

2. (Reserva 2008) a) Determinar los valores de los parámetros a y b para que $f(x) = \begin{cases} \frac{a+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifique las hipótesis del teorema de Lagrange en $[-1, 3]$. (1,5 pts.)

La 1ª rama es continua y derivable en su dominio particular ($x=1$ no pertenece a él), y la 2ª rama también (por ser exponencial). Veamos la continuidad en $x=0$:

1.) $\exists f(0) = -a$ (1ª rama) 0,1/

2.) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a+x}{x-1} = -a$ 0,15/

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + b) = 1+b$ 0,15/

$\Rightarrow$ continua $-a = 1+b$ (*) 0,1/

($\Leftarrow$ 0,5)

Veamos la derivabilidad en $x=0$:

$f'(0^-) = \left(\frac{a+x}{x-1} \right)'_{x=0} = \frac{x-1-(a+x)}{(x-1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{-1-a}{(x-1)^2} \Big|_{x=0} = -1-a$ 0,05/

$f'(0^+) = (e^x + b)'_{x=0} = e^x \Big|_{x=0} = 1$ 0,05/

$\Rightarrow$ derivable $-1-a = 1$ 0,1/

$\boxed{a = -2}$ 0,25/

$\Downarrow$

$\boxed{b = 1}$ 0,25/

La $f(x)$ continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$ que se obtiene es:

$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

nota: - Se baja nota por fallos de lenguaje matemático: omitir $()$, dejar $\frac{a}{-1}$

- " " " " falta de orden en el planteamiento
- " " " " fallos graves de concepto

b) Para esos valores de a y b, hallar el valor o valores cuya existencia garantiza el teorema.

(0,5 ptos.)

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua } \forall x \in [-1, 3] \\ f(x) \text{ derivable } \forall x \in (-1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (-1, 3) / \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{e^3 + 1 - \frac{3}{2}}{4} = \frac{2e^3 - 1}{8} \approx 4,90$$

Valor a calcularlo:

$$1^{\circ} \text{ rama: } \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2e^3 - 1}{8}; (x-1)^2 = \frac{8}{2e^3 - 1} \Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{8}{2e^3 - 1}}$$

$$2^{\circ} \text{ rama: } e^x = \frac{2e^3 - 1}{8}; \boxed{x = \ln \frac{2e^3 - 1}{8}} \approx 1,59 \in (0, 3)$$

2

3. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ en $x=2$.

(8 p pág. 59)

(1 pto.)

$$x=2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow P(2, 3) \text{ pto. de tangencia}$$

$$f'(x) = [(x+1) \cdot (3-x)^{-1/3}]' = \sqrt[3]{3-x} - (x+1) \cdot \frac{1}{3} (3-x)^{-4/3} = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

$$f'(2) = 1 - \frac{3}{3} = 0 \Rightarrow y - 3 = 0(x - 2); \boxed{y = 3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

explicación
unifica:

1

nota: se hizo nota por desorden en el procedimiento

1. Calcular:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x}}{2} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4} - \sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{2} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} = \infty$$

nota: También se puede hacer mediante el conjugado, pero es más prolijo...

$$b) \text{ (Sept 2015) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x e^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{e^{\sin x} + x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

(1 pto.)

nota: se baixa nota por fallos de lenguaje matemático, o por fallos graves de conceptos (p.ej. indicar que $0 \cdot 0 = 0$)

5. (Sept 2002) Se quiere vallar un recinto rectangular aprovechando que uno de los lados tiene una tapia anexa, y se dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.

a) Hallar las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.

(1,5 pts.)



$$\left. \begin{array}{l} \text{Restricción: } x + 2y = 300 \\ \text{Función a Maximizar: } A(x, y) = xy \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,11 \\ 0,4 \end{array}$$

$$x = 300 - 2y \Rightarrow A(y) = (300 - 2y)y = 300y - 2y^2 \quad 0,11$$

$$A'(y) = 300 - 4y = 0; \quad 300 = 4y; \quad y = 75 \text{ m} \quad 0,11$$

$$A''(y) = -4; \quad A''(75) < 0 \Rightarrow \text{Se confirma que es un máximo} \quad 0,11$$

$$y = 75 \text{ m} \Rightarrow x = 300 - 2 \cdot 75 = 300 - 150 = 150 \text{ m.} \quad 0,11$$

0,4/

Soluc: El recinto máximo que se puede acotar será un rectángulo cuyos lados anexos a la tapia miden 75 m y cuyo lado opuesto a la tapia es de 150 m.

nota: se baja nota por falta de orden en el procedimiento

b) Calcular el área de dicho recinto.

(0,25 pts.)

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura} = 75 \cdot 150 = 11.250 \text{ m}^2$$

1,75