1.- Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz $D = A^T \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?
b) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.

Nota: A^T denota la matriz transpuesta de la matriz A.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3 NO 2×2 no se puede calcular

A · B

$$B^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+4c & b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2a + 3c = 1$
$2b + 3d = 0 \rightarrow b = -\frac{3d}{2}$
$a + 4c = 0$
$b + 4d = 1$

$-\frac{3d}{2} + \frac{4d}{1} = \frac{1}{1}$

$\frac{-3d + 8d}{\cancel{2}} = \frac{2}{\cancel{2}}$

$5d = 2$

$\underline{\underline{d = 2/5}}$

$b = -3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) : 2$

$= \frac{-6}{5} : \frac{2}{1} =$

$= \frac{-6}{10} = \underline{\underline{\frac{-3}{5} = b}}$

$a = -4c$

$2(-4c) + 3c = 1 \qquad -8c + 3c = 1 \qquad -5c = 1$

$c = -1/5 \qquad a = 4/5$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

2.- Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz C^{40}
b) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$

a)

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$C^3 = C^2 \cdot C = I \cdot C = C$

$C^4 = C^3 \cdot C = C \cdot C = C^2 = I$

$C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = \underline{\underline{I}}$

b) $XA + 3B = C \qquad XA = C - 3B$

$X \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (C-3B)\cdot A^{-1} \Rightarrow \quad X = (C-3B)\cdot A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{[\mathrm{adj}(A)]^T}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ +2 & 1 \end{pmatrix} \qquad [\mathrm{Adj}(A)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1-2 = -1$$

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = (C-3B)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- Considérense las matrices A, B y C siguientes, donde a, b, c ∊ R

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique

$C \cdot A = B \cdot C$ y $|C| = 2$

Nota: $|C|$ es el determinante de la matriz C

b) Calcúlese, para los valores de a = b = c = 1 , $C^{-1} \cdot B \cdot C$ y B^{100}

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2a & -6+2a \\ -3b+2c & 3b+2c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix}$$

Igualando

$$\left.\begin{array}{l} 6+2a=0 \\ -6+2a=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \cancel{6}+2a=0 \\ \cancel{-6}+2a=0 \end{array}\right\} \qquad 4a=0 \to \underline{a=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3\cancel{b}+2c=-b \\ 3\cancel{b}+2c=c \end{array}\right\}$$

$4c = -b + c \Rightarrow \boxed{b = -3c}$

$|C| = 2 \qquad -2c + a\cancel{b} = 2 \qquad -2c = 2 \qquad \underline{c = -1}$

$\underline{b = 3}$

Solución: $a = 0 \quad b = 3 \quad c = -1$

b) $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Adj(C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad [Adj(C)]^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$|C| = -3$ $\quad C^{-1} = \dfrac{[Adj(C)]^T}{|C|} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

B^{100}

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -B$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -B$$

$$B^{100} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -B$$

$B^{IMPAR} = B$

$B^{PAR} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -B$

4.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5a^2 & 10a+15a \\ 2a+3a & 5a^2+9 \end{pmatrix}$

$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 5a^2+4 & 25a \\ 5a & 5a^2+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -25a \\ -5a & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a^2-6 & 0 \\ 0 & 5a^2-6 \end{pmatrix}$

$A^2 - 5A = -I \qquad \begin{pmatrix} 5a^2-6 & 0 \\ 0 & 5a^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Igualando: $5a^2 - 6 = -1 \qquad 5a^2 = 5 \qquad a^2 = 1 \qquad a = \sqrt{1} = \pm 1$

Soluciones $a = 1 \quad a = -1$

a no tiene solución

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.- Se consideran las matrices A y B dadas por

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$

b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b+ac & 2c & 1 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$

Igualando

$a - 1 = 2a \Rightarrow \underline{\underline{-1 = a}}$

$b - 1 = 2b + ac \rightarrow b - 1 = 2b - c \Rightarrow -1 = b - c \rightarrow$

$c - 1 = 2c \rightarrow \underline{\underline{-1 = c}} \qquad -1 = b + 1 \qquad \underline{\underline{b = -2}}$

Soluciones $a = -1 \quad b = -2 \quad c = -1$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ para que sea invertible $|A| \neq 0$

$|A| = 1$ ES INVERTIBLE $A^{-1} = \dfrac{[adj(A)]^T}{|A|}$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [Adj(A)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.- Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.
b) Para a = b = 2, calcule la matriz inversa de A.

Si $A = A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I$

$A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando

$a^2+1=1$	$a^2=0$	$a=0$	Soluciones
$2a=0$		$a=0$	
$b^2=1$	$b=\sqrt{1}$	$b=\pm 1$	$a=0$
$2a=0$		$a=0$	$b=\pm 1$
$a^2+1=1$	$a^2=0$	$a=0$	

b) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = 8-2 = 6$$

$$\{Adj(A)\}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

7.- Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.
b) Para a = 1, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que AX = B

a) para que no sea invertible $|A| = 0$

$$|A| = 6a^2 + 16 + \cancel{12a} - \cancel{12a} - 4a^2 - 24 = 2a^2 - 8 = 0$$

$$a = \sqrt{8/2} = \sqrt{4} \qquad a = \pm 2$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$[\text{Adj}(A)]^T = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -6$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para a = 2, calcule, si existe, la matriz X que satisface AX = B

$|A| = -2a + a - 1 = -a - 1$

$-a - 1 = 0 \qquad \underline{\underline{a = -1}}$

Si $a \neq -1$ tiene inversa

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$AX = B \qquad |A| = -3$

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot X = A^{-1} B$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad [Adj(A)]^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$