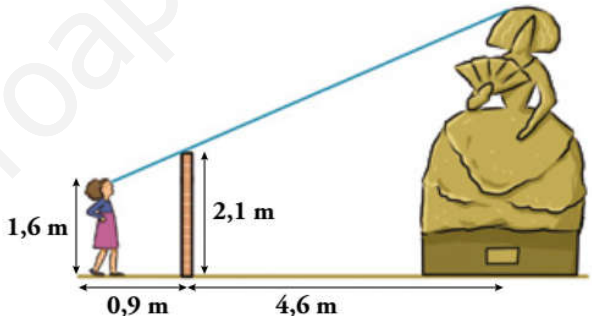
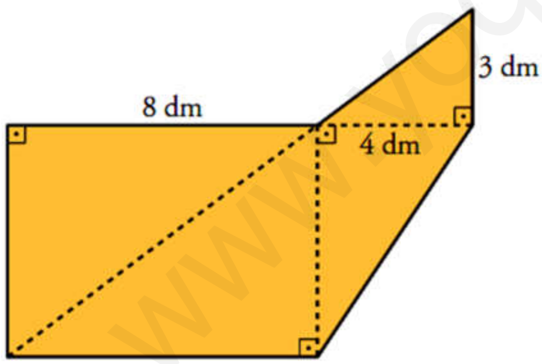
1.- Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. Si el árbol pequeño mide 2,5 m, ¿cuánto miden los demás?

2.- En un mapa, dos poblaciones aparecen separadas 7,5 cm.

c) ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre los dos pueblos es de 153 km?
d) ¿Cuál sería la distancia real entre dos poblaciones que distan 12,25 cm?

3.- ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escultura, sabiendo que Paula la ve alineada con el borde de la valla?





4.- Calcula el área y el perímetro de la figura de la izquierda.

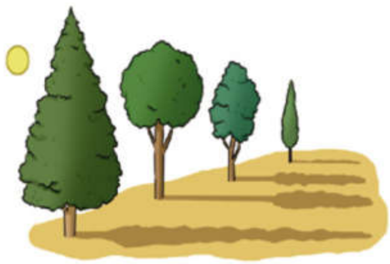
5.- Un rectángulo ABCD mide 6 cm de largo, y otro semejante a él A'B'C'D' tiene 3 cm de ancho. La razón de semejanza del primero al segundo es como 2 es a 3. Calcula las áreas de ambos rectángulos y la razón entre ellas. ¿Qué relación existe entre esta última y la razón de semejanza?

Bonus.- De dos segmentos proporcionales cuya razón es 3/5, uno de ellos mide 21 cm. Calcula cuáles pueden ser las medidas del otro.

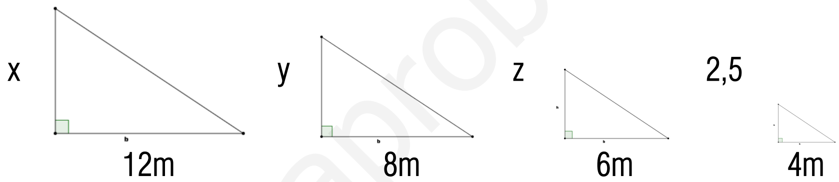
SOLUCIONES

1.- Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. Si el árbol pequeño mide 2,5 m, ¿cuánto miden los demás?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.2) (B.3.2.1) (B.3.4.2)



Mirando a la figura podemos observar que la altura y la sombre forman triángulos rectángulos. Como es a la misma hora, esos 4 triángulos son semejantes porque tienen los mismos ángulos y por ello, sus lados son proporcionales.



Si llamamos x a la altura del grande, y a la del segundo y z a la del tercero, hacemos proporcionalidad entre la altura de los triángulos y las sombras.

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{8}=\frac{z}{6}=\frac{2,5}{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{z}{6}=\dfrac{2,5}{4} & \rightarrow \quad z=\dfrac{6\cdot 2,5}{4}=3,75\ m \\ \dfrac{y}{8}=\dfrac{2,5}{4} & \rightarrow \quad y=\dfrac{8\cdot 2,5}{4}=5\ m \\ \dfrac{x}{12}=\dfrac{2,5}{4} & \rightarrow \quad x=\dfrac{12\cdot 2,5}{4}=7,5\ m \end{cases}$$

Por tanto, las alturas de los árboles en orden decreciente son: 7,5 m; 5 m; 3,75 m y 2,5 m.

2.- En un mapa, dos poblaciones aparecen separadas 7,5 cm. **a)** ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre los dos pueblos es de 153 km? **b)** ¿Cuál sería la distancia real entre dos poblaciones que distan 12,25 cm?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.4.2) (B.3.2.1)

Como ya deberíamos saber, ***la escala*** es la razón de proporcionalidad entre dos figuras, una la realidad y otra, la representación en un mapa o plano, por tanto, para calcularla basta con dividir la distancia real entre la distancia en el plano, eso sí, siempre en las mismas unidades:

$$E=\frac{\text{distancia real}}{\text{distancia en el mapa}}=\frac{153\ km}{7,5\ cm}=\frac{15.300.000\ cm}{7,5\ cm}=2.040.000 \quad \rightarrow \quad E=1:2040000$$

Conocida la escala, para calcular la distancia real entre dos ciudades separadas 12,25 cm basta con multiplicar esta distancia por la escala.

$$E=\frac{\text{distancia real}}{\text{distancia en el mapa}}=\frac{d_{real}}{d_{mapa}} \quad \rightarrow \quad \text{d}_{real}=E\cdot d_{mapa}=2040000\cdot 12,25\ cm=24.990.000\ cm$$

Que expresada en kilómetros sería:

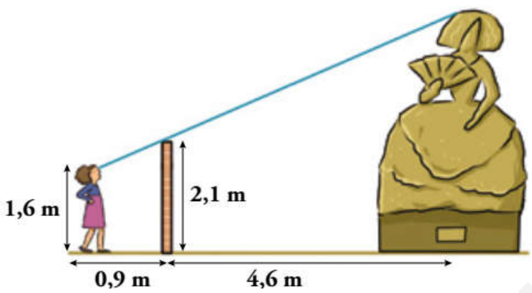
$$\text{d}_{real}=E\cdot d_{mapa}=24.990.000\ cm=248,9\ km$$

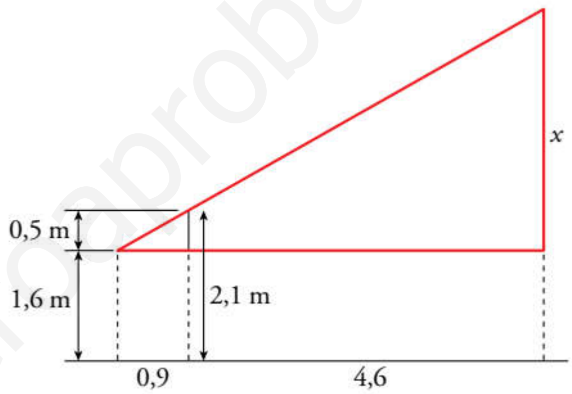
Por tanto, la escala es E=1:2040000 y la distancia real es de 249,0 km.

3.- ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escultura, sabiendo que Paula la ve alineada con el borde de la valla?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.2) (B.3.2.1) (B.3.4.1)

En la figura que nos dan no podemos aplicar semejanza de triángulos, porque en realidad no tenemos no tenemos dos triángulos, así que tenemos que buscarlos. Si trazamos una línea desde la altura de Paula, ahora sí tenemos dos triángulos en posición tales, porque uno está dentro del otro y sus alturas son líneas verticales y por tanto paralelas.





Para calcular la altura del triángulo pequeño, restamos a la altura del muro, la altura de Paula, y eso nos da 0,5 metros. Si llamamos x a la altura del triángulo grande, dicha altura la vamos a calcular escribiendo una proporcionalidad, ya que, si los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{x}{0,9+4,6}=\frac{0,5}{0,9} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{5,5}=\frac{0,5}{0,9} \quad \rightarrow \quad x=\frac{5,5\cdot 0,5}{0,9}=3,06\ m$$

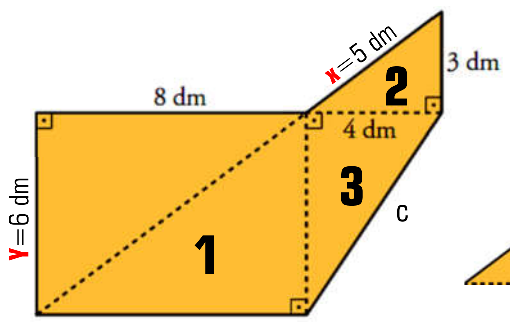
X no es la altura de la escultura, sino que es la distancia entre la cabeza de Paula y la cabeza de la escultura. Para calcular la altura de la escultura sumaremos a x la altura de Paula.

$$h=3,06+1,6=4,66\ m$$

Por tanto, la escultura mide 4,66 metros de altura.

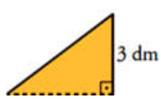
4.- Calcula el área y el perímetro de la figura de la izquierda.

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.3) (B.3.2.1) (B.3.3.1) (B.3.3.2) (B.3.4.1)



Empezaremos calculando el perímetro sumando las longitudes de todos los lados. Si llamamos ***x***, ***y***, y ***z*** a los lados desconocidos:

$$P=3+x+8+y+8+z$$



Para calcular ***x***, utilizamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo **2** de catetos 3 y 4 dm:

$$x^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\ dm$$

Para calcular **y,** nos fijamos en que la diagonal del rectángulo y la hipotenusa del triángulo son la misma recta, por tanto el triángulo **1** y el triángulo **2** son semejantes por tener los mismos ángulos.
Si son semejantes, sus lados son proporcionales y por tanto si dividimos la altura del 1 entre la altura del 2, obtendremos el mismo resultado que si dividimos la base del 1 entre la del 2:

$$\frac{y}{3}=\frac{8}{4} \quad \rightarrow \quad y=\frac{3\cdot 8}{4}=\frac{24}{4}=6\ dm$$

Para calcular el lado **z** volvemos a utilizar el teorema de Pitágoras, pero esta vez en el triángulo rectángulo **3** de catetos 4 y 6 decímetros:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad z=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=7,21\ dm$$

Con todos estos datos el perímetro es:

$$P=3+x+8+y+8+z=3+5+8+6+8+7,21=37,21\ dm$$

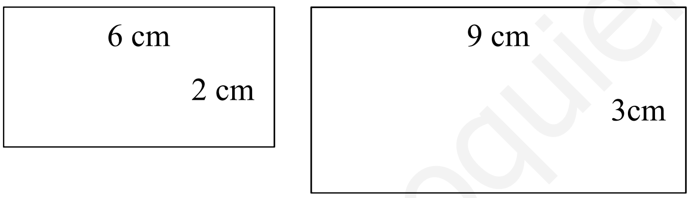
Para calcular el área de la figura, lo podemos hacer de forma sencilla sumando el área del rectángulo y las de los triángulos 2 y 3.

$$Área=A_{Rectángulo}+A_{Triángulo 2}+A_{Triángulo 3}=8\cdot 6+\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{4\cdot 6}{2}=48+6+12=66\ dm^2$$

Por tanto el perímetro es de 37,21 dm mientras que el área es de 66 dm²

5.- Un rectángulo ABCD mide 6 cm de largo, y otro semejante a él A'B'C'D' tiene 3 cm de ancho. La razón de semejanza del primero al segundo es como 2 es a 3. Calcula las áreas de ambos rectángulos y la razón entre ellas. ¿Qué relación existe entre esta última y la razón de semejanza?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.3) (B.3.2.1) (B.3.4.1)



Que la razón de semejanza es como 2 es a 3 quiere decir que lo que mide en el primero 2, en el otro mide 3, por tanto, la razón es $\frac{2}{3}$.

- Si en el ABCD el largo mide 6, en el A'B'C'D' medirá: $6:\frac{2}{3}=\frac{18}{2}=9$ cm
- Si en el A'B'C'D' el ancho mide 3 cm, el ancho del ABCD medirá: $3\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$ cm

✓ El área del rectángulo ABDC es $6\cdot 2=12$ cm²

✓ El área de rectángulo A'B'C'D' es $9\cdot 3=27$ cm²

La razón de sus áreas es: $r_{áreas}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ y la razón de sus longitudes es de $r_{longitudes}=\frac{2}{3}$

Por tanto, vemos que se cumple aquello que vimos en clase de que decía que, si la razón de semejanza de dos figuras semejantes era k, la razón de sus áreas es k^2.

$$r_{longitudes}=\frac{2}{3} \quad \leftrightarrow \quad r_{areas}=\frac{4}{9} \quad \rightarrow \quad \left(r_{longitudes}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}=r_{areas} \quad \rightarrow \quad r_l^2=r_a$$

Bonus.- De dos segmentos proporcionales cuya razón es 3/5, uno de ellos mide 21 cm. Calcula cuáles pueden ser las medidas del otro.

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.2.1) (B.3.4.1)

Si tenemos dos segmentos proporcionales y la razón de semejanza entre ellos es de 3/5, quiere esto decir que uno es más grande que el otro. El problema que tenemos es que nos sabemos si el que mide 21 centímetros es el grande o el pequeño:

- Si el de 21 cm es el grande: $L = 21 \quad \rightarrow \quad l = 21 \cdot \frac{3}{5} = 12{,}6\ cm$ el otro mide 12,6 cm
- Si el de 21 cm es el pequeño: $l = 21 \quad \rightarrow \quad L = 21 : \frac{3}{5} = 35\ cm$ el otro mide 35 cm