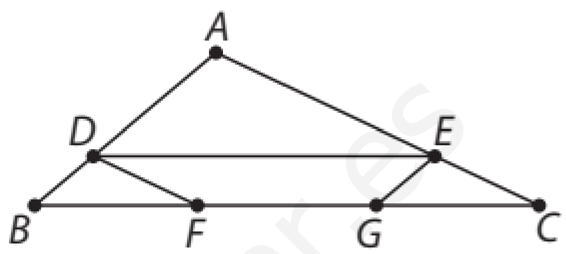
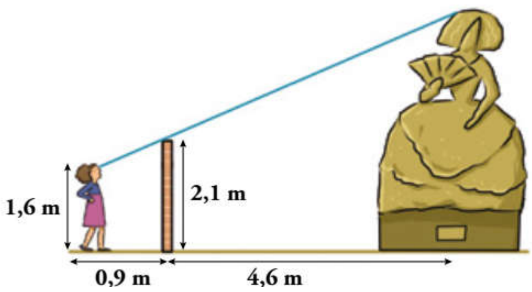
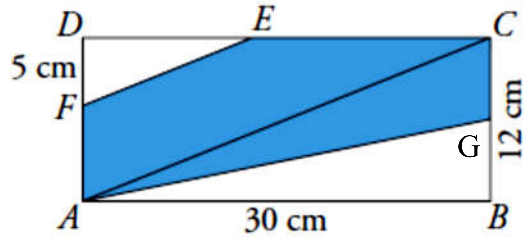
1.- En la figura de la derecha: AB=6 cm, AC=9 cm, BC=12 cm y AD=4 cm. Halla la medida de los lados de los triángulos ADE, DBF y ECG.





2.- ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escultura, sabiendo que Paula la ve alineada con el borde de la valla?

3.- Si el segmento DF mide 5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono FECGA?



4.- En un mapa, dos poblaciones aparecen separadas 7,5 cm.

a) ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre los dos pueblos es de 153 km?
b) ¿Cuál sería la distancia real entre dos poblaciones que distan 12,25 cm?

5.- Un rectángulo ABCD mide 6 cm de largo, y otro semejante a él A'B'C'D' tiene 3 cm de ancho. La razón de semejanza del primero al segundo es como 2 es a 3. Calcula las áreas de ambos rectángulos y la razón entre ellas. ¿Qué relación existe entre esta última y la razón de semejanza?

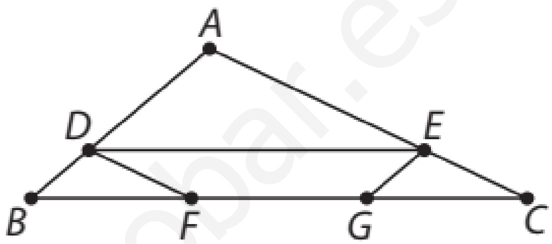
Bonus.- Dibuja un triángulo rectángulo y traza la altura correspondiente a la hipotenusa. ¿Son semejantes los dos triángulos en que queda dividido el anterior? Justifica tu respuesta

SolucioneS

1.- En la figura siguiente: AB=6 cm, AC=9 cm, BC=12 cm y AD=4 cm. Halla la medida de los lados de los triángulos ADE, DBF y ECG.

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.2) (B.3.2.1) (B.3.4.1)

En la figura aparecen varios triángulos encajados unos dentro de otros en lo que en matemáticas llamamos en posición Thales. Decimos que dos triángulos están en posición Tales cuando dos de sus lados están sobre las mismas rectas y los otros dos lados son paralelos.



Según el Teorema de Thales, toda paralela a un lado de un triángulo, que corta a los otros dos lados, determina un triángulo pequeño ADE semejante al grande ABC.

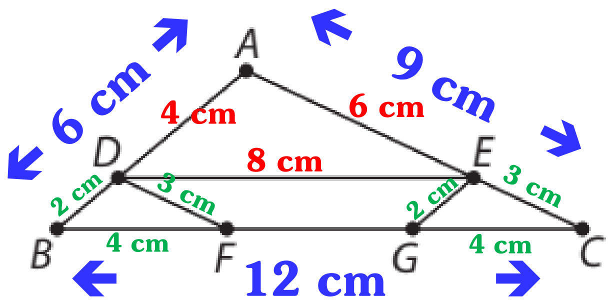
Luego aplicando semejanza de triángulos en los triángulos ABC y ADE tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad\rightarrow\quad \frac{6}{4}=\frac{9}{\overline{AE}}=\frac{12}{\overline{DE}} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{6}{4}=\dfrac{9}{\overline{AE}} & \rightarrow \quad \overline{AE}=\dfrac{9\cdot 4}{6}=\dfrac{36}{6}=6\ cm\\[2ex] \dfrac{6}{4}=\dfrac{12}{\overline{DE}} & \rightarrow \quad \overline{DE}=\dfrac{12\cdot 4}{6}=\dfrac{48}{6}=8\ cm\end{cases}$$

Si nos fijamos los triángulos ABC y DBF también son semejantes por estar otra vez en posición Thales. Además, si el segmento AB mide 6 cm y el AD mide 4, entonces DB mide 2 cm.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} \quad\rightarrow\quad \frac{6}{2}=\frac{9}{\overline{DF}}=\frac{12}{\overline{BF}} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{6}{2}=\dfrac{9}{\overline{DF}} & \rightarrow \quad \overline{DF}=\dfrac{9\cdot 2}{6}=\dfrac{18}{6}=3\ cm\\[2ex] \dfrac{6}{2}=\dfrac{12}{\overline{BF}} & \rightarrow \quad \overline{BF}=\dfrac{12\cdot 2}{6}=\dfrac{24}{6}=4\ cm\end{cases}$$

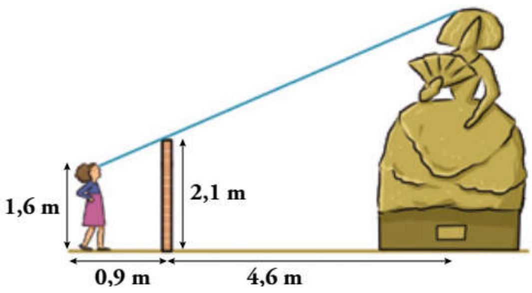
Para calcular los lados del triángulo EGC, si el segmento AC mide 9 cm y el segmento AE mide 6, entonces el EC mide 3 cm. lo mismo que el DF. Lo que implica que los triángulos EGC y DBF sean iguales ya que sus ángulos son iguales.

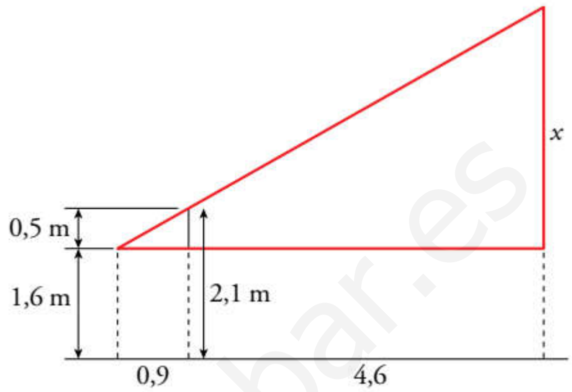


2.- ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escultura, sabiendo que Paula la ve alineada con el borde de la valla?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.2) (B.3.2.1) (B.3.4.1)

En la figura que nos dan no podemos aplicar semejanza de triángulos, porque en realidad no tenemos no tenemos dos triángulos, así que tenemos que buscarlos. Si trazamos una línea desde la altura de Paula, ahora sí tenemos dos triángulos en posición tales, porque uno está dentro del otro y sus alturas son líneas verticales y por tanto paralelas.





Para calcular la altura del triángulo pequeño, restamos a la altura del muro, la altura de Paula, y eso nos da 0,5 metros. Si llamamos x a la altura del triángulo grande, dicha altura la vamos a calcular escribiendo una proporcionalidad, ya que, si los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{x}{0,9+4,6}=\frac{0,5}{0,9} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{5,5}=\frac{0,5}{0,9} \quad \rightarrow \quad x=\frac{5,5\cdot 0,5}{0,9}=3,06\ m$$

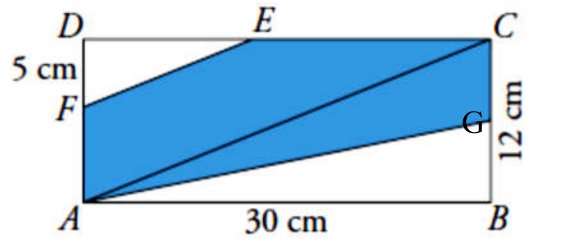
X no es la altura de la escultura, sino que es la distancia entre la cabeza de Paula y la cabeza de la escultura. Para calcular la altura de la escultura sumaremos a x la altura de Paula.

$$h=3,06+1,6=4,66\ m$$

Por tanto, la escultura mide 4,66 metros de altura.

3.- Si el segmento DF mide 5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono FECGA?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.3) (B.3.2.1) (B.3.3.1) (B.3.3.2) (B.3.4.1)



Sabemos que el perímetro, P, de cualquier figura es la longitud de su parte exterior, o, mejor dicho, la longitud de la cuerda necesaria para rodearlo.
En nuestro caso el perímetro será la suma de sus lados exteriores:

$$Perímetro = P=\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FA}+\overline{AG}+\overline{GC}$$

Para calcular la longitud EC, primero hemos de calcular DE, y para ello vamos a hacer semejanza entre los triángulos FDE y ADC en los que sus ángulos son iguales porque están en posición Thales.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{DA}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{DE}}{5}=\frac{30}{12} \quad \rightarrow \quad \overline{DE}=\frac{5\cdot 30}{12}=12,5\ cm \quad \rightarrow \quad \overline{CE}=30-\overline{DE}=30-12,5=17,5\ cm$$

Con estos dos datos vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras en el triángulo FDE que es rectángulo para calcular el lado FE. Dicho teorema afirma que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa (lado más largo) al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los otros dos lados), por tanto:

$$\left(\overline{FE}\right)^2=\left(\overline{FD}\right)^2+\left(\overline{DE}\right)^2 \quad\rightarrow\quad \overline{FE}=\sqrt{\left(\overline{FD}\right)^2+\left(\overline{DE}\right)^2}=\sqrt{12,5^2+5^2}=13,46 \quad\rightarrow\quad \overline{FE}=13,46\ cm$$

El segmento FA lo calculamos restándole 5 a 12. $\overline{FA}=\overline{DA}-\overline{DF}=12-5=7 \quad\rightarrow\quad \overline{FA}=7\ cm$

Cono no nos dicen nada del segmento BG, suponemos que es la mitad del BC. $\overline{BG}=\overline{GC}=6cm$
Para calcular la longitud AG, vamos a utilizar el Teorema de Pitágoras puesto que el triángulo ABG es rectángulo. Dicho teorema afirma que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa (lado más largo) al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los otros dos lados), por tanto:

$$\left(\overline{AG}\right)^2=\left(\overline{AB}\right)^2+\left(\overline{BG}\right)^2 \quad\rightarrow\quad \overline{AG}=\sqrt{\left(\overline{AB}\right)^2+\left(\overline{BG}\right)^2}=\sqrt{30^2+6^2}=\sqrt{936}=30,6 \quad\rightarrow\quad \overline{AG}=30,6\ cm$$

Con todos estos datos ya podemos calcular el perímetro:

$$Perímetro=P=\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FA}+\overline{AG}+\overline{GC}=17,5+13,46+7+30,6+6=74,56\ cm$$

Para calcular el área del pentágono azul, vamos a restar al área del rectángulo, las dos áreas de los triángulos blancos.

$$Àrea=A=A_{\square}-A_{\square}-A_{\Delta}=30.12-\frac{5\cdot 12,5}{2}-\frac{30\cdot 6}{2}=360-31,25-90=238,75\ cm^2$$

Por tanto, el perímetro es de 74,56 cm y el área de 238,75 cm².

4.- En un mapa, dos poblaciones aparecen separadas 7,5 cm. **a)** ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre los dos pueblos es de 153 km? **b)** ¿Cuál sería la distancia real entre dos poblaciones que distan 12,25 cm?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.4.2) (B.3.2.1)

Como ya deberíamos saber, ***la escala*** es la razón de proporcionalidad entre dos figuras, una la realidad y otra, la representación en un mapa o plano, por tanto, para calcularla basta con dividir la distancia real entre la distancia en el plano, eso sí, siempre en las mismas unidades:

$$E=\frac{\text{distancia real}}{\text{distancia en el mapa}}=\frac{153\ km}{7,5\ cm}=\frac{15.300.000\ cm}{7,5\ cm}=2.040.000 \quad\rightarrow\quad E=1:2040000$$

Conocida la escala, para calcular la distancia real entre dos ciudades separadas 12,25 cm basta con multiplicar esta distancia por la escala.

$$E=\frac{\text{distancia real}}{\text{distancia en el mapa}}=\frac{d_{real}}{d_{mapa}} \quad\rightarrow\quad \mathrm{d}_{real}=E\cdot d_{mapa}=2040000\cdot 12,25\ cm=24.990.000\ cm$$

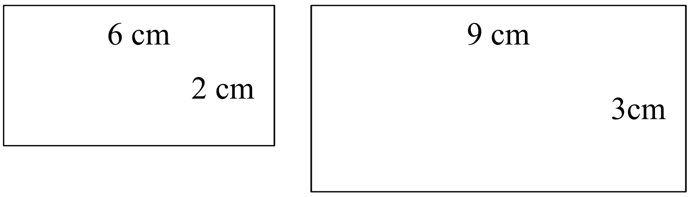
Que expresada en kilómetros sería:

$$\mathrm{d}_{real}=E\cdot d_{mapa}=24.990.000\ cm=248,9\ km$$

Por tanto, la escala es E=1:2040000 y la distancia real es de 249,0 km.

5.- Un rectángulo ABCD mide 6 cm de largo, y otro semejante a él A'B'C'D' tiene 3 cm de ancho. La razón de semejanza del primero al segundo es como 2 es a 3. Calcula las áreas de ambos rectángulos y la razón entre ellas. ¿Qué relación existe entre esta última y la razón de semejanza?

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.3) (B.3.2.1) (B.3.4.1)



Que la razón de semejanza es como 2 es a 3 quiere decir que lo que mide en el primero 2, en el otro mide 3, por tanto, la razón es $\frac{2}{3}$.

- Si en el ABCD el largo mide 6, en el A'B'C'D' medirá: $6:\frac{2}{3}=\frac{18}{2}=9$ cm
- Si en el A'B'C'D' el ancho mide 3 cm, el ancho del ABCD medirá: $3\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$ cm

✓ El área del rectángulo ABDC es $6\cdot2=12$ cm^2

✓ El área de rectángulo A'B'C'D' es $9\cdot3=27$ cm^2

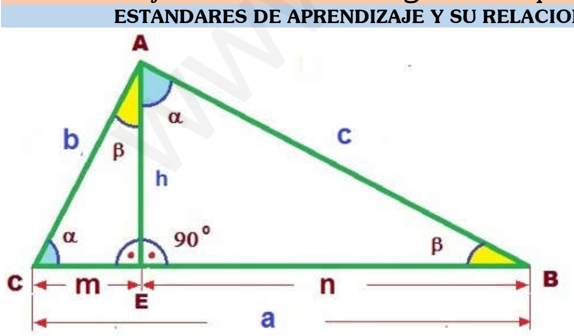
La razón de sus áreas es: $r_{áreas}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ la razón de sus longitudes es de $r_{longitudes}=\frac{2}{3}$

Por tanto, vemos que se cumple aquello que vimos en clase de que decía que, si la razón de semejanza de dos figuras semejantes era k, la razón de sus áreas es k^2.

$$r_{longitudes}=\frac{2}{3} \quad \leftrightarrow \quad r_{areas}=\frac{4}{9} \quad \to \quad \left(r_{longitudes}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}=r_{areas} \quad \to \quad r_l^2=r_a$$

Bonus.- Dibuja un triángulo rectángulo y traza la altura correspondiente a la hipotenusa. ¿Son semejantes los dos triángulos en que queda dividido el anterior? Justifica tu respuesta

ESTANDARES DE APRENDIZAJE Y SU RELACION CON LAS COMPETENCIAS CLAVE: (B.3.1.2) (B.3.2.1) (B.3.4.1)



Sea un triángulo rectángulo de ángulos α y β, si trazamos la altura sobre la hipotenusa se crean otros dos triángulos rectángulos. Como uno de los ángulos es o α ó β, entonces el otro será o β ó α.

Así que como podemos observar en la figura de la izquierda, los ángulos son iguales en los tres triángulos: α, β y 90°.

Y si los tres ángulos son iguales, los tres triángulos son semejantes.