asegurar que existen b e c en [-2, 2] tales que $b \leq -1$, $c \geq -1$ e $f(b) = f(c)$? Xustifique a súa resposta.

2. A. Enunciado da Regra de L'Hopital.

B. Calcule a relación entre a e b para que sexa continua en toda a recta real a función $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{2x} & se \quad x \neq 0 \\ b & se \quad x = 0 \end{cases}$$

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAAU (LOXSE) Código: 21

XUÑO 2005

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais. Definición de sucesión acotada inferiormente.

B. Demostre que a sucesión de termo xeral $a_n = \dfrac{4n-1}{n+1}$ é crecente e ache unha cota inferior positiva (xustificando que é cota inferior.)

2. A. Explique **BREVEMENTE** o método de integración de funcións racionais *P(x)/Q(x)*, no caso de que o polinomio do denominador, *Q(x)*, teña só raíces reais.

B. Calcule $\int \dfrac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx.$

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que segue unha distribución normal.

B. Se X é unha variable aleatoria normal de media $\mu>0$ e varianza σ^2 entón $P\left(\dfrac{\mu}{2} \le X \le \dfrac{3\mu}{2}\right)$ vale:

a) cero

b) $2P\left(Z \le \dfrac{\mu}{2\sigma}\right)-1,$ donde Z é unha variable aleatoria que segue unha distribución N(0,1).

c) ningunha das anteriores.
Elixa unha das tres respostas xustificando a súa elección.

2. A. A media dunha variable aleatoria pode ser negativa:
(a) Nunca **(b)** Sempre **(c)** Só se as probabilidades son negativas **(d)** Ningunha das anteriores.
Escolla unha das anteriores respostas e razoe por que as outras tres opcións non son correctas.

B. Se X é unha variable aleatoria discreta de media m, demostre, (empregando a definición de media) que a media da variable aleatoria discreta Y, con $Y = a + bX$, (para calesqueira $a,b\in\mathbf{R}$) é $a+bm$.

CiUG — COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE) SETEMBRO 2005	Código: 21

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte ***tódolos*** *alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 **(Álxebra Lineal)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Resolva a ecuación matricial: $A \cdot X + C = B$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.Discuta e resolva, segundo os valores do parámetro α, o seguinte sistema de ecuacións. Interpréteo xeométricamente en cada caso:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - \alpha y - 3z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

Bloque 2 **(Xeometría)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. ¿Que condición deben cumprir os coeficientes das ecuacións xerais de dous planos para que estes sexan perpendiculares?

B. Ache o ángulo que forman os planos $\pi : 2x - y + z - 7 = 0$ e $\sigma : x + y + 2z = 11$.

2. A. Definición de producto mixto de tres vectores. ¿Pode ocorrer que o producto mixto de tres vectores sexa cero sen ser ningún dos vectores o vector nulo? Razoe a resposta.

B. Para $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w},$ tres vectores no espacio tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $|\vec{w}| = 5$, ache os valores mínimo e máximo do valor absoluto do seu producto mixto.

Bloque 3 **(Análise)** (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Continuidade lateral dunha función nun punto.

B. Analice a continuidade, no punto $x = 0$, da función f dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{x} & se\ x < 0 \\[2ex] \dfrac{\cos(x)}{x^2 + 1} & se\ x \geq 0 \end{cases}$

2. A. Enunciado e interpretación xeométrica do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas.

B. Sexa $F(x) = \int_0^x sen(t^2)\,dt$. Calcule a segunda derivada da función F (**sen intentar resolver a integral**.)

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE)	Código: 21
	SETEMBRO 2005	

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque* ***só*** *aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante os cursos académicos 2003/2004 ou 2004/2005. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Calcule:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+4}-n\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

2. Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^2+3}\,dx.$

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque* ***só*** *aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Tódolos días se seleccionan, de maneira aleatoria, 15 unidades dun proceso de taponado de botellas co propósito de verificar a porcentaxe de taponados defectuosos. A xerencia decidíu deter o proceso cada vez que unha mostra de 15 unidades teña dous ou máis defectuosos. Se se sabe que a probabilidade de realizar un taponado defectuoso é p, ¿cal é a probabilidade de que, un determinado día, o proceso se deteña? (O resultado debe expresalo en función de p.)

Se $p = 0.1$, ¿é máis probable que nunha caixa non haxa ningún defectuoso ou que sexan todos defectuosos? Xustifique a súa resposta.

2. Un distribuidor de cristalerías empaqueta as copas en lotes de catro copas cada un. A función de masa de probabilidade do número de copas defectuosas en cada lote vén dada por:

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0.9	m	0.02	0.01	0.005

Pídese:

a) Calcule o valor de m.
b) Calcule a media da variable X.
c) Calcule a probabilidade de que polo menos o 50% das copas dun lote sexa defectuoso.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos. O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático e no caso de responde-los dous, soamente se puntuará o primeiro exercicio respondido dese bloque.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

EXERCICIO 1:

Formulación da condición $A + A^t = 4I$ **(0, 5 puntos)**
Obtención de $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$ **(0,25 puntos)**
Obtención de $a_{12} = a_{23} = 0$ **(0,25 puntos)**
Condición $a_{13} + a_{31} = 0$ **(0,25 puntos)**
Formulación da condición det(A) = 10 **(0, 5 puntos)**

Solución $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(0,75 puntos)

EXERCICIO 2:

Sexan M a matriz dos coeficientes e M^* a matriz ampliada. Facemos a discusión utilizando o Teorema de Rouché-Frobenius (tamén se podería facer polo método de Gauss).

det(M)= 4 – 2m. Polo tanto det(M) = 0 ⇔ m = 2 **(0, 5 puntos)**

Discusión:

1. m ≠ 2, rang(M) = 3= rang(M^*) = nº incógnitas. Sistema compatible determinado. Solución única **(0,5 puntos)**

2. *m = 2*, rang(M) = 2 ≠ rang(M^*) = 3 pois

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

temos neste caso un sistema incompatible **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica:

1. m ≠ 2. Tres planos que se cortan nun punto **(0,5 puntos)**

m =2. Como non hai un par de planos paralelos, son tres planos que se cortan dous a dous formando unha superficie prismática (planos que se cortan dous a dous según rectas paralelas.

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

Pode resolverse de varias maneiras: fórmula que dá a distancia entre dúas rectas que se cruzan; distancia de un punto de *s* ao plano que contén a *r* e a *s*; pola perpendicular común;... A puntuación será:

Formulación de cómo calcula-la distancia **(1 punto)**

Determinación da distancia **(1,5 puntos)**

Utilizando o primeiro dos métodos sinalados temos

$A_r = (0,1,4)$; $A_s = (2,2,3)$; $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,1,-1)$

$\overrightarrow{u_r} = (1,3,7)$; $\overrightarrow{u_s} = (1,3,4)$

rang($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}$) = 2; rang($\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}$) = 3. Son dúas rectas que se cruzan.

Aplicamo-la fórmula $d(r,s) = \dfrac{\left|\det(\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s})\right|}{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}\right|}$

e como $\left|\det(\overrightarrow{A_rA_s}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s})\right| = 15$; $\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}\right| = 3\sqrt{10}$;

resulta que $d(r,s) = \sqrt{10}/2$

EXERCICIO 2:

Este exercicio tamen se pode resolver de varias maneiras. Por exemplo:

$\overrightarrow{PQ} = (3,3,1)$; $\overrightarrow{PR} = (2,3,0)$; $\overrightarrow{PS} = (3,0,-3)$

rang($\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$) = 2. Polo tanto, os puntos son coplanarios **(1,5 puntos)**

Como non se especifica cal, podemos dar a ecuación vectorial do plano que contén os puntos

$\vec{x} = (0,0,4) + t(3,3,-1) + s(2,3,0)$ **(1 punto)**

Bloque 3 (Análise)

EXERCICIO 1:

A. Enunciado do teorema do valor medio do cálculo integral **(0,5 puntos)**

Interpretación xeométrica do teorema do valor medio do cálculo integral **(0,5 puntos)**

B. A aplicación do teorema do valor medio do cálculo integral permite afirmar que ∃ b ∈ (-2,--1) tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = f(b)$ **(0, 5 puntos)**

∃ c ∈(1,2) tal que $\int_{1}^{2} f(t)dt = f(c)$ **(0, 5 puntos)**

Polo tanto, tendo en conta a hipótese, podemos concluir que

Existen b (-2,--1) e c (1,2) tales que f(b) = f(c) **(0,5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Enunciado da Regra de L'Hopital **(1 punto)**

B. En R - {0} é continua (cociente de continuas e non se anula o denominador) **(0, 25 puntos)**

Estudiamo-la continuidade en x = 0. Aplicando a Regra de L'Hopital, temos $\lim_{x \to 0} f(x) = a/2$ **(0, 75 puntos)**

e como $f(0) = b$, deducimos f(x) é continua en x = 0 ⇔ a = 2b **(0, 5 puntos)**

Bloque 4.a

1. A. Definición de cota superior dunha sucesión de números reais **(0,5 puntos)**

Definición de sucesión acotada inferiormente **(0,5 puntos)**

B. A sucesión é crecente posto que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$$ **(0,75 puntos)**

Como a sucesión é crecente, entón $a_1 = 3/2$ é cota inferior **(0,75 puntos)**

2. A. Método de integración de funcións racionais, no caso de que o polinomio do denominador só teña raíces reais **(1 punto)**

B. $$\int \frac{2x-1}{x(x+1)}dx = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{3}{x+1} + C$$

Descomposición en suma de fraccións **(0,25 puntos).** Determinación das constantes **(0,25 puntos)**. Integración logarítmica **(0,25 puntos)**. Integración da potencia **(0,5 puntos)**. Constante de integración **(0,25 puntos).**

Bloque 4.b (Estatística)

EXERCICIO 1:

A. Propiedades da función de densidade dunha variable aleatoria que sigue unha distribución normal **(1 punto)**

B. b) . Tipifica-la variable aleatoria **(0,75 puntos)** e face-las transformacións **(0,75 puntos).**

EXERCICIO 2:

A. O apartado B deste exercicio sirve para poñer contraexemplos de a) e b). Ademais como as probabilidades non son negativas, c) tamén é falso. **(1 punto)**

B. Se X é unha variable aleatoria discreta que toma valores x_i con probabilidades p_i, i = 1,...,n

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \text{m}; \quad E[Y] = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i) p_i$$

(0,75 puntos)

e polo tanto, operando, E[Y] = a + bm **(0,75 puntos)**

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada bloque é 2,5 puntos. O alumno debe resolver só un exercicio de cada bloque temático e no caso de responde-los dous, soamente se puntuará o primeiro exercicio respondido dese bloque.

Bloque 1 (Álxebra lineal)

EXERCICIO 1:

Obtención de $X = A^{-1}(B - C)$ **(1 punto)**

Obter $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(0,75 puntos)**

Cálculo de $A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$ **(0,75 puntos)**

EXERCICIO 2:

É un sistema lineal homoxéneo. Sexa M a matriz dos coeficientes.
M ten menores de orden 2 distintos de cero, por exemplo $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21$ $|M| = 7\alpha + 63$

Discusión e resolución:

1. $\alpha \neq -9$, rang(M) = 3 = nº incógnitas. Sistema compatible determinado. **(0, 5 puntos)**

Solución única x = 0, y = 0, z = 0 **(0,25 puntos)**

2. $\alpha = -9$, rang(M) = 2 < nº incógnitas. Sistema compatible indeterminado. **(0, 5 puntos)**

Infinitas solucións x = 0; y = λ/3; z = λ; con λ ∈ R **(0,25 puntos)**

Interpretación xeométrica:

1. $\alpha \neq -9$. Tres planos que se cortan nun punto (a orixe de coordenadas) **(0, 5 puntos)**

α = -9. Tres planos distintos que se cortan nunha recta **(0, 5 puntos)**

Bloque 2 (Xeometría)

EXERCICIO 1:

A. O ángulo α que forman os planos

Π : Ax + By + Cz + D = 0

Π': A'x + B'y + C'z + D' = 0

ven dado pola expresión $\alpha = ar\cos\frac{|n \cdot n'|}{|n||n'|} =$

$$ar\cos\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

polo tanto $\Pi \perp \Pi' \Leftrightarrow |AA'+BB'+CC'| = 0$

(1 punto)

B. Tendo en conta a fórmula anterior para o ángulo que forman dous planos, resulta que $\alpha = ar\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ e polo tanto $\alpha = \pi/3$ radiáns **(1,5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Dados tres vectores libres $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\vec{v} = (w_1, w_2, w_3)$ o seu producto mixto é o número real

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$ **(1 punto)**

Tendo en conta a expresión anterior, resulta que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependentes **(0, 5 puntos)**

B. O valor mínimo de $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ será 0, e corresponderá ó caso de ser $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linealmente dependentes **(0,5 puntos)**

Tendo en conta que

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\vec{u}||\vec{v}||\vec{w}||sen(\vec{v}, \vec{w})||cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})|$$

o valor máximo de $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ será 30 **(0, 5 puntos)**

<u>Bloque 3 (Análise)</u>

EXERCICIO 1:

A. Definición de continuidade lateral dunha función nun punto **(1 punto)**

B. Calculamos os límites laterais

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \ln 2$ **(0, 5 puntos)**

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ **(0, 5 puntos)**

Como os límites laterais non coinciden, a función non é continua en x = 0 **(0, 5 puntos)**

EXERCICIO 2:

A. Enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo Integral para funcións continuas **(1 punto)**

Interpretación xeométrica **(0, 5 puntos)**

B. F'(x) = sen (x^2) **(0, 5 puntos)**

F''(x) = $2x\cos(x^2)$ **(0, 5 puntos)**

<u>Bloque 4.a</u>

1. a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5n+4}-n)$ = -5/2 **(1,5 puntos)**

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$ = 1/2 **(1 punto)**

2. $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+3}dx = \int xdx + \int \frac{-2x+2}{x^2+3}dx$

(0,5 puntos)

Integración da potencia **(0,25 puntos)**

Integración logarítmica **(0,5 puntos)**

Integración arcotanxente **(1 punto)**

Constante de integración **(0,25 puntos)**

Solución:

$$\int \frac{x^3+x+2}{x^2+3}dx = \frac{x^2}{2} - \ln\left(x^2+3\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} artg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

<u>Bloque 4.b (Estatística)</u>

EXERCICIO 1:

Sexa X = nº de tapóns defectuosos nunha mostra de 15 unidades dun proceso de taponado e p = probabilidade de realizar un taponado defectuoso. Entón $X \in B(15; p)$ **(0,5 puntos)**

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (1-p)^{15} - 15(1-p)^{14}$ **(0,75 puntos)**

<u>Caso p = 0,1:</u>

$P(X = 0) = 0{,}9^{15}$ **(0,5 puntos)**

$P(X = 15) = 0{,}1^{15}$ **(0,5 puntos)**

Polo tanto $P(X = 15) < P(X = 0)$ **(0,25 puntos)**

EXERCICIO 2:

a) 0,9 + m + 0,02 + 0,01 + 0,005 = 1. Polo tanto m = 0,065 **(0,5 puntos)**

b) E[X] = μ = 0,065x1 + 0,02x2 + 0,01x3 + 0,005x4 = 0,155 **(0,75 puntos)**

c) Sexa X = número de copas defectuosas nun lote de 4 copas

P(X2) = 1- P(X = 0) – P(X = 1) = 1 – 0,9 – 0,065 = 0,035 **(1,25 puntos)**

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)** **XUÑO 2004**	**Código: 21**

MATEMÁTICAS

PRIMEIRA PARTE (Parte Común)

(Nesta primeira parte ***tódolos*** *alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 (Álxebra Lineal) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Ache tres números sabendo que o primeiro menos o segundo é igual a un quinto do terceiro, se ó dobre do primeiro lle restamos seis resulta a suma do segundo e o terceiro e, ademáis, o triple do segundo menos o dobre do terceiro é igual ó primeiro menos oito.

2. Demostra que toda matriz cadrada 3-dimensional se pode escribir como suma dunha matriz simétrica e outra antisimétrica.

Bloque 2 (Xeometría) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Distancia entre dúas rectas que se cruzan.

B. Ache a distancia entre as rectas r e s de ecuacións:

$$r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 2 \\ z = 2\beta \end{cases}$$

2. A. Ángulo que forman dúas rectas. Condición de perpendicularidade.

B. Determine o ángulo que forman a recta que pasa polos puntos $A = (1,0,-1)$ e $B = (0,1,-2)$ e a recta de ecuación: $x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

Bloque 3 (Análise) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Un barco B e dúas cidades A e C da costa forman un triángulo rectángulo en C. As distancias do barco ás cidades A e C son 13 Km e 5 Km, respectivamente. Un home situado en A desexa chegar ata o barco B. Sabendo que pode nadar a 3 Km/h e camiñar a 5 Km/h, ¿a que distancia de A debe abandoar a costa para nadar ata B se quere chegar o antes posible?

2. Demostre que a función f dada por $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + x - 2}$ é estrictamente positiva en $(2, +\infty)$ e ache a área da rexión determinada pola gráfica de f, o eixe de abscisas e as rectas $x = 2$ e $x = 3$.

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAAU (LOXSE) **Código: 21**

XUÑO 2004

MATEMÁTICAS

SEGUNDA PARTE

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque* ***só*** *aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o actual curso académico 2003/2004. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Escriba os distintos casos de indeterminacións que poden xurdir ó calcular límites de sucesións de números reais e poña un exemplo sinxelo (sen resolvelo) de, polo menos, catro deses casos.

B. Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)\sqrt{3n+5}$ indicando que tipo de indeterminación (ou indeterminacións) se presentan ó intentar resolver este límite.

2. A. Explique **BREVEMENTE** (en non máis de cinco liñas) como se aplica o método de Gauss para calcular o rango dunha matriz.

B. Determine, **empregando o método de Gauss**, o rango da matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque* ***só*** *aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A. Definición de función de densidade. Propiedades da función de densidade.

B. Obteña a función de distribución da variable aleatoria continua que tén por función de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \beta x & se\ 1 \le x < 5 \\ 0 & \text{en outro caso} \end{cases}, \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

2. A. Defina media e varianza dunha variable aleatoria binomial.

B. Lánzase unha moeda oito veces e anotamos o resultado. Repítese o proceso oitenta veces (é dicir, realízanse oitenta series de oito tiradas cada unha). ¿En cantos casos cabe esperar que obteñamos seis cruces e dúas caras?

MATEMÁTICAS

*(Nesta primeira parte **tódolos** alumnos deben responder a tres preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos tres bloques temáticos: Álxebra Lineal, Xeometría e Análise. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)*

Bloque 1 (Álxebra Lineal) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Enunciado da regra de Cramer.

B. Determine os coeficientes do polinomio de grao dous tal que a súa gráfica pasa polos puntos (0,5), (1, 7) e (-1,5). ¿Pode haber outro polinomio de segundo grao, que pase por eses tres puntos? Razone a súa resposta.

2. A. Exprese a condición que teñen que cumprir dúas matrices M e N para que poida realizarse a súa suma. E, se o que pretendemos é multiplicalas, ¿que condición deben cumprir as matrices?

B. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, ache unha matriz X tal que $AX + B = 0$.

Bloque 2 (Xeometría) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Comprobe que os puntos A = (1,0,3), B = (-2,5,4), C = (0,2,5) e D = (-1,4,7) son coplanarios. De todos os triángulos que se poden construir tendo como vértices tres deses catro puntos,¿cal é o de maior área? Obteña o valor de dita área.

2. Ache a ecuación xeral do plano π que contén á recta **r**: $\left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}\right\}$ e é paralelo á recta **s** que pasa polos puntos $P = (2,0,1)$ e $Q = (1,1,1)$. Calcule a distancia de **s** a π.

Bloque 3 (Análise) (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Interpretación xeométrica da derivada dunha función nun punto.

B. Determine as abscisas dos puntos da curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ nos que a recta tanxente forma un ángulo de 135º co sentido positivo do eixe de abscisas.

2. A. Definición de función continua nun punto. Explique brevemente os tipos de discontinuidades que existen.

B. Estudie a continuidade en toda a recta real da función f dada por: $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\,(x)}{x} & se\ x > 0 \\ x + 1 & se\ x \leq 0 \end{cases}$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE) SETEMBRO 2004	Código: 21

MATEMÁTICAS

Bloque 4.a. *(Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o actual curso académico 2003/2004. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. Deixamos caer unha pelota desde unha altura de 4 metros e, tras cada rebote, a altura acadada redúcese á metade da altura anterior. ¿Que altura acadará a pelota tras cada un dos cinco primeiros rebotes? ¿E tras o rebote vixésimo? ¿E tras o *n*-ésimo rebote? Se a_n denota a altura acadada tras o *n*-ésimo rebote, obteña unha cota superior e outra inferior desta sucesión. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Calcule $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx$

Bloque 4.b. (Estatística) (*Responderán a unha das dúas preguntas deste bloque **só** aqueles alumnos que aprobaron Matemáticas II durante o curso académico 2002/2003 ou anteriores. A puntuación máxima da pregunta é 2.5 puntos.)*

1. A velocidade dos coches que circulan por unha cidade segue unha distribución normal de media 40 Km./hora e varianza 100. Calcule a probabilidade de que un coche circule a unha velocidade ν con $\nu \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ donde μ denota a media e σ denota a desviación típica. Utilizando a resposta anterior, ache a porcentaxe de coches que circulan a máis de 60 Km./hora. ¿Cal é a probabilidade de que un coche circule a menos de 70 Km./hora se se sabe que circula a máis de 40 Km./hora? Pode ser útil saber que se **Z** é unha variable normal estándar entón P(**Z**<2)=0.9772 e P(**Z**<3)=0.9987.

2. A vida útil (medida en anos) dun teléfono móbil fabricado por unha determinada empresa é unha variable aleatoria con función de densidade: $f(x) = \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x$ se $0 < x < 5$ (e cero noutro caso).
A devandita marca ofrece unha garantía de ano e medio, de xeito que se o móbil falla nese período terá que reemplazalo por outro novo. Calcule a probabilidade de que se teña que reemplazar un móbil no período de garantía. Se un pai merca a cada un dos seus cinco fillos un móbil desa marca, determine a probabilidade de que polo menos un deles se avaríe durante o período de garantía.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.
Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.
Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.
Por cada erro cometido en cálculos (que non sexan erros conceptuáis) descontarase 0.1. Entendendo que se ese valor errado se emprega despois no mesmo exercicio e conleva un resultado (aínda que erróneo) consecuente con esa conta, non se penalizará o resultado final.

Bloque 1.(Álxebra Linear)

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

2. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

Bloque 2.(Xeometría)

1. A. 1 punto.
1. B. 1.5 puntos.

2. A. Ángulo: 0.5 puntos. Condición de perpendicularidade: 0.5 puntos.
2. B. 1.5 puntos.

Bloque 3.(Análise)

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Cálculo do punto crítico: 0.5 puntos. Comprobación da segunda derivada: 0.5 puntos.
2. Signo da función: 0.5 puntos. Cálculo da primitiva: 1.5 puntos. Aplicación da regra de Barrow: 0.5 puntos.

Bloque 4.a.

1. A. 1 punto: (0.5 polos casos de indeterminación e 0.5 puntos polos exemplos).
1. B. 1.5 puntos.

2. A. 1 punto.
2. B. 1.5 puntos.

Bloque 4.b. (Estatística)

1. A. Definición: 0.25 puntos. Propiedades: 0.5 puntos.
1. B. Cálculo do coeficiente: 0.75 puntos. Determinación da función de distribución: 1 punto.

2. A. 1 punto (0.5 puntos cada definición)
2. B. 1.5 puntos.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.
Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.
Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.
Por cada erro cometido en cálculos (que non sexan erros conceptuáis) descontarase 0.1. Entendendo que se ese valor errado se emprega despois no mesmo exercicio e conleva un resultado (aínda que erróneo) consecuente con esa conta, non se penalizará o resultado final.

Bloque 1.(Álxebra Linear)

1. A. 1 punto.
1. B. 1.5 puntos. (Plantexamento e cálculo dos coeficientes: 1 punto. Resposta á

pregunta: 0.5 puntos)
2. A. 1 punto (0.5 puntos por cada resposta.)
2. B.: 1.5 puntos. (Plantexamento do sistema 1 punto. Resolución:0.5 puntos)

Bloque 2.(Xeometría)

1. Comprobación de que son coplanarios: 1 punto. Cálculo da área: 1 punto. Resposta á pregunta: 0.5 puntos.
2. Ecuación do plano: 1.5 puntos. Cálculo da distancia: 1 punto.

Bloque 3.(Análise)

1. A. 1 punto se se inclue unha explicación. Non se considera válido un simple debuxo.
1. B. Planteamiento: 1 punto (Pos saber que la tg(135º)=-1: 0.5 puntos, Por igualar la derivada a -1:0.5 puntos). Resolución de la ecuación de segundo grado: 0.5 puntos.
2. A. Definición: 0.75 puntos. Discontinuidades: 0.75 puntos (0.25 por cada tipo)
2. B. 1. punto.

Bloque 4.a.

1. Cálculo dos primeiros términos: 0.5 puntos (0.1 por cada un deles). Cálculo do término vixésimo: 0.5 puntos. Cálculo do término xeral: 0.5 puntos. Cota superior e inferior 0.5 puntos. Cálculo do límite: 0.5 puntos.
2. 2.5 puntos (Por calcular a primitiva en términos de logaritmos:1 punto, por calcular a outra primitiva en términos dunha función arcotanxente: 1.5 puntos).

Nota: se non incluen na expresión final a constante de integración rebáixanse 0.25 puntos.

Bloque 4.b. (Estatística)

1. Probabilidade de que un coche circule a unha velocidade $v \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ 1 punto. Cálculo da porcentaxe de coches que circulan a máis de 60 Km/h, (utilizando o resultado anterior): 0.5 puntos. Se o calcula sen empregar o resultado anterior, é dicir, sen utilizar a simetría : 0.4 puntos) Cálculo da última probabilidade: 1 punto.

2. Cálculo da probabilidade de reemplazo de un móvil no período de garantía: 1 punto distribuido da seguinte maneira: Plantexamento como a integral da función de densidade no intevalo [0, 1.5]: 0.5 puntos. Cálculo da primitiva: 0.25 puntos. Aplicación da regra de Barrow: 0.25 puntos

Cálculo da última probabilidade pedida: 1.5 puntos. (0.5 puntos polo plantexamento dos parámetros da binomial e 1 punto polo plantexamento e cálculo da citada probabilidade).

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE)	Código: 21
	XUÑO 2003	

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álxebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álxebra (*responda a unha das dúas preguntas*)

1. Considéranse dúas matrices A e B que verifican $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ e $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcule a matriz $A^2 - B^2$

2. Calcule, por transformacións elementais (sen emplear a regla de Sarrus) e xustificando os pasos, o determinante

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

Xeometría (*responda a unha das dúas preguntas*)

1. **A**. Definición de módulo dun vector. Propiedades.
B. Determine os valores de a e b, a > 0, para que os vectores $\vec{v}_1 = (a,b,b)$, $\vec{v}_2 = (b,a,b)$ e $\vec{v}_3 = (b,b,a)$ sexan unitarios e ortogonales dous a dous.
2. **A**. Ángulo que forman unha recta e un plano.
B. Determine o ángulo que forman o plano $\pi : x + 2y - 3z + 4 = 0$ e a recta r: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y + 2z = 12 \end{cases}$

Análise matemática (*responda a unha das dúas preguntas*)

1. **A**. ¿Que é un punto de inflexión dunha función?
B. Ache a condición que debe cumprir λ para que o polinomio $x^4 + x^3 + \lambda x^2$ sexa cóncavo nalgún intervalo. Determine o intervalo de concavidade en función de λ.
2. **A**. Enunciado e interpretación xeométrica do teorema de Bolzano.
B. ¿Pódese asegurar, empregando o teorema de Bolzano, que a función $f(x) = tg(x)$ ten unha raíz no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$? Razone a resposta. Esboce a gráfica de f nese intervalo.

Nota: tg denota a función tanxente.

Estatística (*responda a unha das dúas preguntas*)

1. Determine o valor de K para o que a función $f(x) = \begin{cases} K\,\text{sen}(x) & \text{se } x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{noutro caso} \end{cases}$ sexa unha función de densidade.

Determine para ese valor de K a expresión da función de distribución e calcule a media da variable aleatoria que ten por función de densidade a *f*.

2. O 1% dos individuos dunha poboación supera os 185cm de estatura, mentras que o 3% non chega a 160cm.
Se se supón que a estatura segue unha distribución normal, calcule os parámetros desa distribución.
Nota: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución N(0,1), entón $P(Z \leq 2.33) = 0.99$ e $P(Z \leq 1.89) = 0.97$.

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAAU (LOXSE) **Código: 21**

SETEMBRO 2003

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álxebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

<u>**Álxebra**</u> *(responda a unha das dúas preguntas)*

1. Demostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica unha ecuación do tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α e β (I denota a matriz identidade). Utilice este feito para calcular a inversa de A.

2. Discuta e interprete xeométricamente, según o parámetro a o sistema de ecuacións:

$$\begin{array}{rrrl} 3x & -y & & = ax \\ 5x & +y & +2z & = ay \\ & 4y & +3x & = az \end{array}$$

<u>**Xeometría**</u> *(responda a unha das dúas preguntas)*

1. **A**. ¿Que significa xeométricamente que tres vectores do espacio tridimensional sexan linealmente dependentes?

B. Dados os vectores $\vec{u}_1 = (1,2,1)$, $\vec{u}_2 = (1,3,2)$, $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ e $\vec{v}_2 = (3,8,5)$, demostre que os vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ dependen linealmente dos vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Determine a ecuación xeral do plano que pasa pola orixe e contén os vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e determine a posición relativa dos vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ respecto a ese plano.

2. **A**. Definición de producto escalar de dous vectores. Interpretación xeométrica.

B. Determine a ecuación que satisfacen os vectores ortogonales á recta $r : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$. Interprete xeométricamente o resultado obtido.

<u>**Análise matemática**</u> *(responda a unha das dúas preguntas)*

1. Dada a parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, determine os valores de a, b e c sabendo que f ten un máximo no punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$ e a recta tanxente a f no punto (1,3) é $y = -3x + 6$.

2. Determine a área da rexión limitada pola gráfica da función $f(x) = x^2 + x + 5$, o eixe OX e as rectas $x = -\frac{1}{2}$ e $y = x + 6$.

<u>**Estatística**</u> *(responda a unha das dúas preguntas)*

1. **A**. ¿Cando unha distribución normal se considera unha aproximación aceptable dunha distribución binomial?

B. A distribución normal N(32,4) é unha boa aproximación para a distribución binomial de parámetros:

(a) n=32, p=4 (b) n=32, p=$\frac{1}{2}$ (c) n calquera, p=q (d) n=64, p=$\frac{1}{2}$

Escolla unha das catro opcións anteriores e xustifique a súa resposta.

2. **A**. Propiedades da función de distribución dunha variable aleatoria continua.

B. A función $F(X) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ k\,(x^2 - 1) & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$, $(k \in \mathbb{R})$, é función de distribución de certa variable continua X, se:

(a) $k<0$, (b) $k=1$, (c) $k=\frac{1}{8}$, (d) nunca.

Elixa unha das opcións anteriores e xustifique a súa resposta.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará á primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álxebra

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

2: 2.5 puntos.

Xeometría

1. A. Definición de módulo dun vector: 0.5 puntos. Propiedades: 0.5 puntos.

1. B. Plantexamento da ortonormalidade: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

2. A. 1 punto.

2. B. 1.5 puntos.

Análise Matemática

1. A. 0.5 puntos.

1. B. Cálculo da condición para: 1 punto. Intervalo de concavidade: 1 punto.

2. A. Enunciado: 0.5 puntos. Interpretación xeométrica: 0.5 puntos.

2. B. Resposta á pregunta: 1 punto. Gráfica: 0.5 puntos.

Estatística

1. Plantexamento da función de densidade: 0.25 puntos. Cálculo do valor de K: 0.25 puntos. Expresión da función de distribución: 1 punto. Cálculo da media: 1 punto. (expresión da media: 0.25 puntos 0.5 polo cálculo da primitiva e 0.25 pola aplicación da Regra de Barrow).

2. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará á primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álxebra

Plantexamento das ecuacións: 1 punto. Cálculo dos parámetros: 0.5 puntos (0.25 por cada un)

Obtención da inversa: plantexamento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

2. Discusión: 1.5 puntos. Interpretación xeométrica: 1 punto.

Xeometría

1. A. 0.5 puntos

B. Demostración da dependencia lineal: 0.5 puntos. Determinación da ecuación del plano: 1 punto. Posición relativa: 0.5 puntos.

2. A. Definición de producto escalar: 0.75 puntos. Interpretación xeométrica: 0.75 puntos.

B. Determinación da ecuación: 0.75 punto. Interpretación: 0.25 puntos.

Análise Matemática

1. Plantexamento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

2. Puntos de corte: 0.5 puntos. Plantexamento da integral: 1 punto. Resolución: 1 punto.

Estatística

1. A. 1 punto.

B. 1.5 puntos. (Só se xustifica ben).

2. A. 1 punto.

B. 1.5 puntos (Só se xustifica ben).

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PAAU (LOXSE) XUÑO 2002	Código: 21

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álxebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Álxebra *(Responda a unha das dúas preguntas)*

1. A. Definición de producto de matrices.

B. Dadas tres matrices A, B e C sábese que $A{\cdot}B{\cdot}C$ é unha matriz de orde 2x3 e que $B{\cdot}C$ é unha matriz de orde 4x3, ¿cal é a orde de A? Xustifíqueo.

2. A. Enunciado do teorema de Rouché-Frobenius.

B. ¿É compatible determinado o sistema de ecuacións $\begin{cases} 3x+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+4z=3 \end{cases}$? Xustifique a súa resposta.

Como consecuencia da súa resposta anterior, xustifique se tén unha, ningunha ou máis dunha solución ese sistema.

Xeometría *(Responda a unha das dúas preguntas)*

1. Ache a distancia do plano $\pi: 4x-10y+2z=-1$ ó plano $\sigma: \begin{cases} x=2\lambda+3\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=\lambda-\mu \end{cases}$.

2. Determine o vector (ou vectores) unitarios, $\vec{v}=(a,b,c)$ (con (con $a>0, b>0, c>0$), que forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radiáns co vector $\vec{u}=(1,1,1)$ e un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radiáns con $\vec{w}=(2,0,2)$.

Análise Matemática *(Responda a unha das dúas preguntas)*

1. Debuxe a gráfica de $f(x)=\left|x^2-4\right|$ no intervalo $[-3,3]$ e calcule a súa integral nese intervalo.

2. Dada $F(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-4}$, escriba a ecuación da secante a F que une os puntos $(-2,F(-2))$ e $(2,F(2))$

¿Existe un punto c no intervalo [-2,2] verificando que a tanxente á gráfica de F en $(c,F(c))$ é paralela á secante que achou? En caso afirmativo razoe a súa resposta e calcule c, en caso negativo razoe porque non existe.

Estatística *(Responda a unha das dúas preguntas)*

1. A. Función de distribución dunha variable aleatoria continua. Propiedades.

B. Se X é unha variable aleatoria continua que segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ calcule $P(X \leq \mu)$ ¿Que porcentaxe de observacións se atopa no intervalo $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$? NOTA: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución N(0,1), entón $P(Z\leq 1)$= 0.84.

2. A. Función de probabilidade dunha variable aleatoria binomial. Media e varianza dunha variable aleatoria binomial.

B. Determine os parámetros dunha variable aleatoria binomial da que se sabe que a súa media é 12 e a súa desviación típica é $4\sqrt{0.3}$.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)** **SETEMBRO 2002**	**Código: 21**

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álxebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.)

Álxebra (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Discuta o seguinte sistema de ecuacións segundo o valor de α e resólvao no caso en que sexa compatible indeterminado.

$$\begin{aligned} x + y + z &= \alpha - 1 \\ \alpha x + 2y + z &= \alpha \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

2. Ache, se existe, unha matriz X que verifique a ecuación: $B^2 X - BX + X = B$, sendo $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Xeometría (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Deduza as ecuacións vectorial, paramétricas e implícita (ou xeral) dun plano determinado por un punto e dous vectores directores.

B. Dados os puntos $P=(3,4,1)$ e $Q=(7,2,7)$, determine a ecuación xeral do plano que é perpendicular ó segmento $\overline{PQ}$ e que pasa polo punto medio dese segmento.

2. A. Definición e interpretación xeométrica de producto vectorial de dous vectores.

B. Dado-los vectores $\vec{u} = (-2, 0, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 0, \alpha)$, ¿para que valores de α o módulo do vector $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ vale 4?

Análise Matemática (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. Calcule a ecuación da recta que pasa polo punto (3,1) e tal que a área do triángulo formado por esta recta e os semieixos positivos coordenados sexa mínima.

2. Calcule o número positivo α tal que o valor da área da rexión limitada pola recta $y = \alpha$ e a parábola $y = (x-2)^2$ sexa 36.

Estatística (*Responda a unha das dúas preguntas*)

1. A. Definición de variable aleatoria. Tipos de variables aleatorias. Definición de función de masa de probabilidade dunha variable aleatoria discreta.

B. Unha variable aleatoria discreta X toma os valores 2,4,6,8,10 e 12 con probabilidades 0.1, α, β, 0.3, γ e 0.2, respectivamente. Sabendo que $P(X < 6) = 0.3$ e que $P(X > 6) = 0.9$, ache os valores de α, β e γ.

2. A. ¿Que relación existe entre a distribución binomial e a distribución normal?

B. Sábese que o 10% dos alumnos de Bacharelato son fumadores. En base a isto, calcule a probabilidade aproximada de que, polo menos, haxa 310 alumnos fumadores dos 3.000 que se presentan ó exame de selectividade.

NOTA: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución N (0,1), entón $P(Z<0.578)=0.718$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álxebra

1. A. 1.5 puntos.

B. 1 punto.

2. A. 1 punto.

B. Análise da compatibilidade do sistema: 1 punto. Análise do número de solucións: 0.5 puntos.

Xeometría

1. 2.5 puntos.

2. Plantexamento do sistema: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

Análise Matemática

1. Gráfica da función: 1 punto. Plantexamento da integral: 0.75 puntos (0.25 por cada subintervalo correcto. Se utilizase simetrias, 0.25 polo plantexamento de cada simetría e 0.25 polo plantexamento global.) Resolución: 0.75 puntos (0.25 por cada integral coa aplicación correcta da regra de Barrow. No caso de emprego de simetrías reparto uniforme dos 0.75 puntos)

2. Ecuación da secante: 0.5 puntos. Razonamento da existencia de c: 1 punto. Cálculo de c: 1 punto.

Estatística

1. A. Definición de función de distribución: 0.5 puntos. Propiedades: 0.5 puntos.
1. B. Cálculo de $P(X \leq \mu)$: 0.5 puntos. Cálculo da porcentaxe pedida: 1 punto.
2. A. Función de probabilidade dunha variable aleatoria binomial: 0.5 puntos. Media e varianza: 1 punto.
2. B. 1 punto.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Soamente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álgebra

1. Discusión: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

2. Planteamento: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

Xeometría

1. A: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación)

B: 1 punto (cálculo de $\overline{PQ}$ e do punto medio de $\overline{PQ}$: 05 puntos, ecuación do plano: 0.5 puntos).

1. A: 1 punto (0.5 a definición e 0.5 a interpretación xeométrica)

1. B. Planteamento do determinante: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

Análise Matemática

1. Planteamento da función área: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

2. Planteamento da integral definida: 1 punto. Resolución: 1.5 puntos.

Estatística

1. A: 1 punto (definición e tipos de variables aleatorias: 0.5 puntos; definición de función de masa de probabilidade dunha variable aleatoria discreta: 0.5 puntos)

1. B: Planteamento: 0.75 puntos. Cálculo de α, β e γ: 0.75 puntos (0.25 por cada unha)

2. A: 1 punto.

2. B: Planteamiento de $P(X > 310)$ en términos da binomial: 0.5 puntos. Planteamento da probabilidade aproximada: 0.5 puntos. Resolución : 0.5 puntos.

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

PAAU (LOXSE) **Código: 21**

XUÑO 2001

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álxebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álxebra (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Propiedades do producto de matrices (só enuncialas).

B. Sexan $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $N = M + I$, donde I denota a matriz identidade de orde n, calcule N^2 e M^3.

¿Son M ou N inversibles? Razoe a resposta.

2. A. Propiedades dos determinantes (só enuncialas).

B. Sexan F_1, F_2, F_3 e F_4 as filas dunha matriz cadrada P de orde 4 x 4, tal que o seu determinante vale 3. Calcule razoadamente o valor do determinante da inversa de P, o valor do determinante da matriz αP, donde α denota un número real non nulo, e o valor do determinante da matriz tal que as súas filas son $2F_1 - F_4$, F_3 . $7F_2$ e F_4.

Xeometría (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿En que posición relativa poden estar tres planos no espacio que non teñen ningún punto en común?

B. Determine a posición relativa dos planos $\pi : x - 2y + 3z = 4$, $\sigma : 2x + y + z + 1 = 0$ e $\varphi : -2x + 4y - 6z = 0$.

2. A. Ángulo que forman dúas rectas.

B. Determine o ángulo que forman a recta r, que pasa polo punto $(1, -1, 0)$ e tal que o seu vector director é $\vec{v} = (-2, 0, 1)$, e a recta s de ecuación: $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{2}$

Análise matemática (responda a unha das dúas preguntas)

1. Sabendo que P(x) é un polinomio de terceiro grao cun punto de inflexión en (1, 0) e con $P'''(1) = 24$ donde, ademáis, a tanxente ó polinomio nese punto é horizontal, calcule $\int_{-1}^{0} P(x)\, dx$.

2. Dadas $f(x) = \frac{x - |x|}{2}$ e $g(x) = \begin{cases} 3x & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$, calcule $\int_{-1}^{0} x^2 (g \circ f)(x)\, dx$. ($g \circ f$ denota a composición desas funcións).

Estatística (responda a unha das dúas preguntas)

1. Un vendedor de coches estima as seguintes probabilidades para o número de coches que vende nunha semana:

Número de coches	0	1	2	3	4
Probabilidade	0.22	0.35	0.25	0.1	0.08

Calcule o número esperado de coches que venderá nunha semana. Se o vendedor recibe un salario semanal de 25.000 pesetas, máis 25.000 pesetas adicionais por cada coche vendido, ¿Cal é a probabilidade de que unha semana o seu salario sexa inferior a 100.000 pesetas no suposto de que se saiba que é superior a 25.000 pesetas?

2. A vida útil dunha marca de lámpadas segue unha distribución normal de media 1.200 horas de desviación típica 250 horas. ¿Que proporción de lámpadas tén un tempo de vida inferior a 1.050 horas?, ¿que proporción de lámpadas tén un tempo de vida superior a 1.350 horas? Explique brevemente o porqué da relación entre os resultados. ¿Que proporción de lámpadas tén un tempo de vida entre 1.050 e 1.350 horas? Pode ser útil saber que si Z é unha variable con distribución $N(0, 1)$, entón $P(Z < 0.6) = 0.7257$.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAAU (LOXSE)** **SETEMBRO 2001**	**Código: 21**

MATEMÁTICAS

(O alumno debe responder a catro preguntas. Unha soa pregunta de cada un dos catro bloques temáticos: Álxebra, Xeometría, Análise Matemática e Estatística. A puntuación máxima de cada pregunta é de 2,5 puntos.)

Álxebra (responda a unha das dúas preguntas)

1. Calcule α para que o seguinte sistema homoxéneo teña máis solucións que a trivial. Resólvao para dito valor de α e dea unha interpretación xeométrica do sistema de ecuacións e da súa solución.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + y - \alpha z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

2. Calcule os valores do parámetro α para os que a matriz M non ten inversa. Calcule a matriz inversa de M para $\alpha = 2$, se é posible.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 4 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Xeometría (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. Sexan $\overline{u}$ e $\overline{v}$ dous vectores. Comprobe que se $(\overline{u} + \overline{v})(\overline{u} - \overline{v}) = 0$ entón $|\overline{u}| = |\overline{v}|$.

B. Calcule os vectores unitarios que sexan perpendiculares ós vectores $\overline{u} = (-3, 4, 1)$ e $\overline{v} = (-2, 1, 0)$.

2. A. Definición de distancia mínima entre dúas rectas no espacio. Casos posibles.

B. Calcule a distancia entre as rectas r e s, donde r ten por ecuacións ($r : x = 3y = 5z$) e a recta s pasa polos puntos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, 2, -3)$.

Análise matemática (responda a unha das dúas preguntas)

1. A. ¿Pode haber dúas funcións distintas que teñan igual función derivada? Se a resposta é afirmativa, poña un exemplo. Se, polo contrario, a resposta é negativa, razónea.

B. Calcule a derivada da función $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$, se é posible. Represente a gráfica da función e, sobre ela, razoe a súa resposta.

2. A. Enunciado do Teorema do Valor Medio do Cálculo Integral.

B. Sexan f e g, dúas funcións continuas, definidas no intervalo $[a, b]$, que verifican que $\int_a^b f = \int_a^b g$. Demostre que existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = g(\beta)$.

Estatística (responda a unha das dúas preguntas)

1. O tempo, en horas, que tarda un autobús en facer o percorrido entre dúas cidades é unha variable aleatoria con función de densidade: $f(x) = 0'3\,(3x - x^2)$ se $x \in [1, 3]$ (e cero noutro caso).

(a) Calcule o tempo medio que tarda en facer o traxecto.

(b) Calcule a probabilidade de que a duración dun traxecto sexa inferior a dúas horas se se sabe que é superior a unha hora e media.

2. Un saltador de lonxitude salta unha media de 8 metros con desviación típica de 20 cm. Para poder ir á próxima olimpiada é necesario ter unha marca de 8'30 metros, ¿Que probabilidade ten de conseguir esta marca nun salto? E, ¿cal é esta probabilidade se realiza dez saltos?

NOTA: Pode ser útil saber que se Z é unha variable con distribución $N(0,1)$, entón $P(Z < 1'5) = 0'93$.

CONVOCATORIA DE XUÑO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álxebra

1. A: 1 punto.

B: Cálculo de N^2: 0.5 puntos. Cálculo de M^3: 0.5 puntos. Resposta razoada á pregunta: 0.5 puntos.

2. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos (0.5 por cada un dos determinantes pedidos).

Xeometría

1. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos.

2. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos.

Análise Matemática

1. Determinación dos coeficientes do polinomio: 1.5 puntos (plantexamento: 1 punto, resolución: 0.5 puntos).

Cálculo da integral definida: 1 punto (0.5 polo cálculo da primitiva e 0.5 pola aplicación correcta da regra de Barrow).

2. Cálculo da función g o f: 1.5 puntos. Cálculo da integral definida: 1 punto (0.5 puntos polo cálculo da primitiva e 0.5 puntos pola aplicación correcta da regra de Barrow).

Estatística

1. Determinación do número de coches que venderá nunha semana: 1 punto.

Cálculo da probabilidade pedida: 1.5 puntos.

2. Cálculo de $P(X < 1050)$: 0.5 puntos. Cálculo de $P(X < 1350)$: 0.5 puntos.

Explicación da igualdade nos resultados: 0.5 puntos.

Cálculo de $P(1050 < X < 1350)$: 1 punto.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

A puntuación máxima de cada pregunta é 2.5 puntos.

Somente se puntuará a a primeira pregunta respondida de cada un dos catro bloques temáticos.

Non se puntuarán respostas (Si ou Non) que non veñan acompañadas dunha xustificación.

Álxebra

1. Cálculo de a: 1 punto. Resolución del sistema: 1 punto. Interpretación geométrica del sistema y de la solución: 0.5 puntos.

2. Cálculo de a=1, 3: 1 punto. Cálculo de la inversa de M cuando a=2: 1.5 puntos.

Xeometría

1. A: 1 punto.

B: Planteamento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

2. A: 1 punto.

B: Planteamento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto.

Análise Matemática

1. A: 1 punto.

B: 1.5 puntos (destes, polo cálculo de cada unha das derivadas laterais: 0.5 puntos).

2. A: 1.5 puntos.

B: 1 punto.

Estatística

1. A: 1 punto.

B: Planteamento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto (0.5 puntos polo cálculo de $P(1.5<X<2)$ e 0.5 puntos polo cálculo de $P(X>1.5)$).

3. Resposta á primeira pregunta: 1 punto.

Resposta á segunda pregunta: 1.5 puntos.