

REALIZA EL ESTUDIO COMPLETO DE ESTAS FUNCIONES:

$$A) f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10 \quad B) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$C) f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x \quad D) f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

$$E) f(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad F) f(x) = x^3 - 6x \quad G) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$H) f(x) = x^3 - 9x \quad I) f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1} \quad J) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$K) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} \quad L) f(x) = x \cdot e^x \quad M) f(x) = \frac{(x - 2)^2}{x}$$

$$N) f(x) = (x + 3)(x - 1)^2 \quad O) f(x) = \frac{x}{x^2 - 9} \quad P) f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$Q) f(x) = \frac{1}{e^x - 2} \quad R) f(x) = \frac{e^x}{x} \quad S) f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$T) f(x) = \ln\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) \quad U) f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad V) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$W) f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad X) f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \quad Y) f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$Z) f(x) = \ln(5 - x^2)$$

$$A) f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$$

① Dominio:

$$D = \mathbb{R} \quad (\text{por ser función polinómica})$$

② Puntos de corte con los ejes:

con el eje $X \Rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10 = 0 \begin{cases} \rightarrow x_1 = -1'133 \Rightarrow PC(-1'133, 0) \\ \rightarrow x_2 \text{ y } x_3 \rightarrow \text{Complejas} \end{cases}$$

con el eje $Y \Rightarrow x = 0$

$$f(0) = 10 \Rightarrow PC(0, 10)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{3} - 3(-x)^2 + 5(-x) + 10 = -\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x + 10$$

$$-f(x) = -\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10\right) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x - 10$$

$\Rightarrow$ No es simétrica.

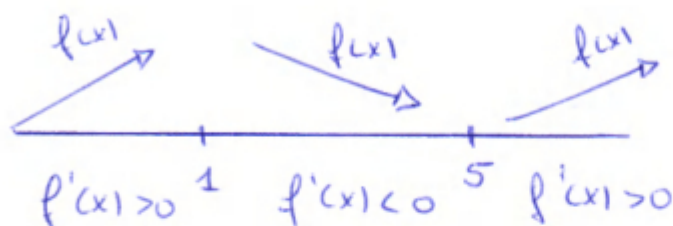
④ Asíntotas:

No presenta ninguna asíntota por ser una función polinómica.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$$

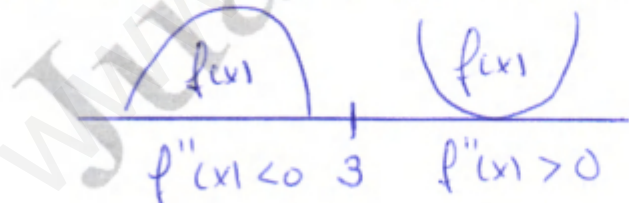
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

Crece: $]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$ Decrece: $]1, 5[$ Máximo en $x = 1 \rightarrow \text{Máx} (1, f(1)) = (1, \frac{37}{3})$ Mínimo en $x = 5 \rightarrow \text{Mín} (5, f(5)) = (5, \frac{5}{3})$

⑥ Curvatura:

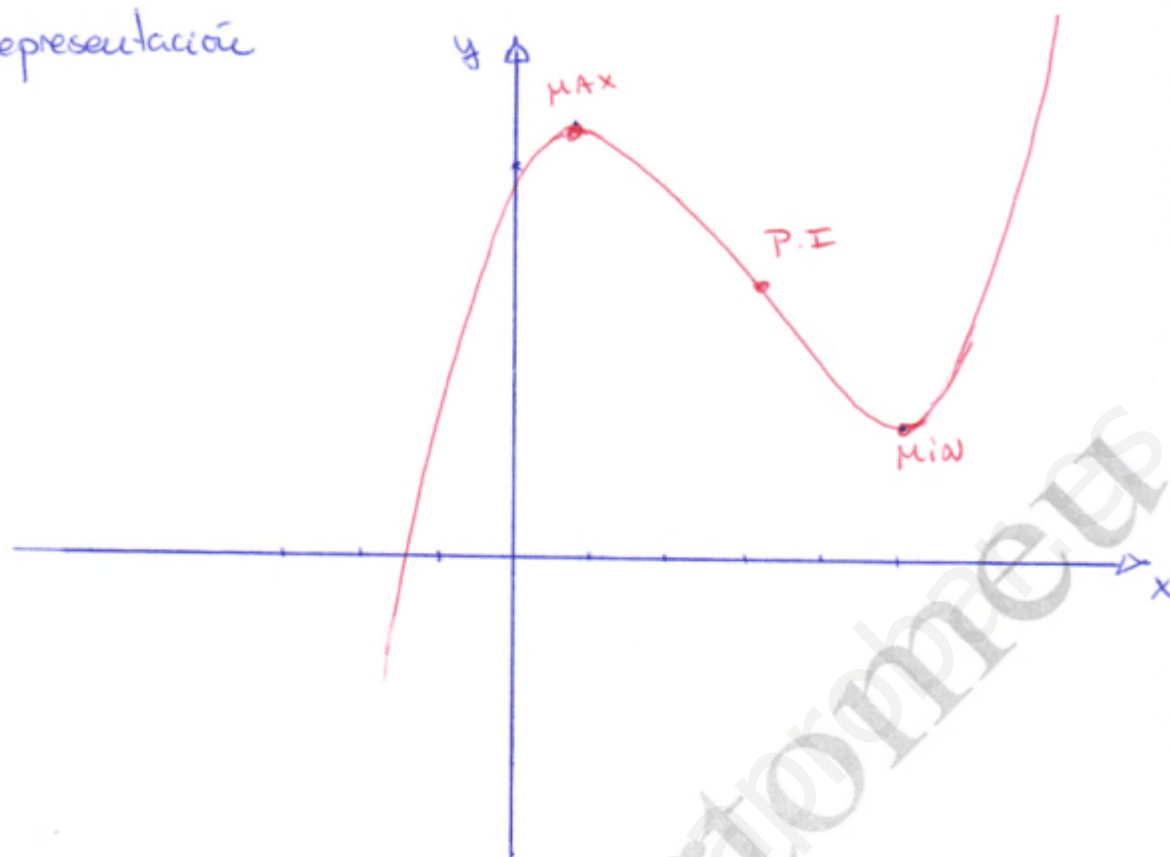
$$f'(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

cóncava: $]3, +\infty[$ convexa: $]-\infty, 3[$ Punto Inflexión en $x = 3$

$$P.I (3, f(3)) = (3, 7)$$

⑦ Representación



$$B) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

① Dominio:

$$x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ solución} \Rightarrow \text{No corta.}$$

$$\text{Con el eje } Y \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \text{ está excluido del dominio} \Rightarrow \text{No corta.}$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+1}{x} \\ f(-x) &= \frac{(-x)^2+1}{(-x)} = \frac{x^2+1}{-x} \\ -f(x) &= -\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{-x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } f(x) = -f(x), \text{ la función} \\ \text{es impar o simétrica respecto} \\ \text{al origen.} \end{array}$$

④ Asíntotas:

A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ es A. Vertical.

A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-x)^2+1}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{-x} = -\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{No hay} \\ \text{asíntotas} \\ \text{horizontales} \end{array}$$

A. Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = 0$$

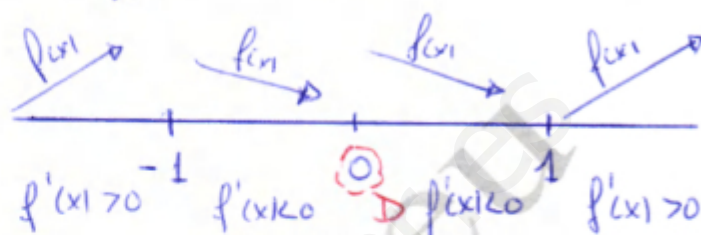
$$\Rightarrow y = x \text{ es A. Oblicua.}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

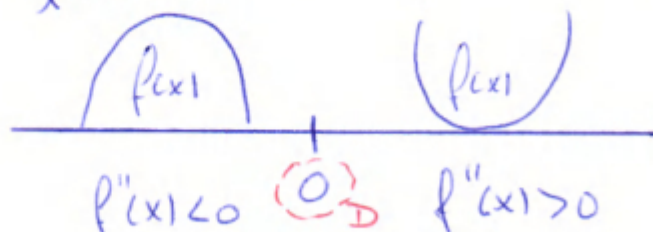
Creciente: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ Decreciente: $]-1, 0[\cup]0, 1[$ Máximo en $x = -1 \Rightarrow \text{Máx}(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ Mínimo en $x = 1 \Rightarrow \text{Mín}(1, f(1)) = (1, 2)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

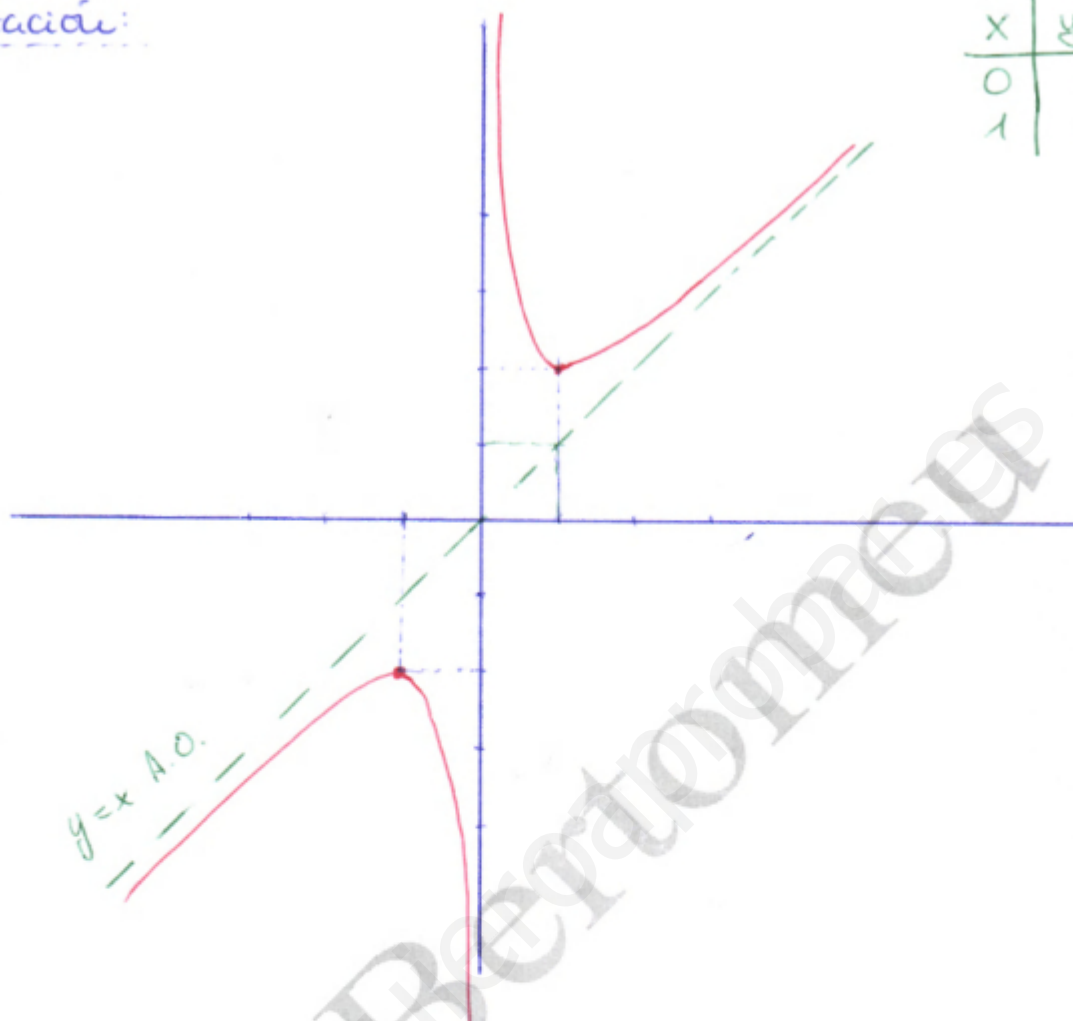
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \neq 0$$

Cóncava: $]0, +\infty[$ Convexa: $]-\infty, 0[$

No presenta puntos de inflexión.

⑦ Representación:



x	y = x
0	0
1	1

c) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x$

① Dominio

$D = \mathbb{R}$ por ser una función polinómica.

② Puntos de Corte con los ejes

con el eje $x \Rightarrow f(x) = 0$

$$3x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x^2 - x - 2) = 0$$

$$\swarrow x = 0$$

$$\searrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

$$\swarrow x = 1$$

$$\searrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow PC_1(0,0)$$

$$\Rightarrow PC_2(1,0)$$

$$\Rightarrow PC_3(-\frac{2}{3},0)$$

Con el eje $y \Rightarrow x=0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow PC(0,0)$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - x^2 - 2x \\ f(-x) &= 3(-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x) = -3x^3 - x^2 + 2x \\ -f(x) &= -(3x^3 - x^2 - 2x) = -3x^3 + x^2 + 2x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{La función no} \\ \text{es simétrica.} \end{array}$$

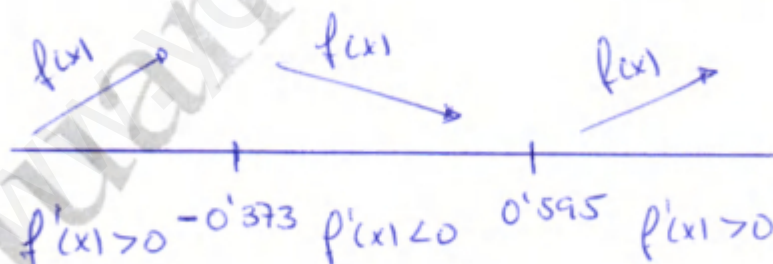
④ Asíntotas:

No presenta ninguna al tratarse de un polinomio.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x - 2 = 0 \begin{cases} x = 0.595 \\ x = -0.373 \end{cases}$$



Creciente: $]-\infty, -0.373[\cup]0.595, +\infty[$

Decreciente: $]-0.373, 0.595[$

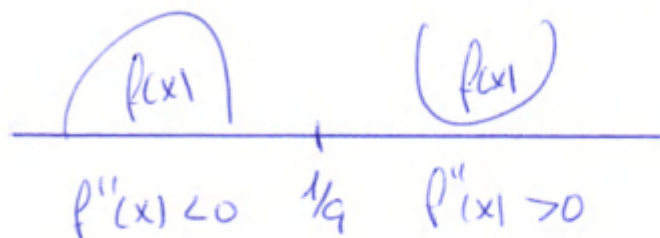
Máximo en $x = -0.373 \Rightarrow \text{Máx}(-0.373, f(-0.373)) = (-0.373, 0.451)$

Mínimo en $x = 0.595 \Rightarrow \text{Mín}(0.595, f(0.595)) = (0.595, -0.912)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = 9x^2 - 2x - 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 18x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \approx 0.11$$

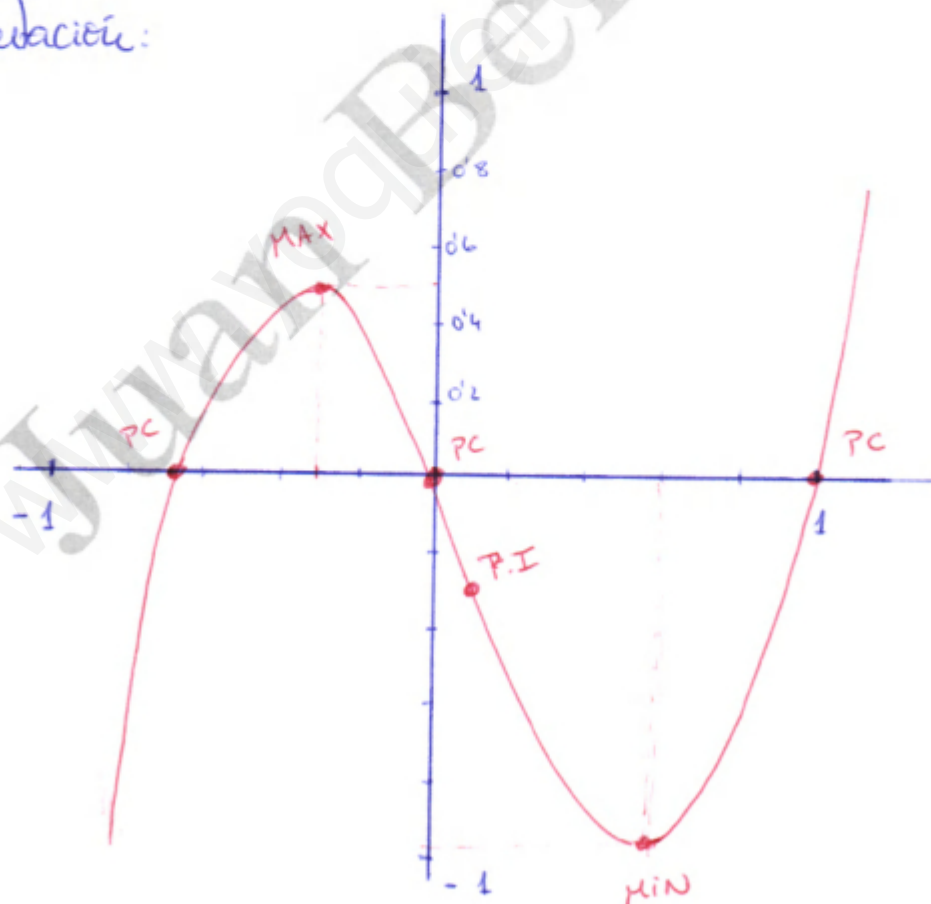


Cóncava: $] \frac{1}{9}, +\infty[$

Convexa: $] -\infty, \frac{1}{9}[$

Punto de inflexión en $x = \frac{1}{9} \Rightarrow P.I. \left(\frac{1}{9}, f\left(\frac{1}{9}\right) \right) = \left(\frac{1}{9}, -0.23 \right)$

⑦ Representación:



$$D) f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

① Dominio:

$$4-x^2=0 \begin{cases} x=+2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

② Puntos de Corte con los ejes:

Con el eje X $\Rightarrow f(x)=0$

$$\frac{x^2}{4-x^2} = 0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow PC(0,0)$$

Con el eje Y $\Rightarrow x=0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow PC(0,0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{4-(-x)^2} = \frac{x^2}{4-x^2}$$

$$-f(x) = -\frac{x^2}{4-x^2}$$

Como $f(x) = f(-x)$ la función es par o simétrica respecto al eje Y.

④ Asíntotas:

A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{4-x^2} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -2$ es A. Vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{4-x^2} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{+}{-} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2$ es A. Vertical.

A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4-x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4-x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1 \end{aligned} \right\} y = -1 \text{ es A. Horizontal}$$

A. Oblicuas:

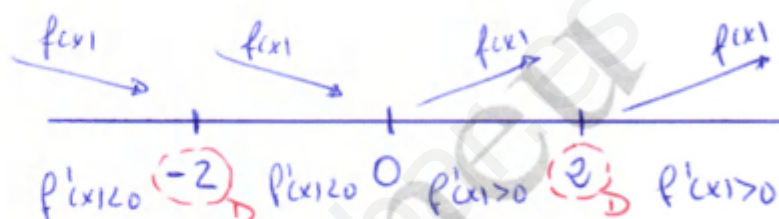
No presenta A. Oblicua al tener A. Horizontal.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(4-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8x - 2x^3 + 2x^3}{(4-x^2)^2} = \frac{8x}{(4-x^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0$$

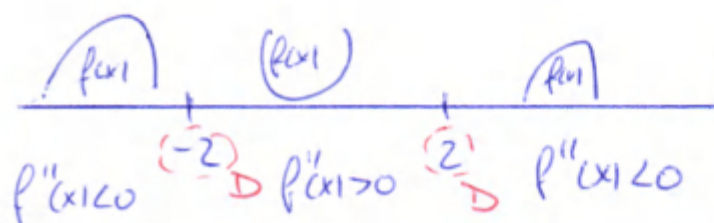
Creciente: $]0, 2[\cup]2, +\infty[$ Decreciente: $] -\infty, -2[\cup] -2, 0[$ Mínimo en $x = 0 \Rightarrow \text{Mm}(0, f(0)) = (0, 0)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{8x}{(4-x^2)^2}$$

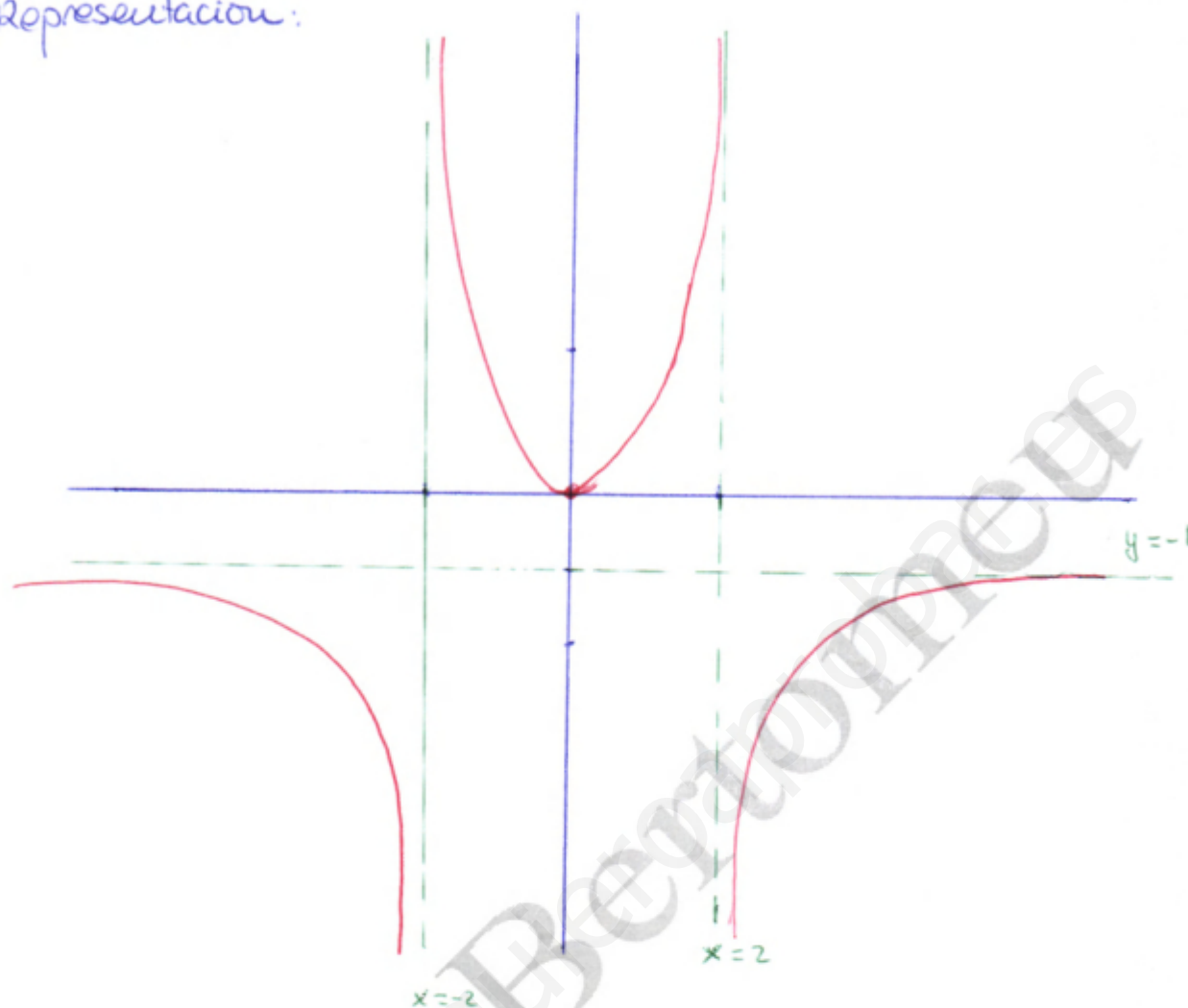
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8(4-x^2)^2 - 8x \cdot 2(4-x^2) \cdot (-2x)}{(4-x^2)^4} = \frac{32 - 8x^2 + 32x^2}{(4-x^2)^3} =$$

$$= \frac{24x^2 + 32}{(4-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 24x^2 + 32 = 0 \Rightarrow \nexists \text{ solución}$$

Cóncava: $] -2, 2[$ Convexa: $] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty[$ 

No hay puntos inflexión

⑦ Representación:



$$E) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

① Dominio:

$$1-x^2=0 \begin{cases} \rightarrow x=1 \\ \rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

② Puntos de Corte con los ejes

Con el eje X $\Rightarrow f(x)=0$

$$\frac{1}{1-x^2} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No Corte}$$

Con el eje Y $\Rightarrow x=0$

$$f(0) = 1 \Rightarrow PC(0, 1)$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\ f(-x) &= \frac{1}{1-(-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \\ -f(x) &= -\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } f(x) = f(-x) \text{ la función} \\ \text{es par o simétrica respecto al} \\ \text{eje } y. \end{array}$$

④ Asíntotas:

A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -1$ es A. Vertical

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{+}{-} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1$ es A. Vertical

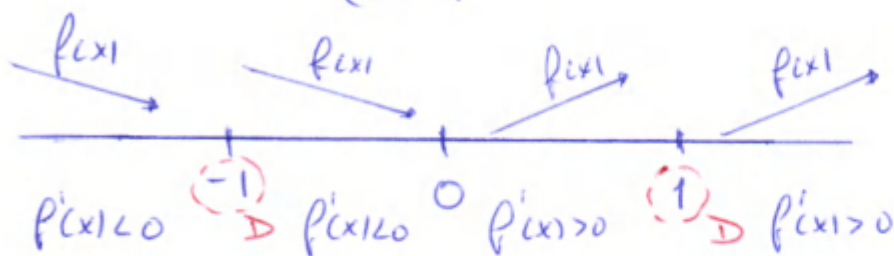
A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es A. Horizontal y por} \\ \text{tanto no presenta A. Oblicuas.} \end{array}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{+2x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Creciente: $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ Decreciente: $] -\infty, -1[\cup] -1, 0[$ Mínimo en $x=0 \Rightarrow (0, f(0)) = (0, 1)$

⑥ Curvatura:

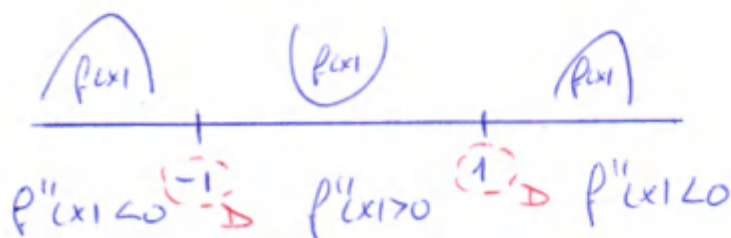
$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^2)^2 - 2x \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2-2x^2+8x^2}{(1-x^2)^3} =$$

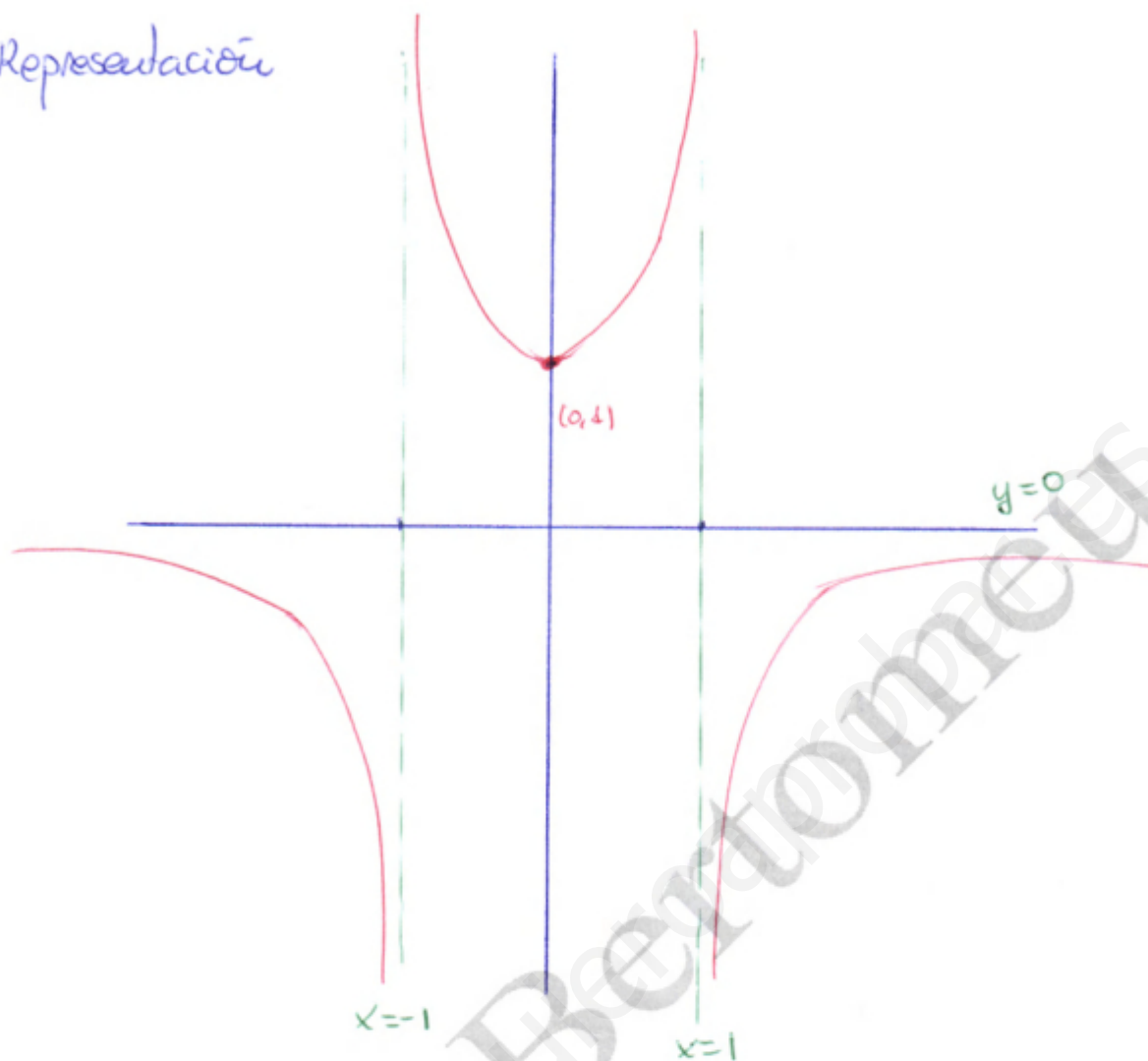
$$= \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 6x^2+2=0 \Rightarrow \nexists \text{ solución}$$

Cóncava: $] -1, 1[$ Convexa: $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$

No hay puntos de inflexión.



⑦ Representación



$$F) f(x) = x^3 - 6x$$

① Dominio:

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \quad (\text{función polinómica})$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $X \Rightarrow f(x) = 0$

$$x^3 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow x^2 - 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow x = \sqrt{6} \\ \rightarrow x = -\sqrt{6} \end{cases}$$

$$PC_1(0,0); PC_2(\sqrt{6},0); PC_3(-\sqrt{6},0)$$

- Con el eje $Y \Rightarrow x = 0$

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow PC(0,0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = x^3 - 6x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x$$

$$-f(x) = -(x^3 - 6x) = -x^3 + 6x$$

Como $f(-x) = -f(x)$ la función es impar o simétrica respecto al origen.

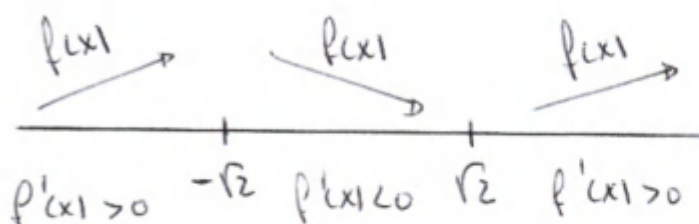
④ Asintotas:

No presenta por tratarse de una función polinómica.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = x^3 - 6x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \begin{cases} x = +\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente $\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

$f(x)$ es decreciente $\forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

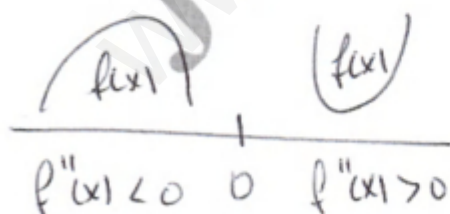
Máximo relativo $\rightarrow (-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, 5'66)$

Mínimo relativo $\rightarrow (\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, -5'66)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

$$f''(x) = 6x \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

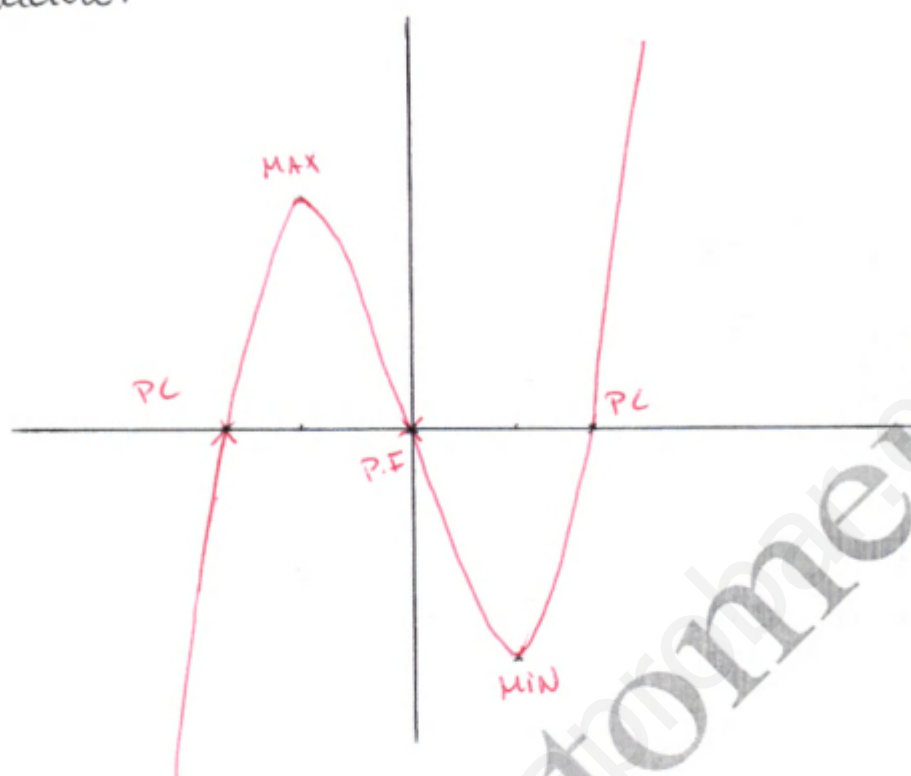


Cóncava: $]0, +\infty[$

Convexa: $] -\infty, 0[$

Punto de Inflexión $\rightarrow (0, f(0)) = (0, 0)$

⑦ Representación:



G) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

① Dominio:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} \rightarrow x = +1 \\ \rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $X \Rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{P.L.}(0, 0)$$

- Con el eje $Y \Rightarrow x = 0$

$$f(0) = \frac{0}{0^2 - 1} = 0 \Rightarrow \text{P.L.}(0, 0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = -\frac{x}{x^2-1}$$

Como $f(-x) = -f(x)$ la función es impar o simétrica respecto al origen.

④ Asíntotas:

→ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{-1}{0} \right] = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-}{+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-}{-} = +\infty \end{cases}$$

⇒ $x = -1$ es A. Vertical

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

⇒ $x = 1$ es A. Vertical

→ A. Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2-1} = 0$$

} $y = 0$ es A. Horizontal

→ A. Oblicuas:

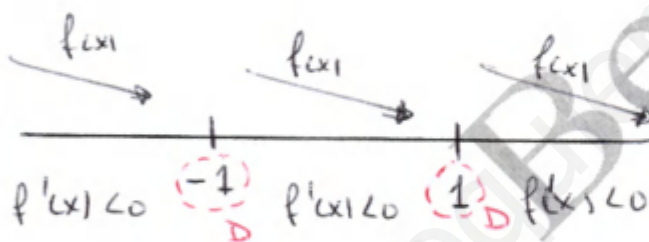
No presenta por presentar A. Horizontal.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-1=0 \Rightarrow \text{No solución}$$



$f(x)$ es decreciente en todo su dominio y no presenta ni máximos ni mínimos relativos.

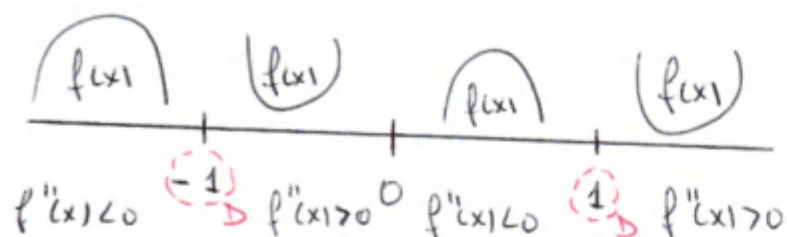
⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-1)^2 - (-x^2-1) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2x[x^2-1+2(-x^2-1)]}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{-2x \cdot [-x^2-3]}{(x^2-1)^3} ; f''(x) = 0 \Rightarrow -2x(-x^2-3) = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ &\rightarrow -x^2-3 = 0 \rightarrow \text{No solución} \end{aligned}$$

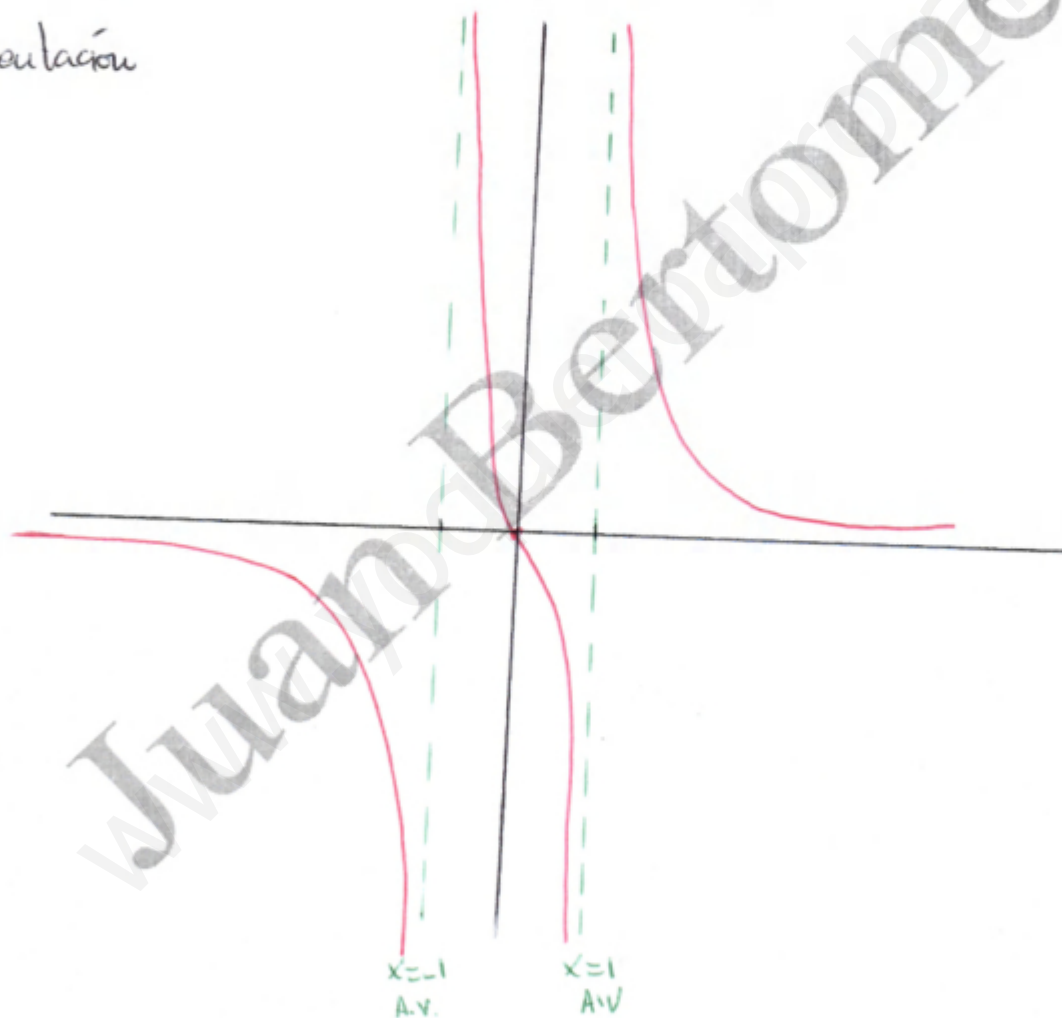


$f(x)$ es cóncava $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$f(x)$ es convexa $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

Punto Inflexión $\rightarrow (0, f(0)) = (0, 0)$

⑦ Representación



$$H) f(x) = x^3 - 9x$$

① Dominio:

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X $\rightarrow f(x) = 0$

$$x^3 - 9x = 0 ; x(x^2 - 9) = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$\rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow x = -3$$

$$P(0,0); P(3,0); P(-3,0)$$

- Con el eje Y $\rightarrow x = 0$

$$f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0 = 0 \rightarrow P(0,0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x$$

$$-f(x) = -(x^3 - 9x) = -x^3 + 9x$$

Como $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica respecto al origen

④ Asíntotas:

No presenta ninguna por ser una función polinómica.

⑤ Monotonía:

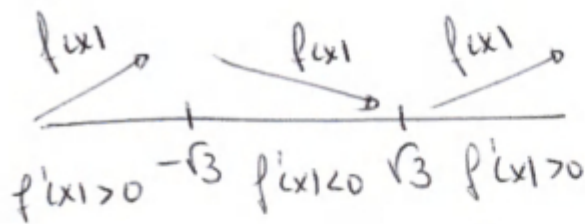
$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0$$

$$\rightarrow x = +\sqrt{3}$$

$$\rightarrow x = -\sqrt{3}$$



Crece: $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty$

Decrece: $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

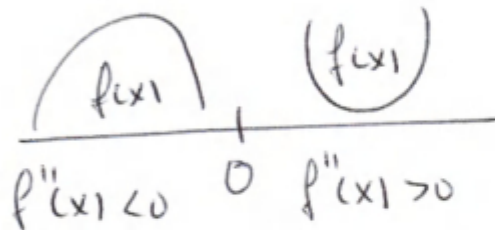
Máx $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, 10'39)$

Mín $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, -10'39)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f''(x) = 6x \rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

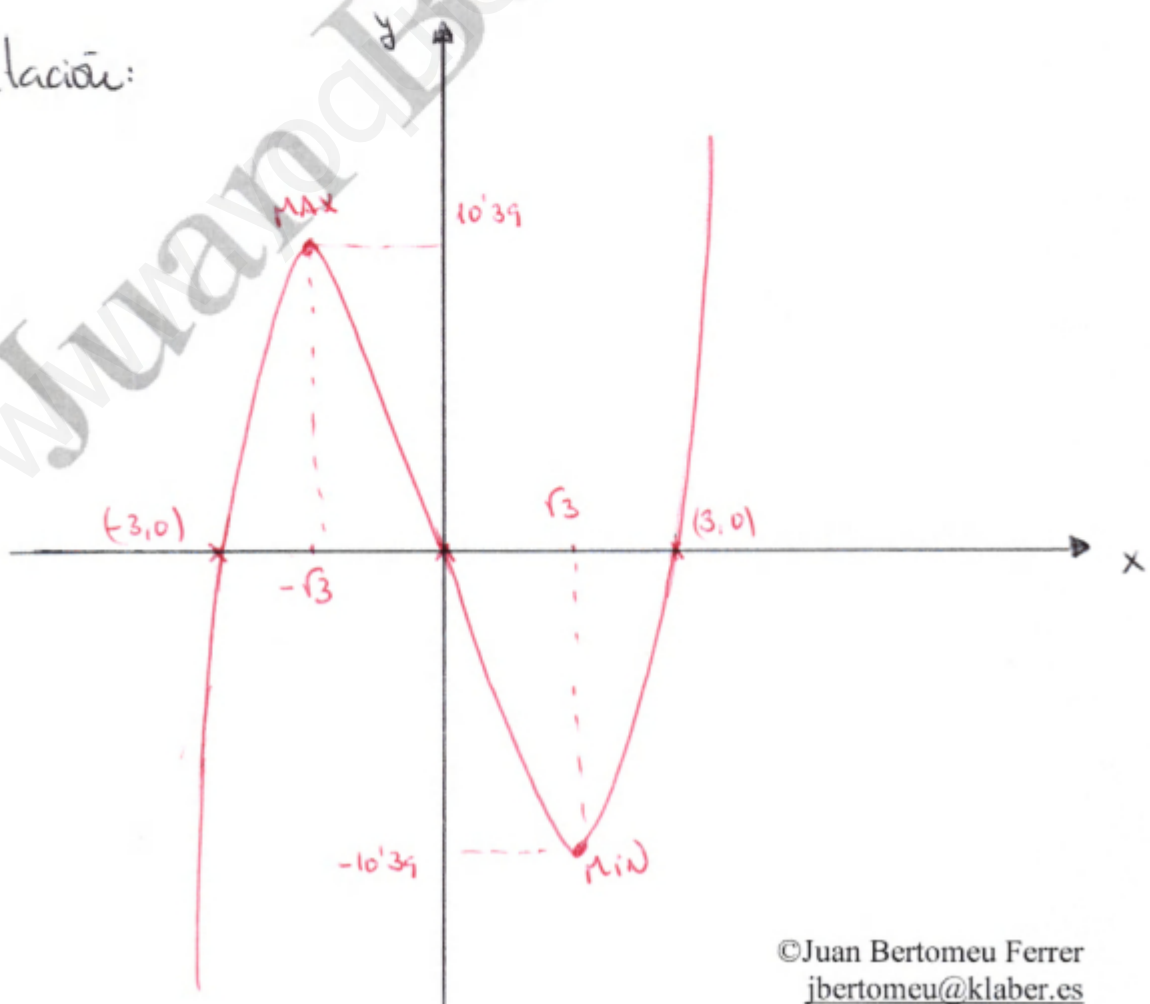


Convexa: $]-\infty, 0[$

Concava: $]0, +\infty[$

Punto Inflexión $(0, f(0)) = (0, 0)$

⑦ Representación:



$$I) f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

① Dominio:

$$x^2+1=0 \Rightarrow \text{No solución} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- con el eje $X \rightarrow f(x)=0$

$$\frac{1-x^2}{x^2+1}=0 \Rightarrow 1-x^2=0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x=1 \rightarrow PC(1,0) \\ &\rightarrow x=-1 \rightarrow PC(-1,0) \end{aligned}$$

- con el eje $Y \rightarrow x=0$

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow PC(0,1)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Como $f(x) = f(-x)$ la función es simétrica respecto al eje Y

④ Asíntotas:

A. Verticales:

No tiene por estar definida en $\mathbb{R}$.

A. Horizontales:

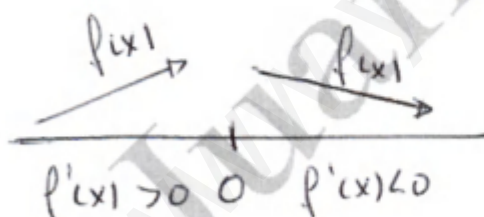
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^2}{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-(-x)^2}{(-x)^2+1} = -1 \end{aligned} \right\} y = -1 \text{ es A. Horizontal}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2+1) - (1-x^2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^3 - 2x - 2x + 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$



creciente: $]-\infty, 0[$

decreciente: $]0, +\infty[$

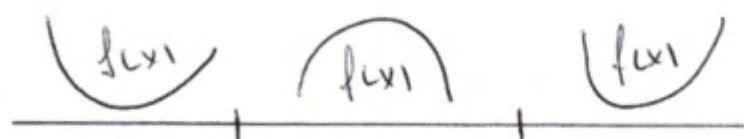
Máx $(0, f(0)) = (0, 1)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x^2+1)^2 + 4x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x^2 - 4 + 16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{12x^2 - 4}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^2 - 4}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \begin{cases} \nearrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \searrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



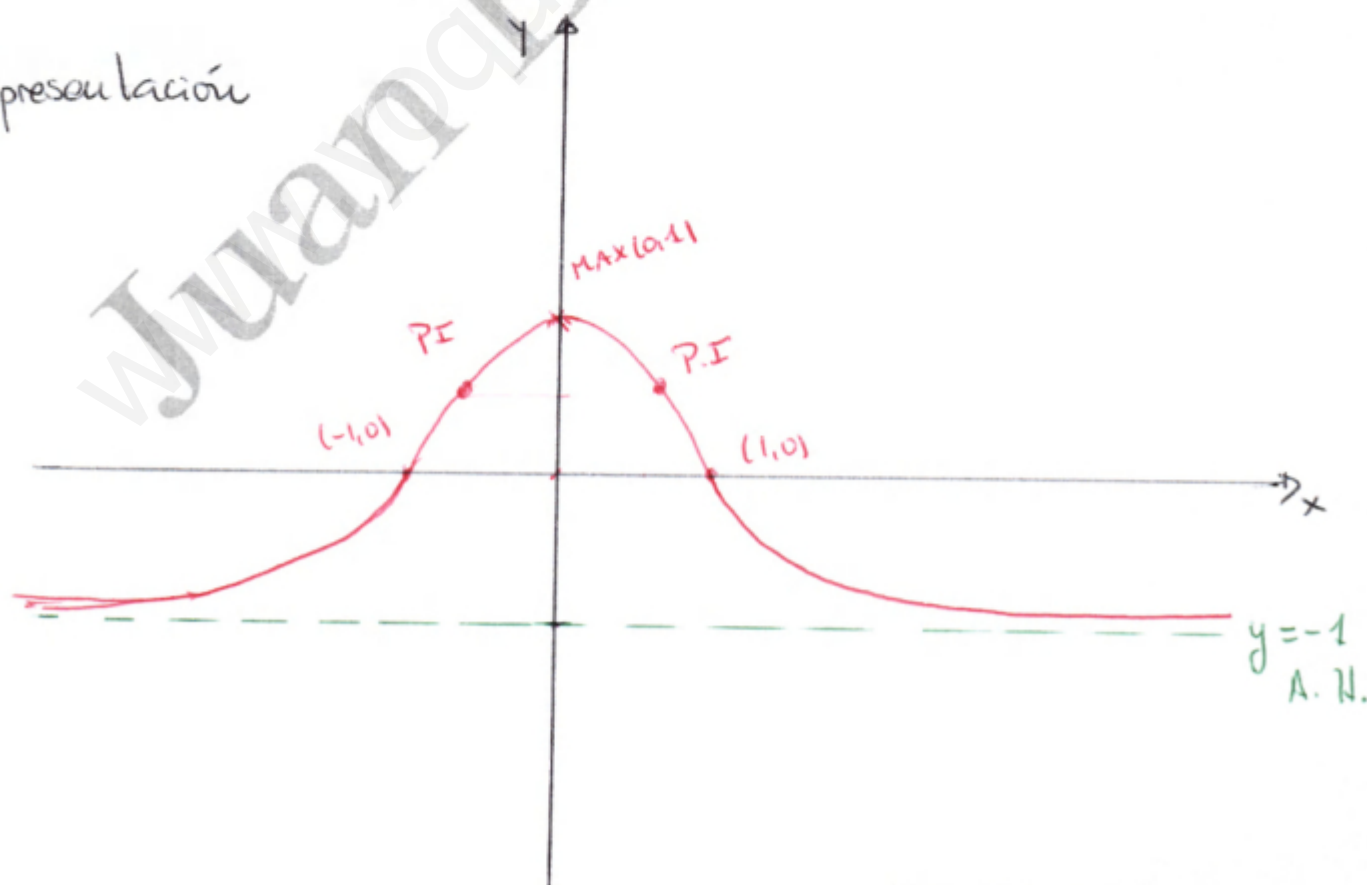
$$f''(x) > 0 \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad f''(x) < 0 \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad f''(x) > 0$$

Concava: $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$

Convexa: $]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

Punto Inflexión $\begin{cases} (-\frac{1}{\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}})) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}})) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}) \end{cases}$

⑦ Representación



$$J) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

① Dominio:

$$x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- con el eje X $\rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow PC(0, 0)$$

- con el eje Y $\rightarrow x = 0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow PC(0, 0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{x^3}{x^2 - 4}\right) = \frac{-x^3}{x^2 - 4}$$

como $f(-x) = -f(x)$ la función es simétrica respecto al origen

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0} \right] = -\infty \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-}{+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-}{-} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -2$ es A. Vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2-4} = \left[\frac{2^3}{0} \right] = +\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=2$ es A. Vertical.

$\rightarrow$ A. Horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = -\infty \end{aligned} \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-4}} \right\} \begin{array}{l} \text{No hay} \\ \text{A. Horizontales} \end{array}$$

$\rightarrow$ A. Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 4x}{x^2-4} = 0$$

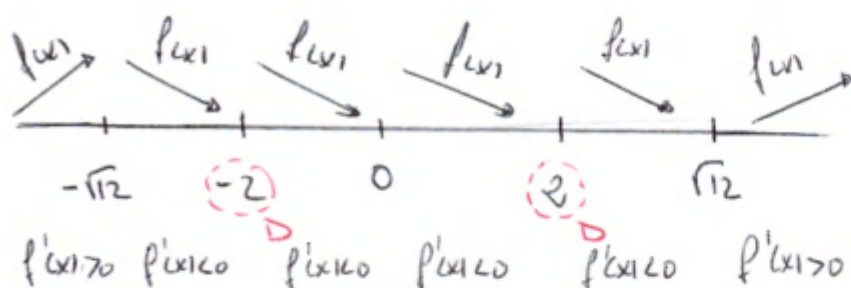
$\Rightarrow y = x$ es A. Oblicua.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 12 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente $\forall x \in]-\infty, -\sqrt{12}[\cup]\sqrt{12}, +\infty[$

$f(x)$ es decreciente $\forall x \in]-\sqrt{12}, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, \sqrt{12}[$

$$\text{Máx } (-\sqrt{12}, f(-\sqrt{12})) = (-3'46, -5'19)$$

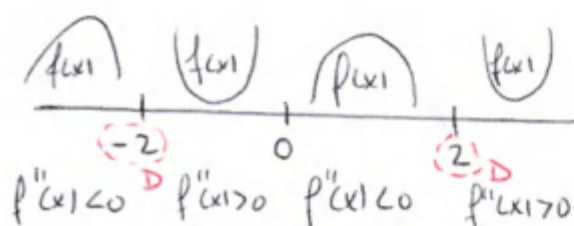
$$\text{Mín } (\sqrt{12}, f(\sqrt{12})) = (3'46, 5'19)$$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow 8x(x^2 + 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 12 = 0 \Rightarrow \text{no tiene solución} \end{cases}$$



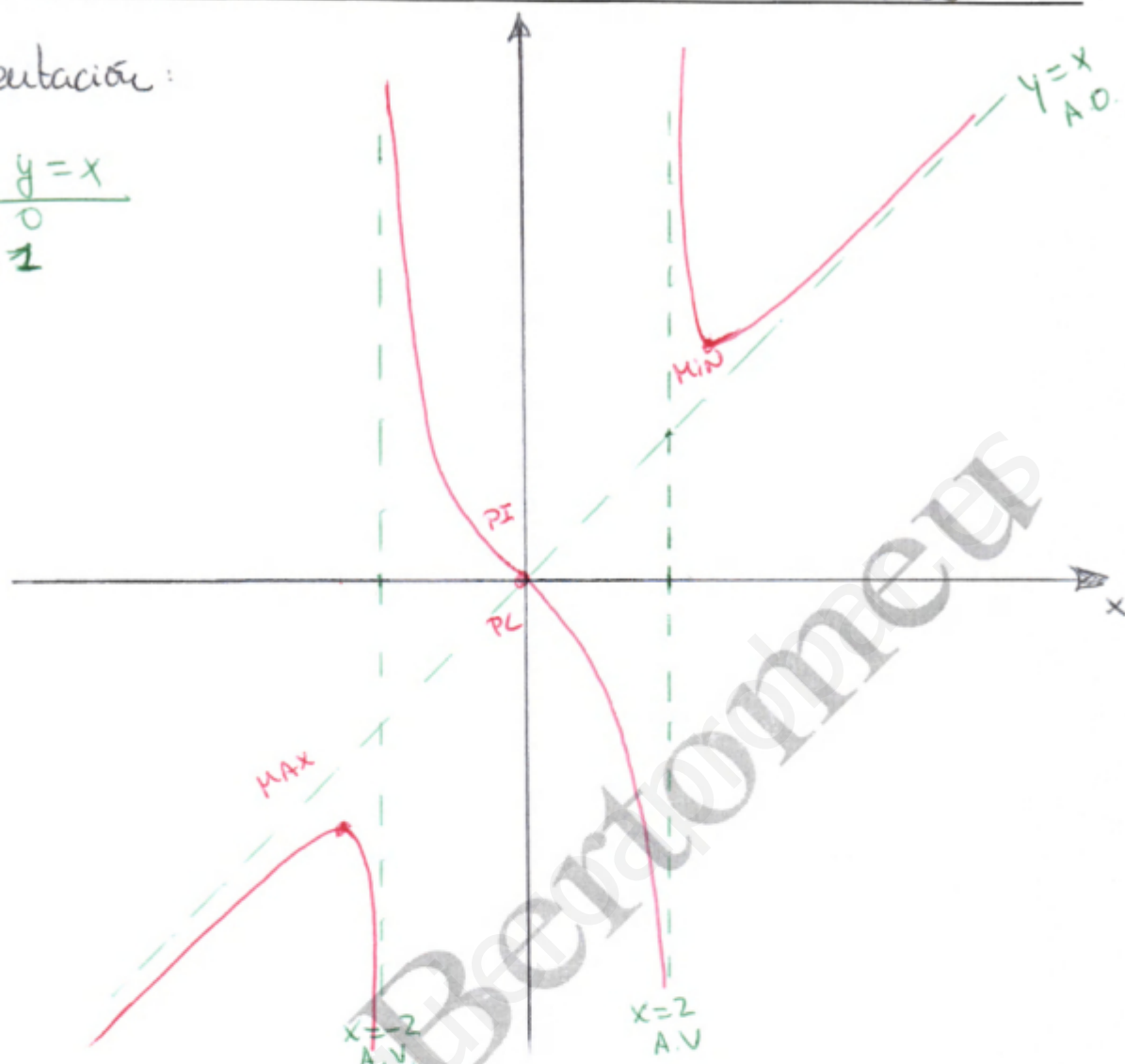
Concava: $]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

Convexa: $]-\infty, -2[\cup]0, 2[$

Punto Inflexión: $(0, f(0)) = (0, 0)$

⑦ Representación:

x	y = x
0	0
1	1



K) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

① Dominio:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X $\rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x = +1 \quad \text{PC}(1, 0) \\ &\rightarrow x = -1 \quad \text{PC}(-1, 0) \end{aligned}$$

- Con el eje Y $\rightarrow x = 0$

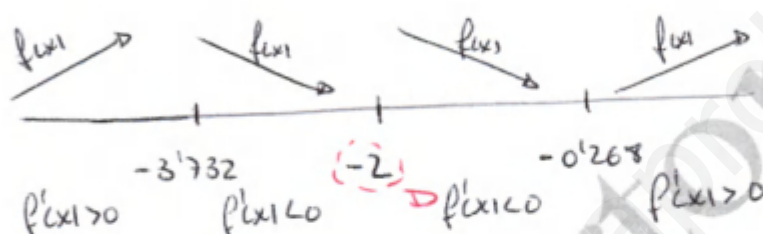
$$f(0) = \frac{-1}{2} \rightarrow \text{PC}(0, -\frac{1}{2})$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \begin{cases} x = -2 + \sqrt{3} = -0'268 \\ x = -2 - \sqrt{3} = -3'732 \end{cases}$$

Creciente: $]-\infty, -3'732[\cup]-0'268, +\infty[$ Decreciente: $]-3'732, -2[\cup]-2, -0'268[$

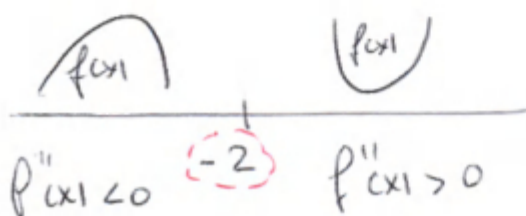
$$\text{Máx } (-3'732, f(-3'732)) = (-3'732, -7'461)$$

$$\text{Mín } (-0'268, f(-0'268)) = (-0'268, -0'536)$$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$$

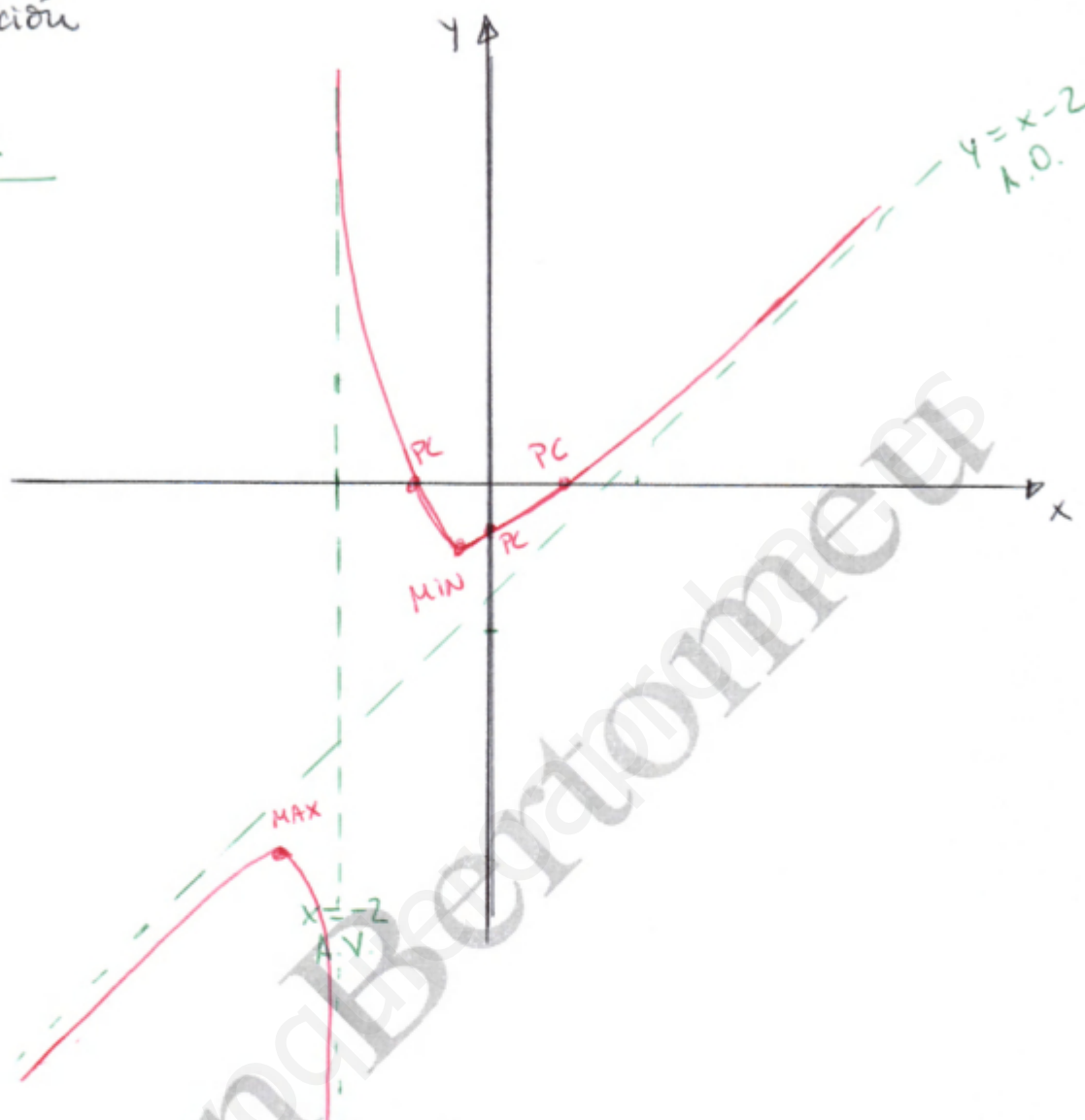
$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x+1)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{6}{(x+2)^3}; \quad f''(x) = 0 \quad \downarrow \quad 6 \neq 0$$

Cóncava: $]-2, +\infty[$ Convexa: $]-\infty, -2[$

No tiene P.I

⑦ Representación

X	$y = x - 2$
0	-2
2	0



L) $f(x) = x \cdot e^x$

① Dominio:

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \quad (\text{ÁLGEBRA FUNCIONES CONTINUAS})$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Cortes con eje X $\rightarrow f(x) = 0$

$$x \cdot e^x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow PC(0,0) \\ e^x = 0 \rightarrow \nexists x \end{cases}$$

- Cortes con eje Y $\rightarrow x = 0$

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \rightarrow PC(0,0)$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x \cdot e^x \\ f(-x) &= -x \cdot e^{-x} \\ -f(x) &= -x \cdot e^x \end{aligned} \right\} \text{ la función no presenta ninguna simetría.}$$

④ Asíntotas:

→ A. Verticales:

No presenta por estar definida en $\mathbb{R}$.

→ A. Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = [\infty \cdot \infty] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} -x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{e^x} = 0$$

⇒ $y = 0$ es A. Horizontal en la izquierda ($x \rightarrow -\infty$)

→ A. Oblicua: $y = mx + n$

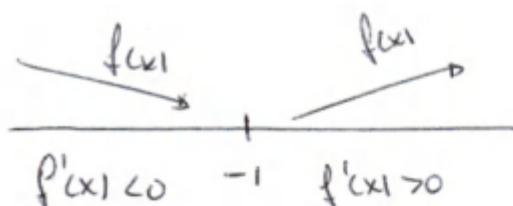
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \rightarrow \text{No tiene A. Oblicuas.}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = x \cdot e^x$$

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x (1+x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (1+x) = 0 \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow \nexists \\ 1+x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Crece $] -1, +\infty[$ Decrece $] -\infty, -1[$

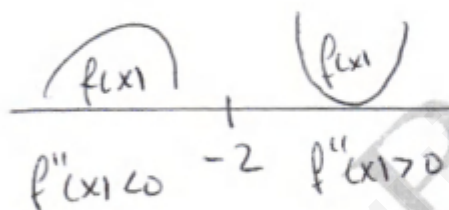
$$\text{Min } (-1, f(-1)) = (-1, -0'37)$$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = e^x(1+x)$$

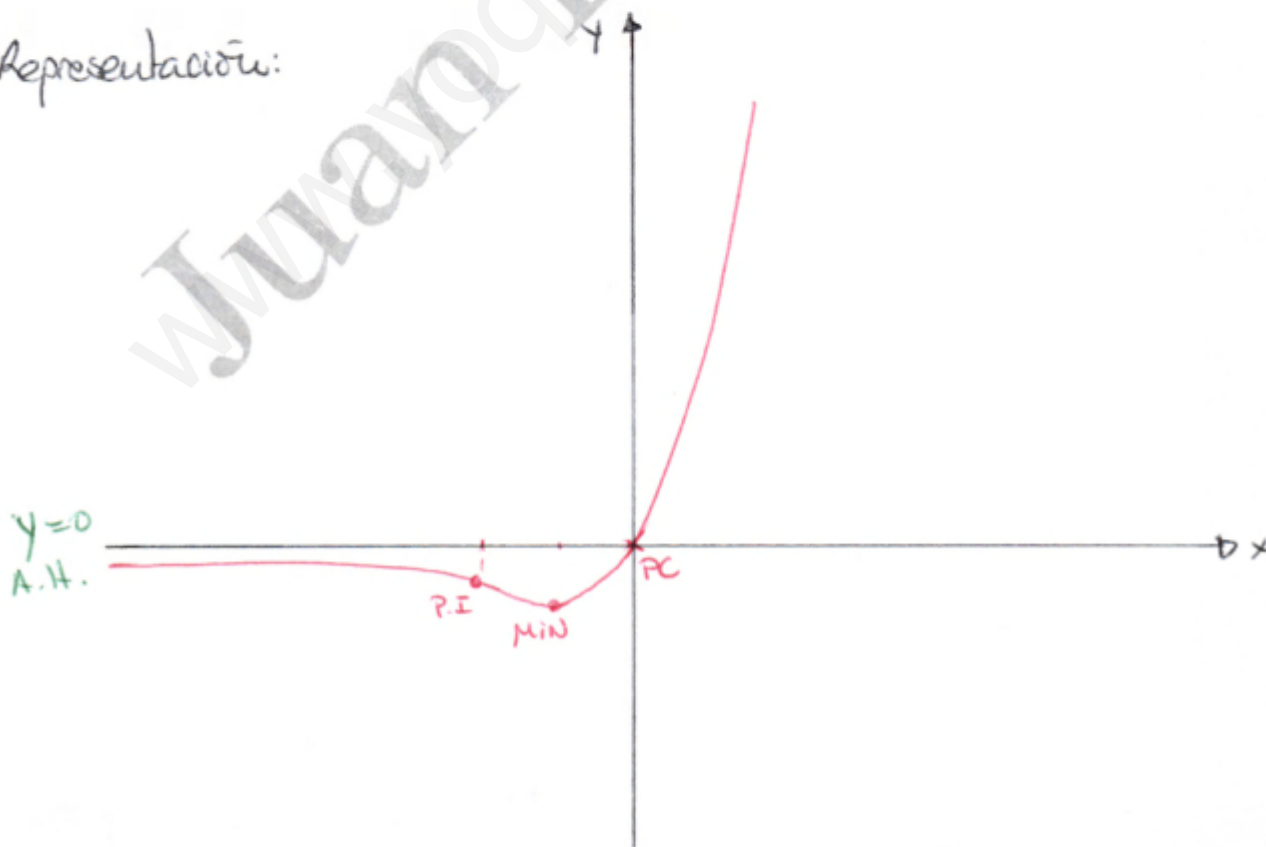
$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x(2+x) = 0 \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow \text{no} \\ 2+x = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Cavada: $] -2, +\infty[$ Convexa: $] -\infty, -2[$

$$\text{P. I. } (-2, f(-2)) = (-2, -0'27)$$

⑦ Representación:



$$M) f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$$

① Dominio:

$$x=0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

② Puntos de Corte con los ejes:

- Con el eje X $\rightarrow f(x)=0$

$$\frac{(x-2)^2}{x} = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow PC(2,0)$$

- Con el eje Y $\rightarrow x=0 \rightarrow$ No corta $\rightarrow x=0 \notin \text{Dom}(f(x))$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x-2)^2}{-x} = \frac{(x+2)^2}{-x}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{(x-2)^2}{x}\right) = \frac{(x-2)^2}{-x}$$

La función no presenta ninguna simetría.

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^2}{x} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ es A. Vertical

$\rightarrow$ A. Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = -\infty$$

No tiene asíntotas horizontales.

→ A. Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2}{x} = -4$$

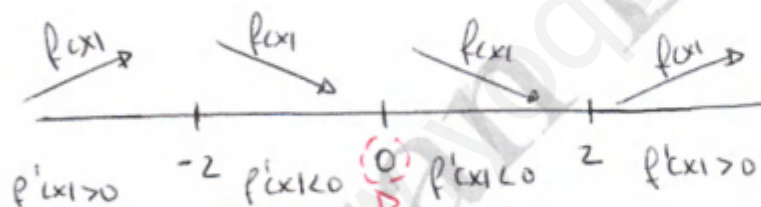
⇒ $y = x - 4$ es A. Oblicua.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x} = \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-4) \cdot x - (x^2 - 4x + 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 4x - 4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$$



Crece: $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

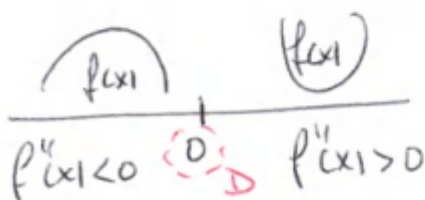
Decrece: $]-2, 0[\cup]0, 2[$

Máx $(-2, f(-2)) = (-2, -8)$

Mín $(2, f(2)) = (2, 0)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{8}{x^3} \Rightarrow f''(x) \neq 0$$



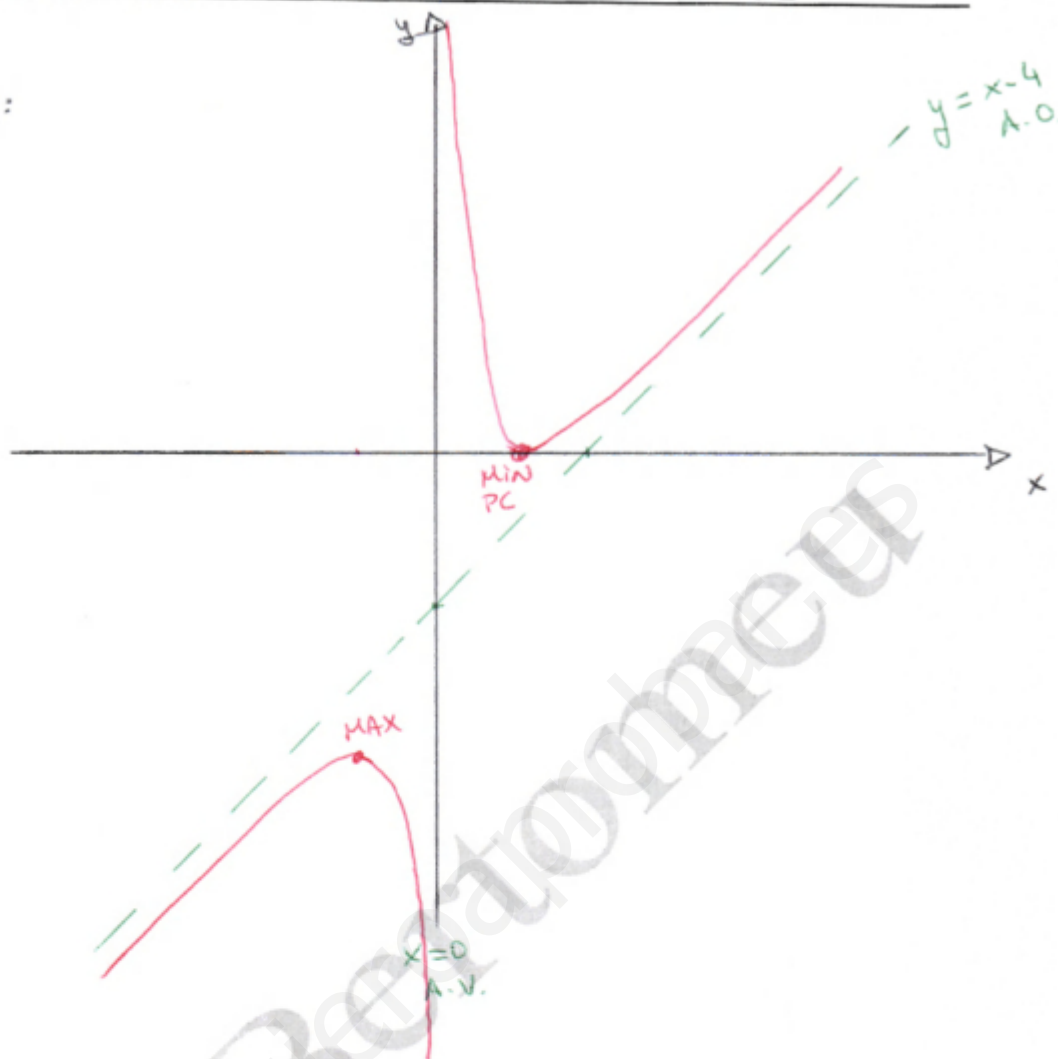
Concava: $]0, +\infty[$

Convexa: $]-\infty, 0[$

No tiene P. Inflexión.

⑦ Representación:

x	y = x - 4
0	-4
4	0



$$\begin{aligned} N) f(x) &= (x+3)(x-1)^2 = (x+3)(x^2-2x+1) = x^3-2x^2+x+3x^2-6x+3 \\ &= x^3+x^2-5x+3 \end{aligned}$$

① Dominio:

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} \quad (\text{polinómica})$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $X \rightarrow f(x)=0$

$$(x+3)(x-1)^2=0 \quad \begin{cases} \rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow PC(-3,0) \\ \rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow PC(1,0) \end{cases}$$

- Con el eje $Y \rightarrow x=0$

$$f(0)=3 \rightarrow PC(0,3)$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^3+x^2-5x+3 \\ f(-x) &= (-x)^3+(-x)^2-5(-x)+3 = -x^3+x^2+5x+3 \\ -f(x) &= -(x^3+x^2-5x+3) = -x^3-x^2+5x-3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{La función no} \\ \text{presenta ninguna} \\ \text{simetría.} \end{array}$$

④ Asíntotas:

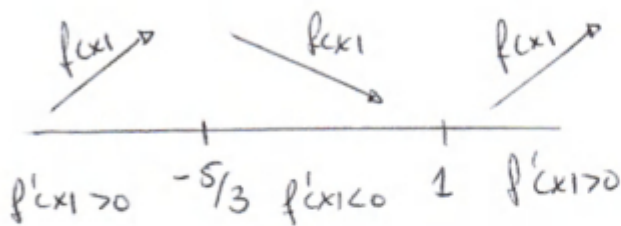
No presenta ninguna asíntota por tratarse de una función polinómica.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -5/3 \end{cases}$$



Crece: $]-\infty, -5/3[\cup]1, +\infty[$

Decrece: $]-5/3, 1[$

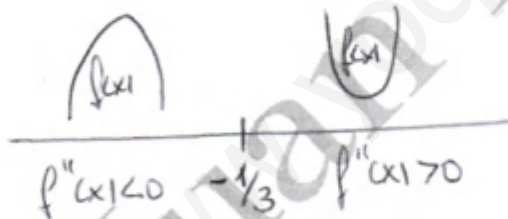
Max $(-5/3, f(-5/3)) = (-5/3, 9.48)$

Min $(1, f(1)) = (1, 0)$

⑥ Concavidad:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f''(x) = 6x + 2 \rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1/3$$

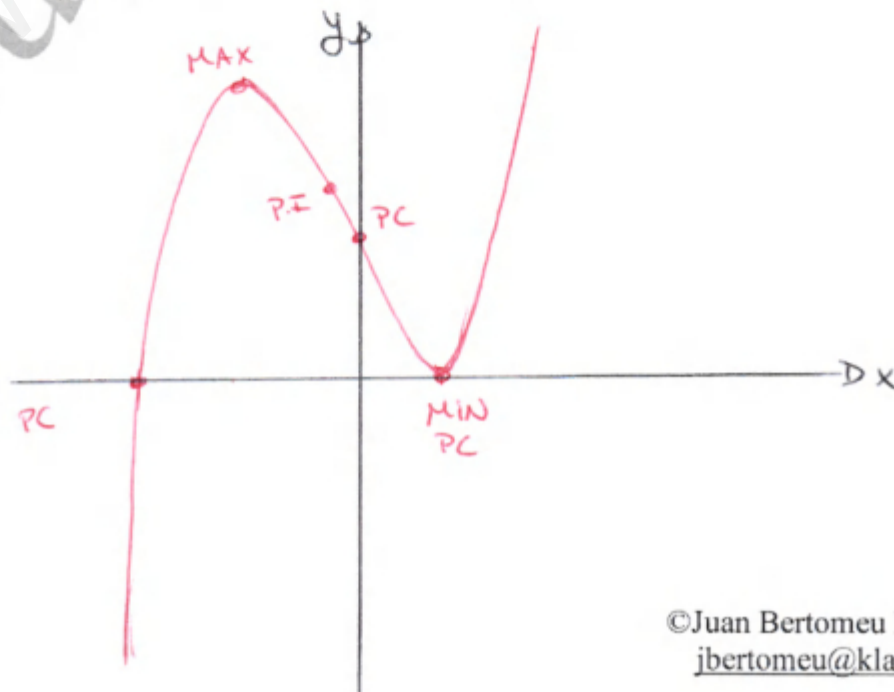


Concava: $]-1/3, +\infty[$

Convexa: $]-\infty, -1/3[$

P. Inflexión $(-1/3, f(-1/3)) = (-1/3, 4.74)$

⑦ Representación



$$0) f(x) = \frac{x}{x^2-9}$$

① Dominio:

$$x^2-9=0 \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- con el eje X $\rightarrow f(x)=0$

$$\frac{x}{x^2-9} = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{PC}(0,0)$$

- con el eje Y $\rightarrow x=0$

$$f(0)=0 \Rightarrow \text{PC}(0,0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-9}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2-9} = \frac{-x}{x^2-9}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{x}{x^2-9}\right) = \frac{-x}{x^2-9}$$

Como $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica respecto al origen.

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x^2-9} = \left[\frac{-3}{0} \right] = -\infty \rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-}{+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-}{-} = +\infty \end{cases}$$

$x = -3$ es A. Vertical

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2-9} = \left[\frac{3}{0} \right] = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

$x=3$ es A. Vertical

→ A. Horizontales:

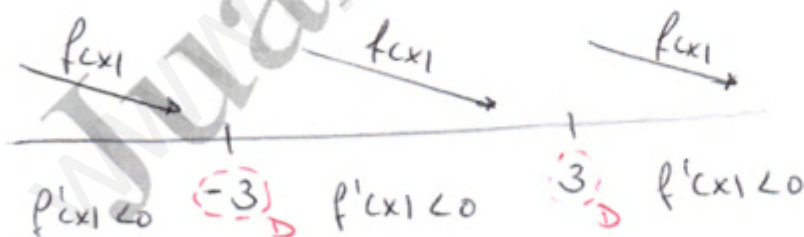
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-9} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2-9} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} y=0 \text{ es A. Horizontal} \\ \downarrow \\ \text{No hay oblicuas.} \end{array}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-9}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-9) - x \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2};$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2-9=0 \Rightarrow \nexists \text{ solución}$$



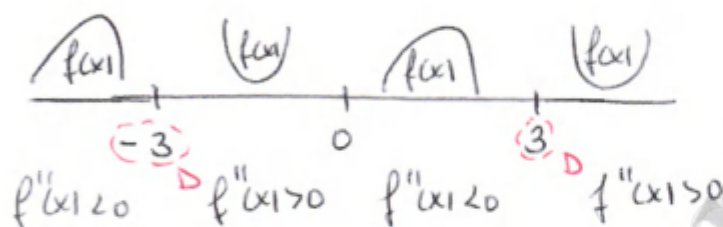
$f(x)$ es decreciente en todo su dominio y no presenta extremos relativos.

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-9)^2 - (-x^2-9) \cdot 2(x^2-9) \cdot 2x}{(x^2-9)^4} = \frac{-2x(x^2-9-2x^2-18)}{(x^2-9)^3} =$$

$$= \frac{-2x(-x^2-27)}{(x^2-9)^3}; \quad f''(x)=0 \Rightarrow -2x(-x^2-27)=0 \begin{cases} x=0 \\ \text{No solución} \end{cases}$$

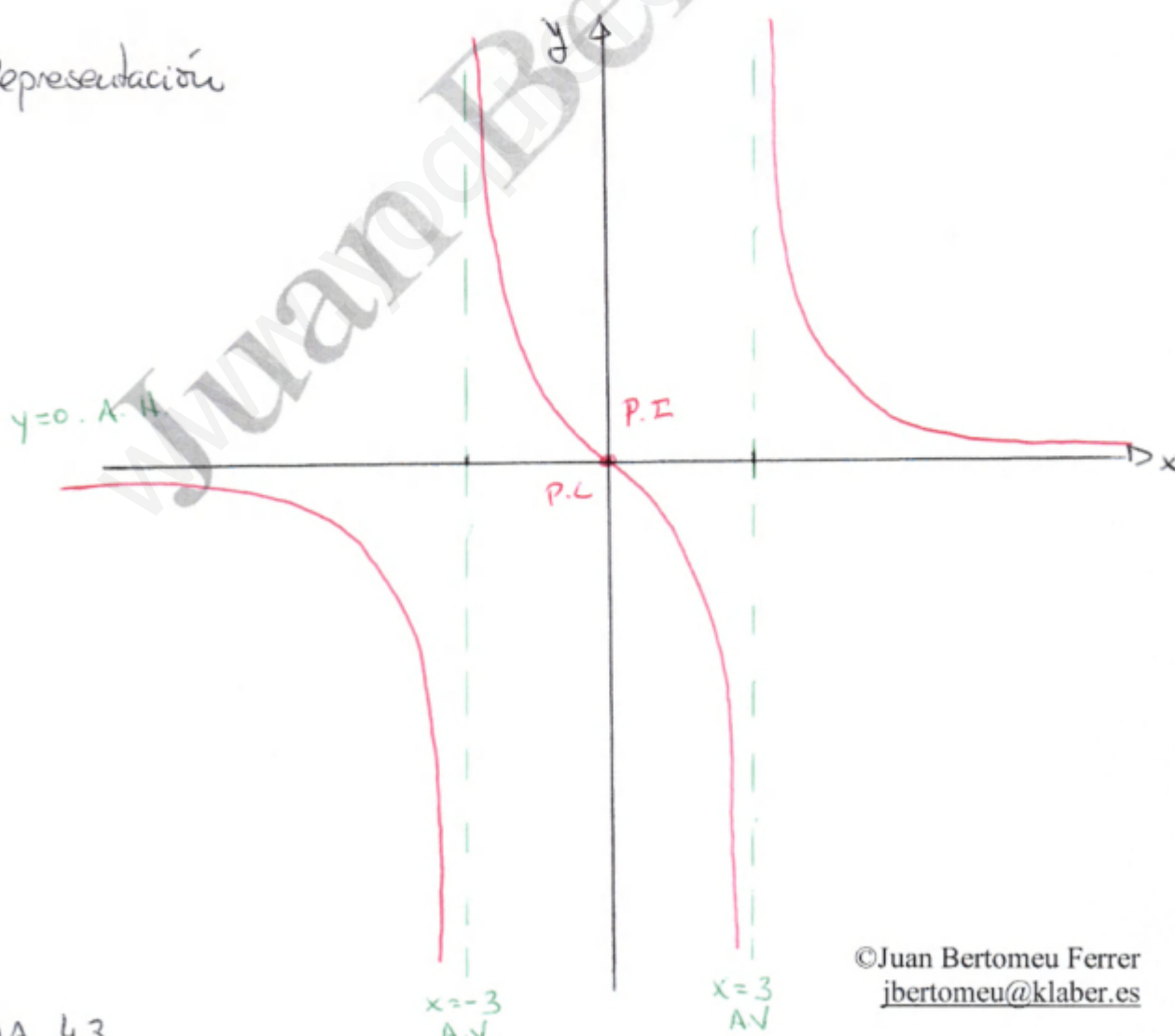


Cóncava: $] -3, 0[\cup] 3, +\infty[$

Convexa: $] -\infty, -3[\cup] 0, 3[$

P. Inflexión $(0, f(0)) = (0, 0)$

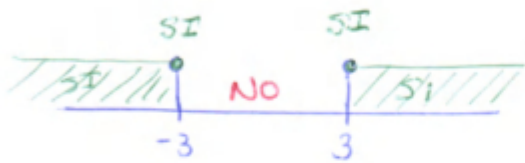
⑦ Representación



$$P) f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

① Dominio:

$$x^2 - 9 > 0 ; \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$



$$\text{Dom}(f(x)) =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X $\rightarrow f(x) = 0$

$$\sqrt{x^2 - 9} = 0 ; \quad x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \rightarrow PC(3, 0) \\ x = -3 \rightarrow PC(-3, 0) \end{cases}$$

- Con el eje Y $\rightarrow x = 0$

$\hookrightarrow$ No corta pues $x = 0 \notin \text{Dom}(f(x))$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 9} \\ f(-x) &= \sqrt{(-x)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 9} \\ -f(x) &= -\sqrt{x^2 - 9} \end{aligned} \right\}$$

Como $f(x) = f(-x)$ la función es simétrica respecto al eje Y (simetría par)

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x^2 - 9} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow$$

No presenta A. Verticales

→ A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 9} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 9} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ No presenta A. Horizontales}$$

→ A. Oblicuas $y = mx + u$:

$$\text{En } x \rightarrow +\infty \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ u &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x) = [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{(\sqrt{x^2 - 9} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow y = x$ es A. oblicua en $x \rightarrow +\infty$

$$\text{En } x \rightarrow -\infty \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1 \\ u &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 9} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x) = 0 \end{aligned} \right.$$

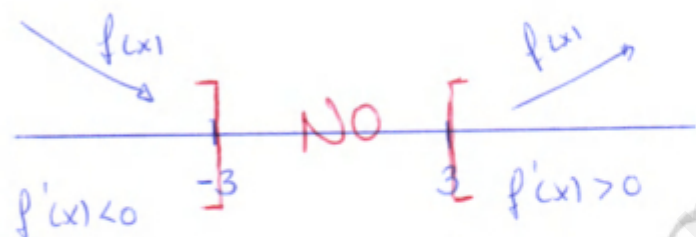
$\Rightarrow y = -x$ es A. oblicua en $x \rightarrow -\infty$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow x = 0 \quad (\text{pero } x=0 \notin \text{Dom}(f(x)))$$



Creciente: $[3, +\infty[$

Decreciente: $] -\infty, -3]$

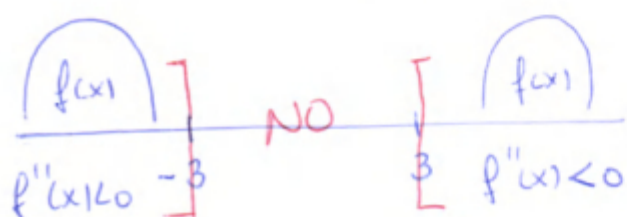
No presenta extremos relativos.

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

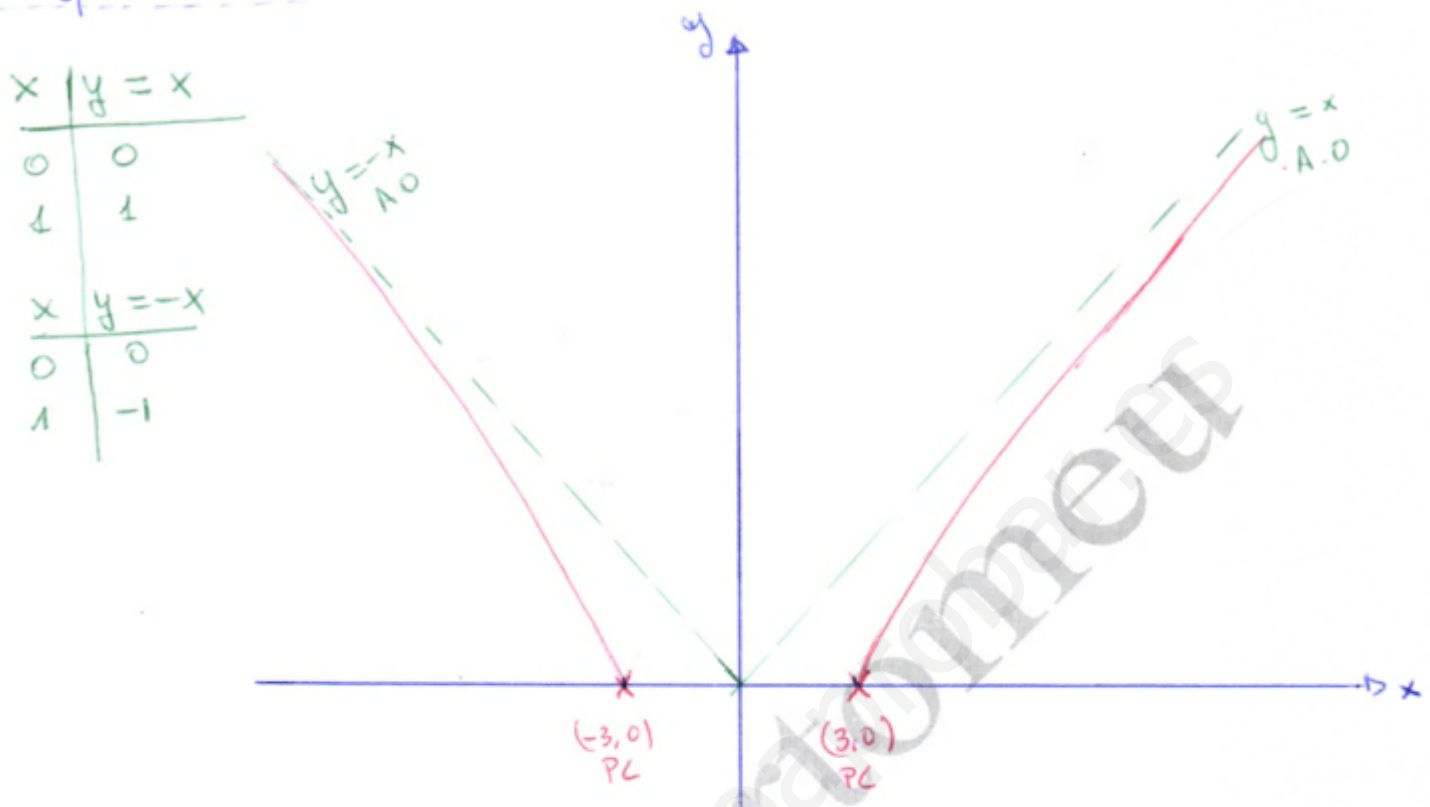
$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-9} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9} = \frac{\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9} = \frac{-9}{\sqrt{(x^2-9)^3}}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{-9}{\sqrt{(x^2-9)^3}} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$f(x)$ es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

④ Representación



Q) $f(x) = \frac{1}{e^x - 2}$

① Dominio:

$$e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X $\rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{1}{e^x - 2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No corta.}$$

- Con el eje Y $\rightarrow x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{e^0 - 2} = -1 \rightarrow PC (0, -1)$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^x - 2} \\ f(1-x) &= \frac{1}{e^{-x} - 2} \\ -f(x) &= \frac{-1}{e^x - 2} \end{aligned} \right\} f(x) \text{ no presenta ninguna simetría.}$$

④ Asintotas:

→ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{1}{e^x - 2} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{1}{e^x - 2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \frac{1}{e^x - 2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \nexists \lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x)$$

⇒ $x = \ln 2$ es A. Vertical.

→ A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x - 2} &= \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 2} &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y = 0 &\text{ es A. Horizontal cuando } x \rightarrow \infty \\ y = -\frac{1}{2} &\text{ es A. Horizontal cuando } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

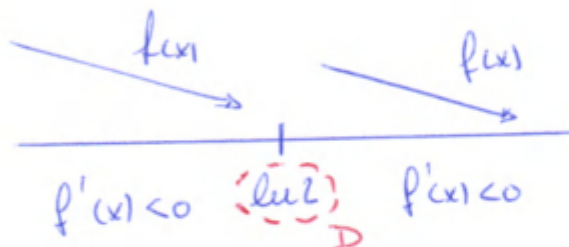
→ $f(x)$ no presenta asíntotas oblicuas.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-e^x}{(e^x - 2)^2} = 0 \rightarrow -e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



$f(x)$ es decreciente en todo su dominio y no presenta extremos relativos.

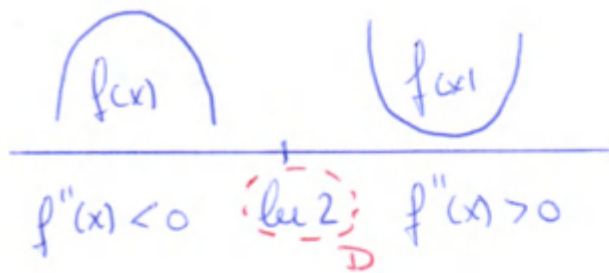
⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x (e^x - 2)^2 + e^x \cdot 2(e^x - 2) \cdot e^x}{(e^x - 2)^4} = \frac{e^x [2 - e^x + 2e^x]}{(e^x - 2)^3} =$$

$$= \frac{e^x (2 + e^x)}{(e^x - 2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{e^x (2 + e^x)}{(e^x - 2)^3} = 0 \rightarrow e^x (2 + e^x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

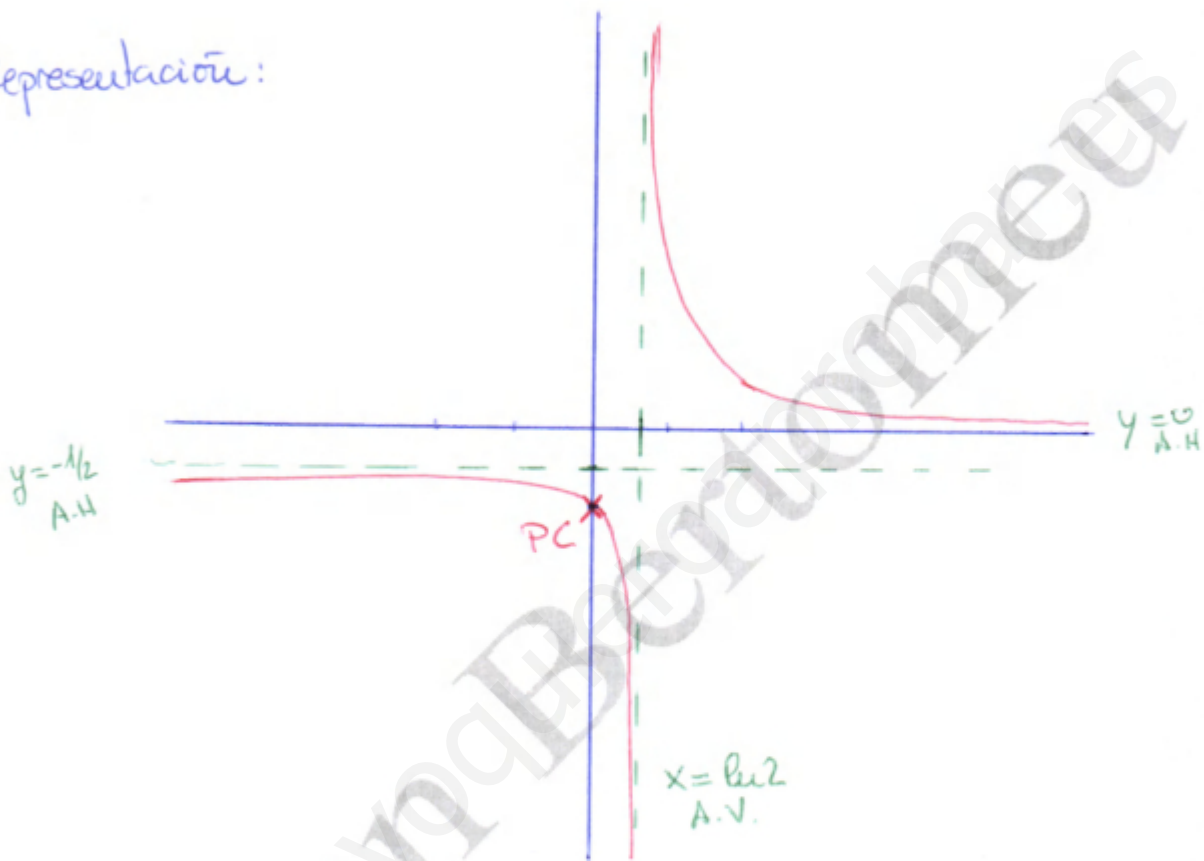


Cóncava: $] \ln 2, +\infty[$

Convexa: $] -\infty, \ln 2[$

No presenta puntos inflexión

⑦ Representación:



R) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

① Dominio:

$$x = 0 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $X \rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{e^x}{x} = 0 \Rightarrow e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No corta.}$$

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0$

$\nexists f(0)$ pues $x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)) \rightarrow \text{No corta.}$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{e^x}{-x}$$

$f(x)$ no presenta simetría par ni impar.

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right\} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x}$$

$\Rightarrow x = 0$ es A. Vertical.

$\rightarrow$ A. Horizontales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{0}{-\infty} \right] = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es A. Horizontal en } x \rightarrow -\infty \\ \Downarrow \\ \text{Podría haber oblicua en } x \rightarrow +\infty \end{array}$$

→ A. oblicuas: $y = mx + n$

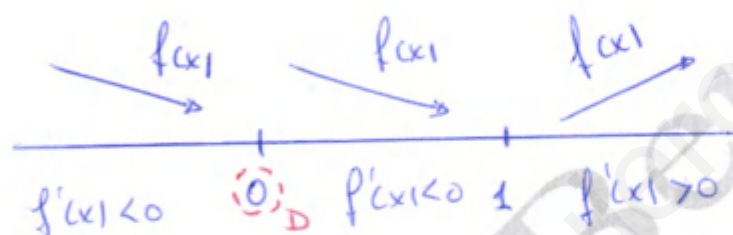
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty \rightarrow \text{No hay A. oblicua.}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \rightarrow e^x(x-1) = 0 \begin{cases} e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ x = 1 \end{cases}$$



Creciente: $]1, +\infty[$

Decreciente: $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$

Mínimo relativo en $x=1 \rightarrow \text{Min}(1, f(1)) = (1, e)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{[e^x(x-1) + e^x] \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x[x^2 - x + 1 - 2x + 2]}{x^3} =$$

$$= \frac{e^x(x^2 - 3x + 3)}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{e^x(x^2 - 3x + 3)}{x^3} = 0 \rightarrow e^x(x^2 - 3x + 3) = 0 \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 - 3x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

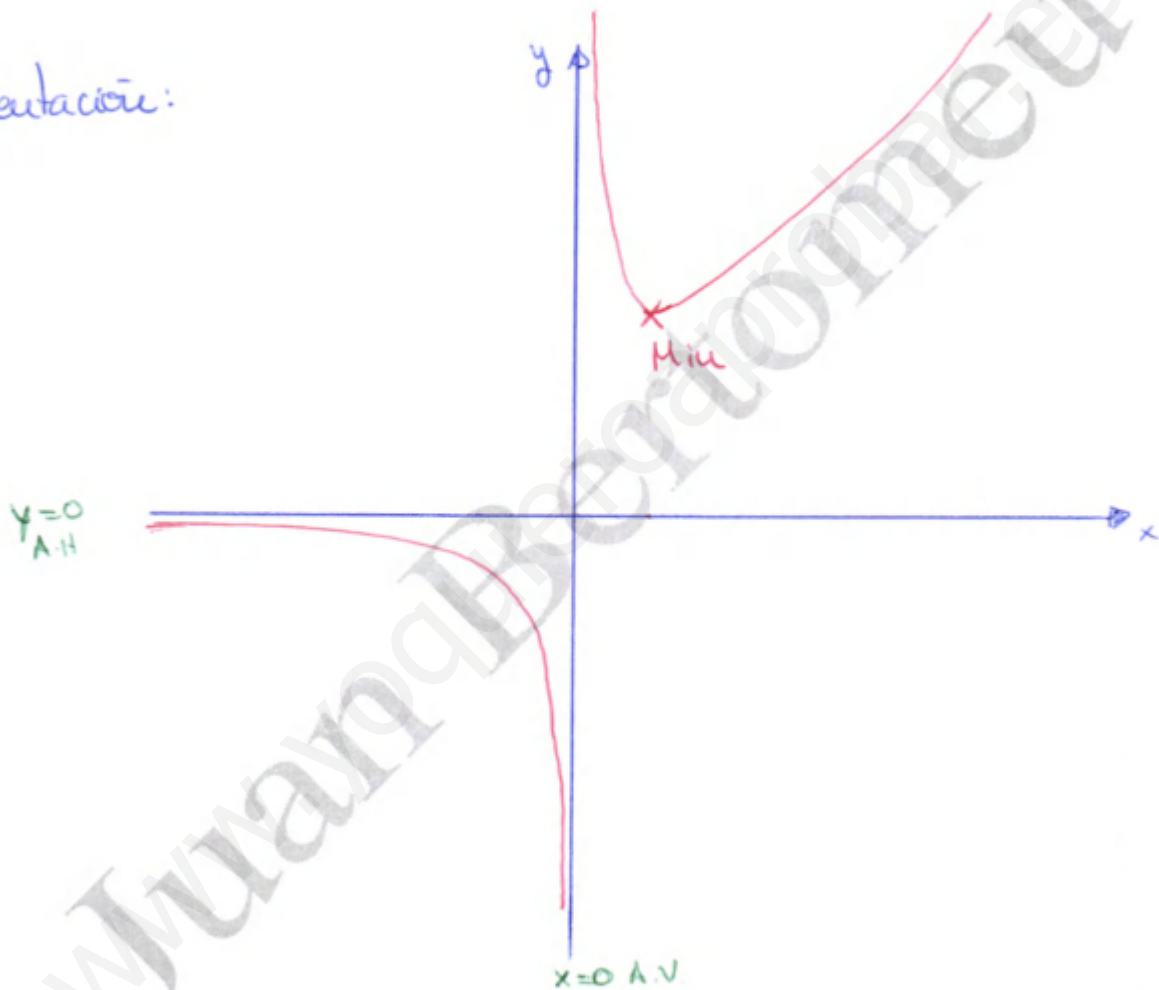


Cóncava: $]0, +\infty[$

Convexa: $] -\infty, 0[$

No presenta puntos inflexión

⑦ Representación:

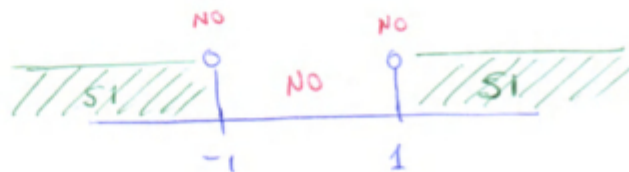


5) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

① Dominio:

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1$$



$$\text{Dom}(f(x)) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

② Puntos de corte con los ejes

- Con el eje $X \rightarrow f(x) = 0$

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = +\sqrt{2} \rightarrow PC(\sqrt{2}, 0) \\ x = -\sqrt{2} \rightarrow PC(-\sqrt{2}, 0) \end{cases}$$

- Con el eje $Y \rightarrow x = 0$ $\nexists f(0)$ pues $x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)) \rightarrow$ No corta

③ Simetrías:

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$f(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1)$$

$$-f(x) = -\ln(x^2 - 1)$$

Caso $f(x) = f(-x)$ la función es simétrica respecto al eje Y (simetría par)

④ Asíntotas:

 $\rightarrow$ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es A. Vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es A. Vertical.}$$

 $\rightarrow$ A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 - 1) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 1) &= \infty \end{aligned} \right\} \text{ No presenta A. Horizontales}$$

→ A. oblicuas: $y = mx + n$

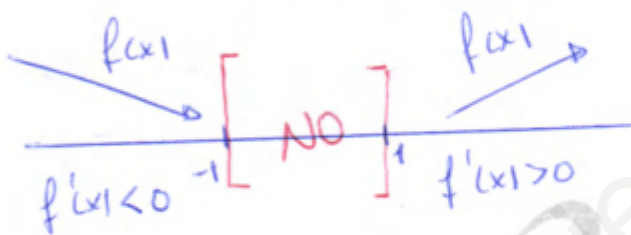
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0 \rightarrow \text{No presenta A. oblicuas.}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \ln(x^2-1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0 \quad (\text{No sirve pues } x=0 \notin \text{Dom}(f))$$



Creciente: $]1, +\infty[$

Decreciente: $] -\infty, -1[$

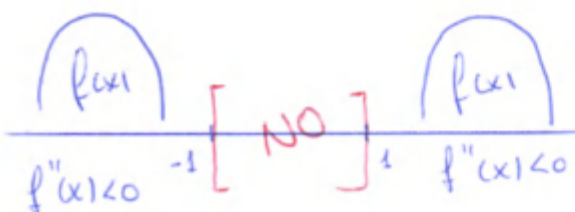
No presenta extremos relativos.

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

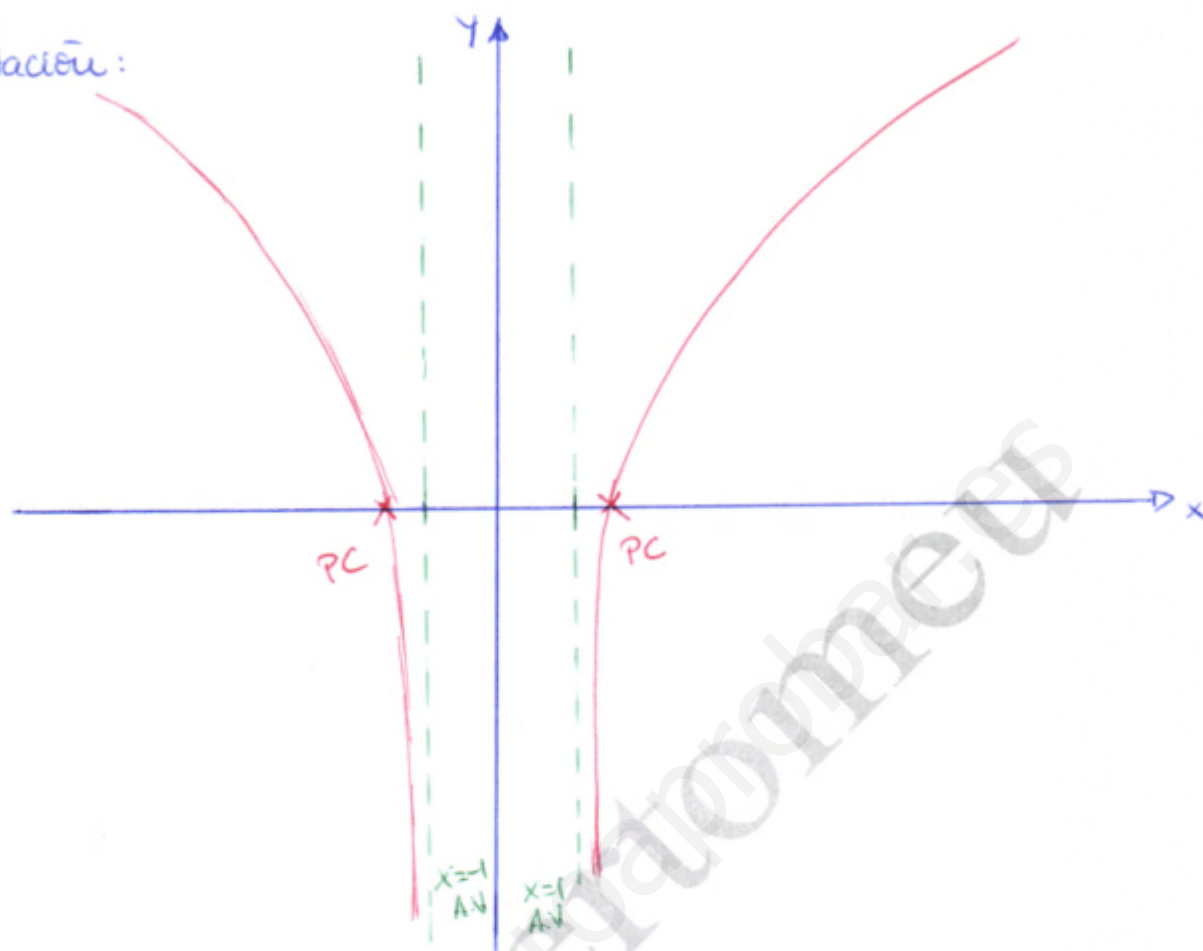
$$f''(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow -2x^2-2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



$f(x)$ es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

⑦ Representación:



$$T) f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

① Dominio:

$$\text{Como } \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $x \rightarrow f(x) = 0$

$$\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 \rightarrow 1 = 1+x^2 \rightarrow x = 0$$

$$PC(0,0)$$

- Con el eje $y \rightarrow x = 0$

$$f(0) = 0 \rightarrow PC(0,0)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1}{1+(-x)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$-f(x) = -\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Caso $f(x) = f(-x)$ la función es par o simétrica respecto al eje Y.

④ Asintotas:

→ A. Verticales:

No tiene por estar definida en $\mathbb{R}$.

→ A. Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = [\ln 0^+] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\infty \text{ (función par)}$$

No presenta A. Horizontales.

→ A. Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x} = \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{1+x^2} = 0$$

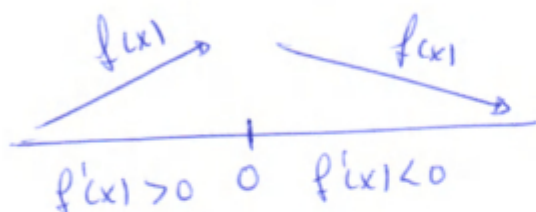
$\Rightarrow$ No presenta A. oblicuas.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x}{1+x^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

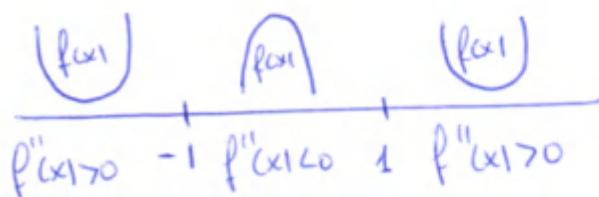
Creciente: $]-\infty, 0[$ Decreciente: $]0, +\infty[$ Máximo relativo $(0, 0)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2) + 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

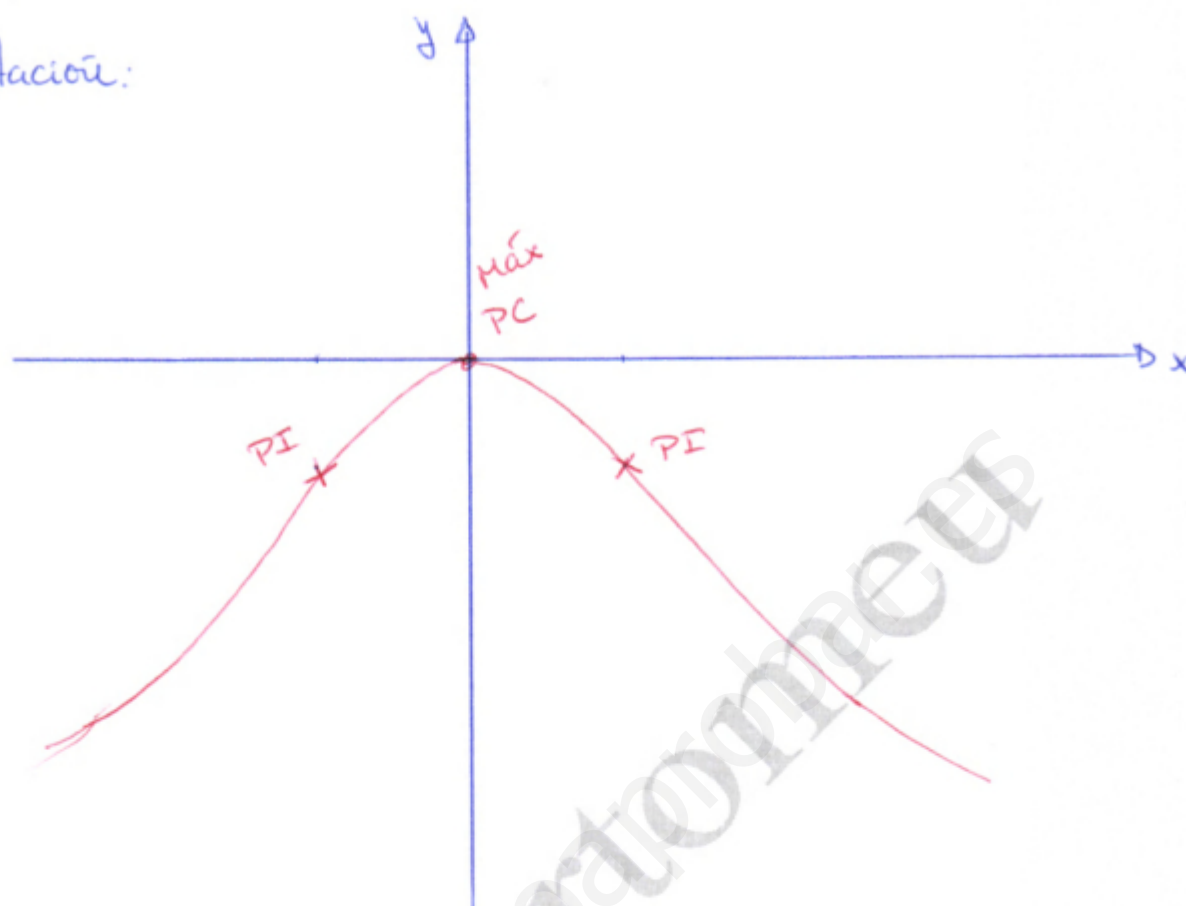
Cóncava: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ Convexa: $]-1, 1[$

Puntos inflexión:

$$x = 1 \rightarrow P.I. (1, -\ln 2)$$

$$x = -1 \rightarrow P.I. (-1, -\ln 2)$$

⑦ Representación:



U) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

① Dominio:

$x > 0 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) =]0, +\infty[$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $x \rightarrow f(x) = 0$

$$x^2 \cdot \ln x = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{No vale pues } x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)) \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{PC}(1, 0) \end{cases}$$

- Con el eje $y \rightarrow x = 0$

$\nexists f(0)$ pues $x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)) \rightarrow \text{No corta}$

③ Simetrías:

Al estar definida de $]0, +\infty[$ no presenta simetrías.

④ Asíntotas:

→ A. Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow \text{No presenta A. Vertical.}$$

→ A. Horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln x = +\infty \rightarrow \text{No presenta A. Horizontal.}$$

→ A. Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln x = \infty$$

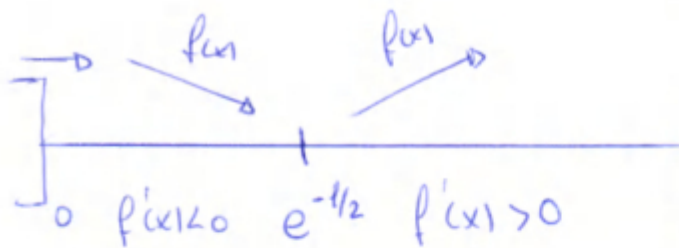
→ No presenta A. Oblicua.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (No sirve)} \\ 2 \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = e^{-1/2} \approx 0.61 \end{cases}$$

Creciente: $]e^{-1/2}, +\infty[$ Decreciente: $]0, e^{-1/2}[$ Mínimo relativo en $x = e^{-1/2}$

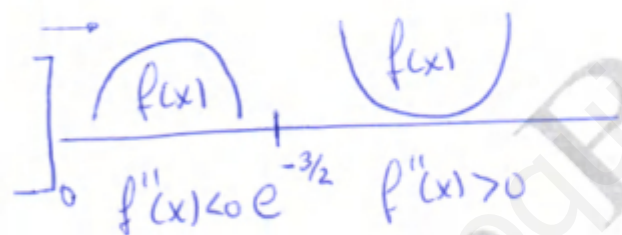
$$\text{Min}(e^{-1/2}, f(e^{-1/2})) = (0.61, -0.184)$$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = x(2\ln x + 1)$$

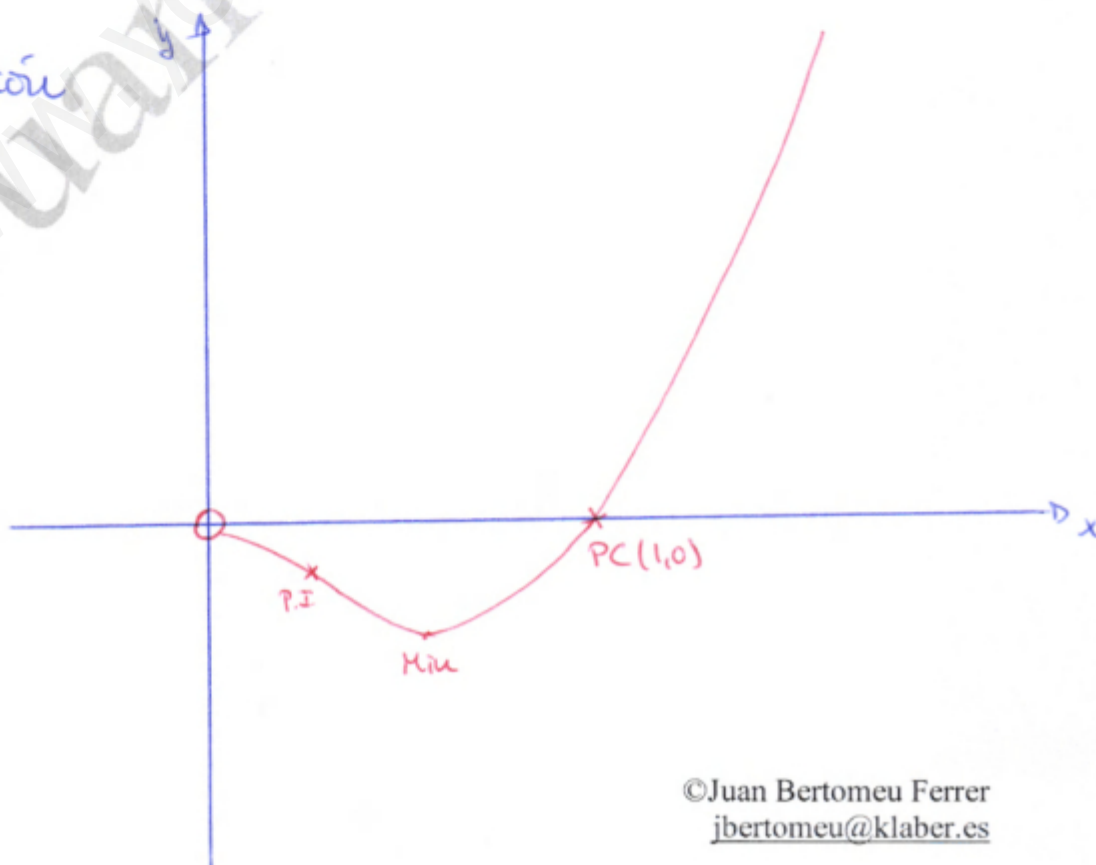
$$f''(x) = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2\ln x + 3 = 0 \rightarrow x = e^{-3/2} \approx 0.22$$

Convexa: $]0, e^{-3/2}[$ Cóncava: $]e^{-3/2}, +\infty[$

$$\text{P.I.}(e^{-3/2}, f(e^{-3/2})) \approx (0.22, -0.07)$$

⑦ Representación



$$V) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

① Dominio:

$$\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) =]0, +\infty[$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $x \rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow PC(1, 0)$$

- Con el eje $y \rightarrow x = 0$

$\nexists f(0)$ pues $x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)) \rightarrow$ No corta.

③ Simetrías:

No presenta por estar definida en $]0, +\infty[$

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{-\infty}{0^+} \right] = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es A. Vertical}$$

$\rightarrow$ A. Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es A. Horizontal}$$

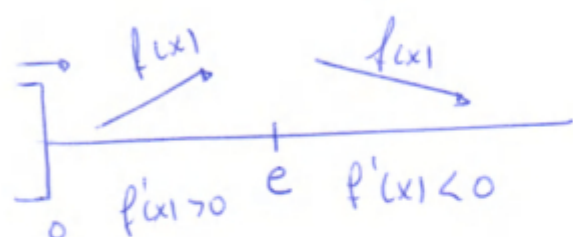
y por tanto no presenta asíntotas oblicuas.

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1/x \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e$$

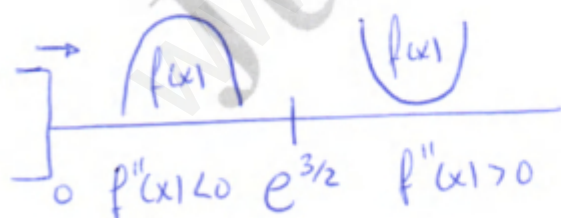
Creciente: $]0, e[$ Decreciente: $]e, +\infty[$ Máximo $x = e \rightarrow \text{Máx}(e, 1/e)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

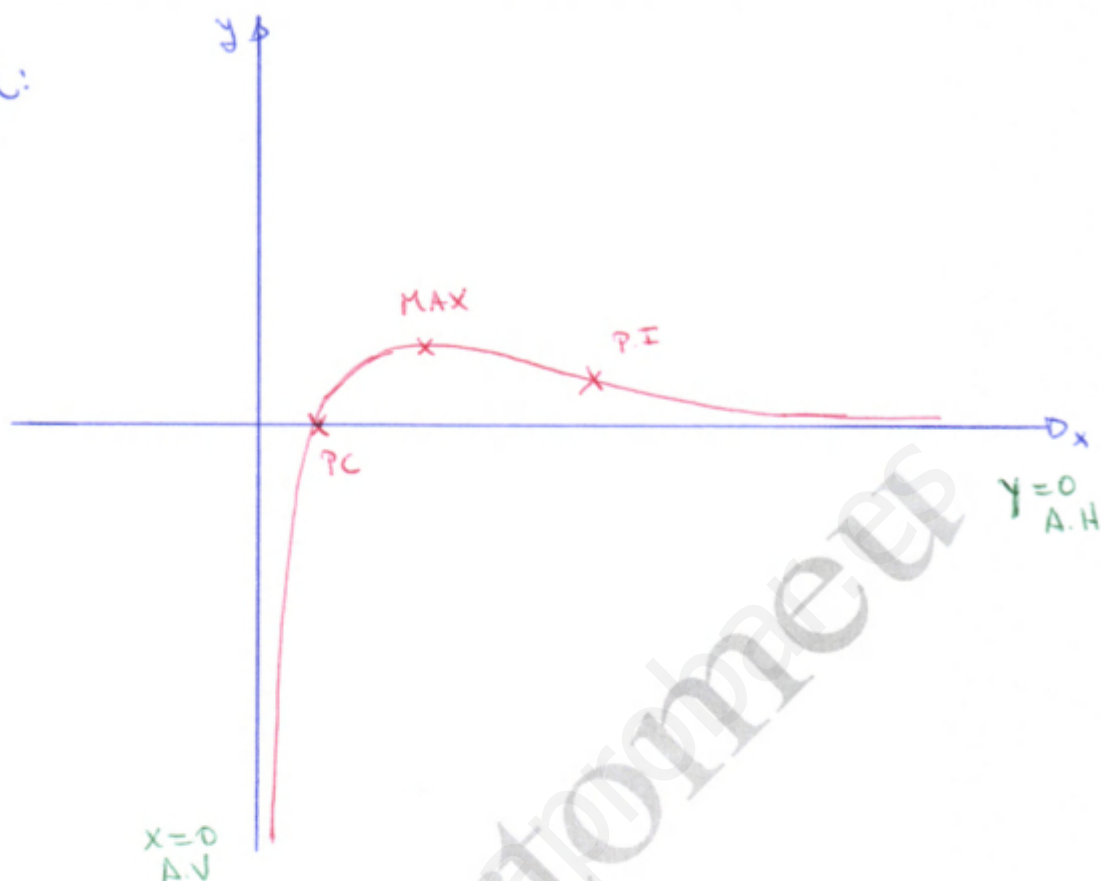
$$f''(x) = \frac{-1/x \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \rightarrow -3 + 2 \ln x = 0 \rightarrow x = e^{3/2}$$

Convexa: $]0, e^{3/2}[$ Cóncava: $]e^{3/2}, +\infty[$ Punto de inflexión $x = e^{3/2}$

$$PI(e^{3/2}, f(e^{3/2})) = (e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}})$$

⑦ Representación:



W) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

① Dominio

$$x > 0$$

$$\ln x = 0 \rightarrow x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dom}(f(x)) =]0, 1[\cup]1, +\infty[\end{array} \right.$$

② Puntos de corte con los ejes

- Con el eje $x \rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{x}{\ln x} = 0 \rightarrow x = 0 \quad (\text{No sirve pues } x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)))$$

- Con el eje $y \rightarrow x = 0$

$\nexists f(0)$ pues $x = 0 \notin \text{Dom}(f(x)) \rightarrow$ No corta.

③ Simetrías:

No presenta por estar definida en $]0,1[\cup]1,+\infty[$

④ Asíntotas:

→ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty \end{cases} \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$\Rightarrow x=1$ es A. Vertical

→ A. Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \infty \rightarrow \text{No presenta A. Horizontal}$$

→ A. oblicua: $y = \ln x + n$

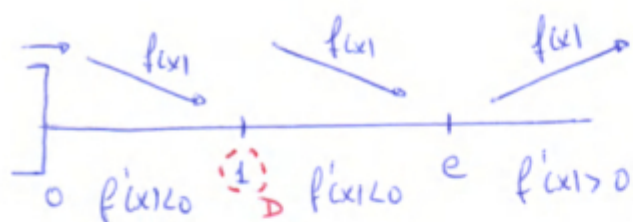
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \ln x} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \rightarrow \text{No presenta A. Oblicua}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \rightarrow \ln x - 1 = 0 \rightarrow x = e$$

Creciente: $]e, +\infty[$ Decreciente: $]0, 1[\cup]1, e[$ Mínimo relativo $x=e$

$$\text{Min}(e, f(e)) = (e, e)$$

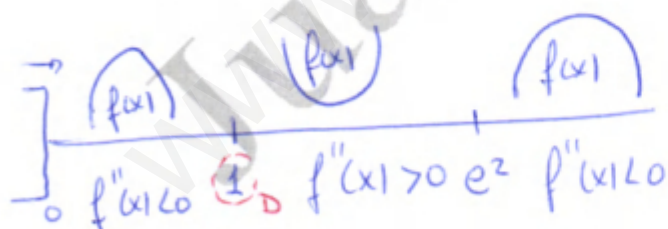
⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

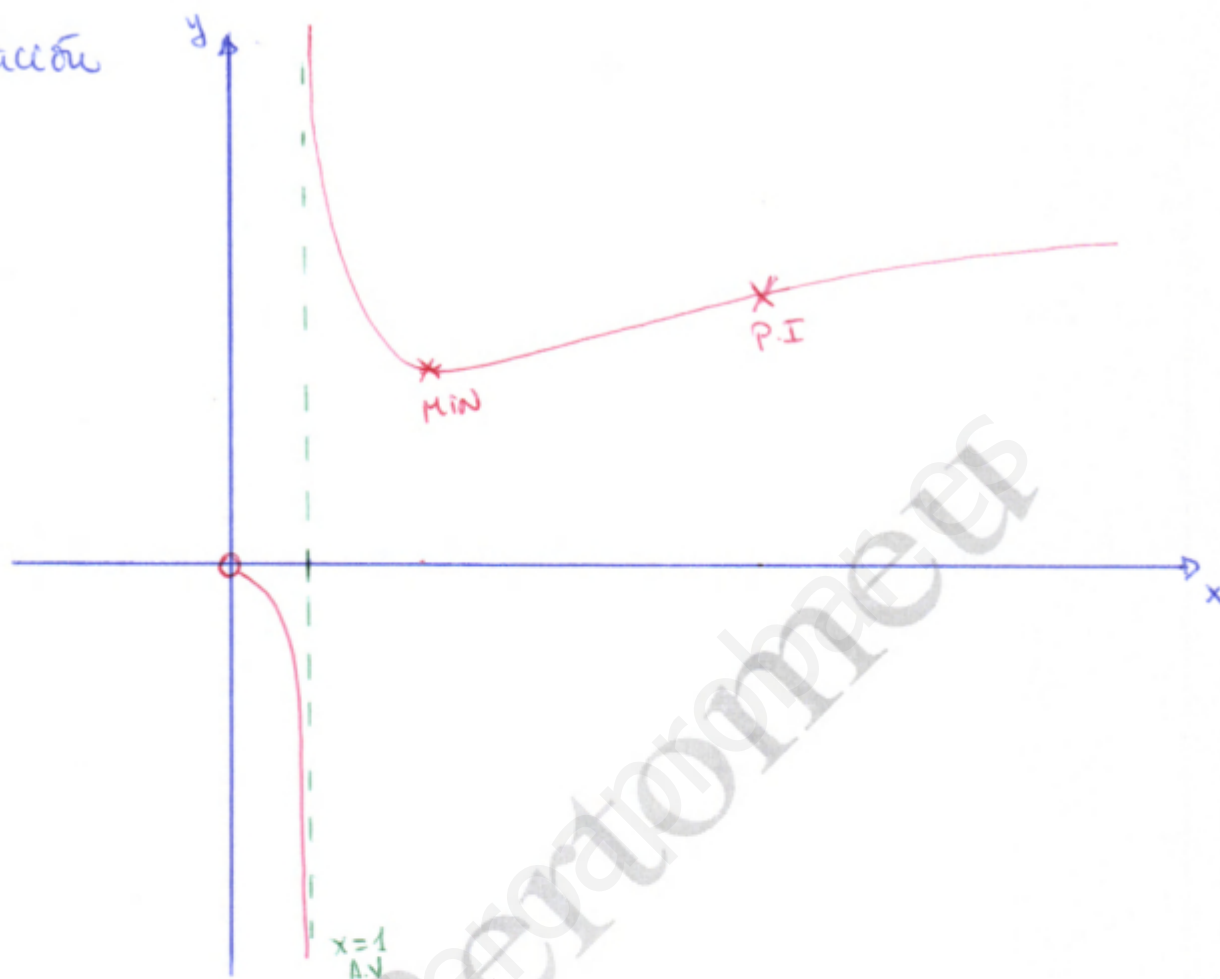
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{\frac{1}{x} [\ln x - 2 \ln x + 2]}{(\ln x)^3} =$$

$$= \frac{2 - \ln x}{x (\ln x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{2 - \ln x}{x (\ln x)^3} = 0 \rightarrow 2 - \ln x = 0 \rightarrow x = e^2$$

Cóncava: $]1, e^2[$ Convexa: $]0, 1[\cup]e^2, +\infty[$ Punto Inflexión $\rightarrow x=e^2 \rightarrow \text{P.I.}(e^2, f(e^2)) = (e^2, \frac{e^2}{2})$

⑦ Representación



$$X) f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

① Dominio

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje X $\rightarrow f(x)=0$

$$e^{\frac{x^2}{x-1}} \neq 0 \quad \forall x \rightarrow \text{No corta}$$

- Con el eje Y $\rightarrow x=0$

$$f(0) = e^0 = 1 \rightarrow \text{PC}(0,1)$$

③ Simetrías:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{x^2}{x-1}} \\ f(-x) &= e^{\frac{x^2}{-x-1}} \\ -f(x) &= -e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{aligned} \right\} f(x) \text{ no presenta simetría.}$$

④ Asíntotas:

→ A. Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0} \right] \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} &= +\infty \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x^2}{x-1}} = [e^{1/0}] \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= e^{+\infty} = \infty \end{aligned} \right\} \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

 $\Rightarrow x=1^+$ es A. Vertical.

→ A. Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} = [e^{\infty}] = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} = [e^{-\infty}] = 0$$

 $y=0$ es A. Horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$
 $\Downarrow$
Puede que haya oblicua en $x \rightarrow +\infty$

→ A. oblicuas: $y = mx + n$

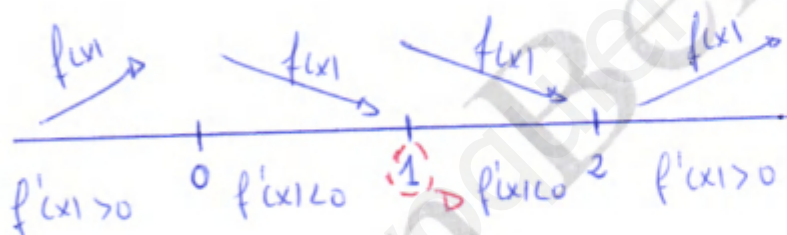
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{x-1}}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \infty \rightarrow \text{No hay A. oblicua.}$$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$



Creciente: $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

Decreciente: $]0, 2[\cup]2, 2[$

Máximo en $x=0 \rightarrow \text{Máx}(0, f(0)) = (0, 1)$

Mínimo en $x=2 \rightarrow \text{Mín}(2, f(2)) = (2, e^4)$

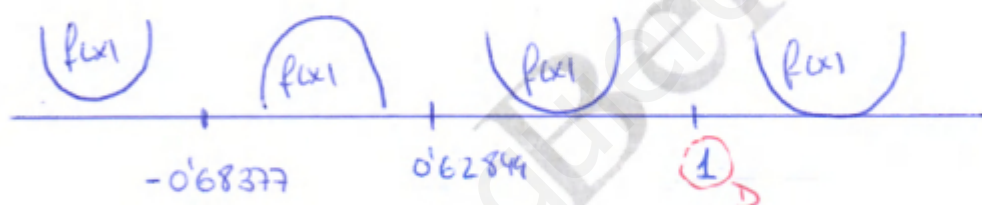
⑥ Curvatura:

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \right)$$

$$f''(x) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \right)^2 + e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \right) =$$

$$= e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \frac{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 2)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x - 2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0'62849 \\ x = -0'68377 \end{array} \right\} \text{ Sacadas con ordenador!!}$$



Concava: $] -\infty, -0'68377[\cup] 0'62849, 1[\cup] 1, +\infty[$

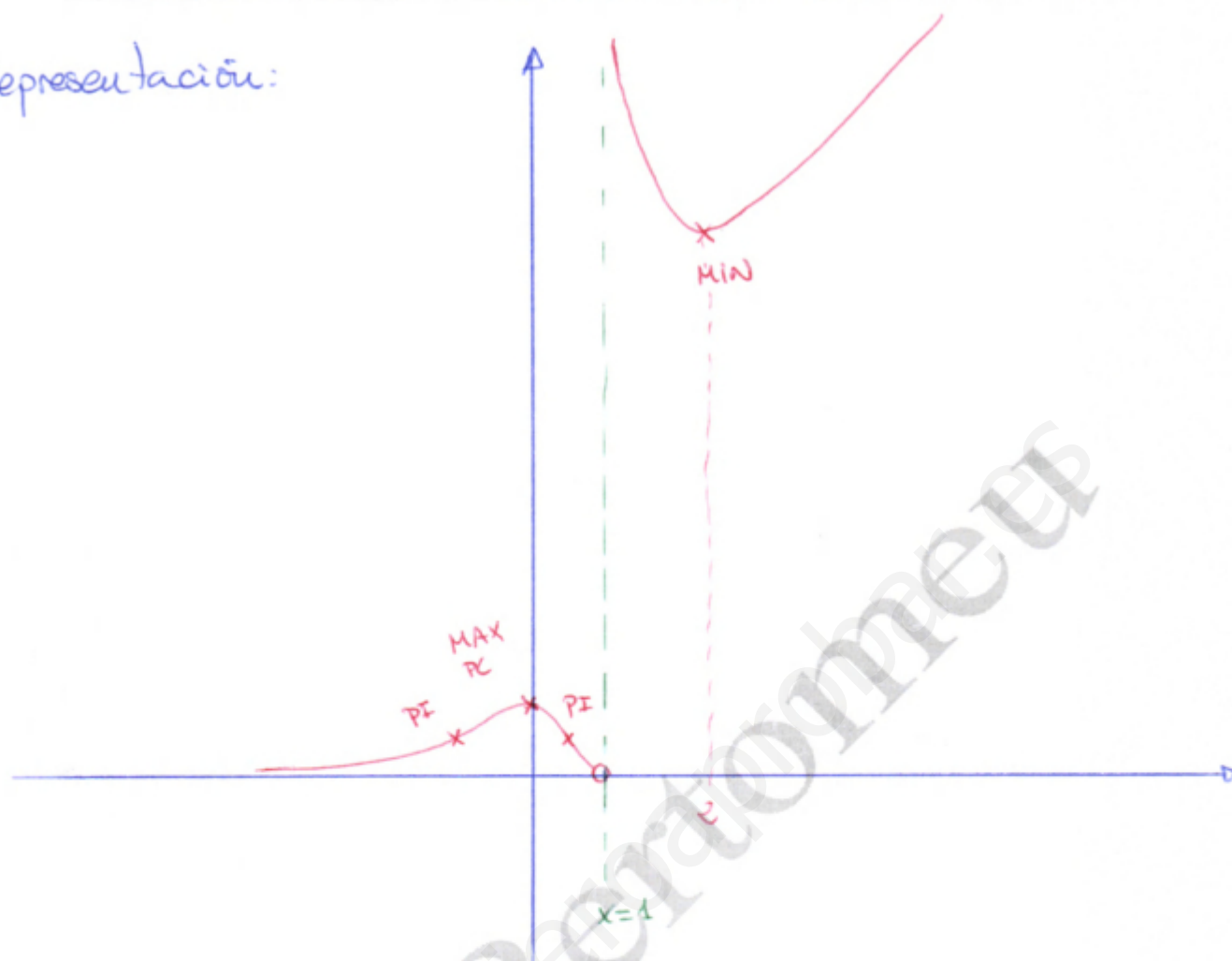
Convexa: $] -0'68377, 0'62849[$

Puntos inflexión:

$$x = -0'68377 \rightarrow \text{PI } (-0'68377, 0'76)$$

$$x = 0'62849 \rightarrow \text{PI } (0'62849, 0'52)$$

③ Representación:

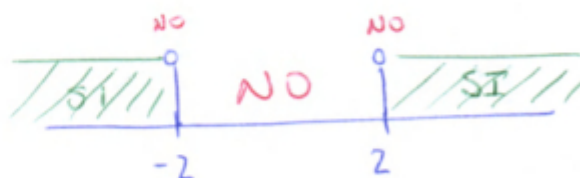


$$4) f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$$

① Dominio:

$$x^2-4 > 0$$

$$x^2-4=0 \begin{cases} \rightarrow x=+2 \\ \rightarrow x=-2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{Dom}(f(x)) =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $X \rightarrow f(x)=0$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \rightarrow x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No corta}$$

- Con el eje $Y \rightarrow x=0$

$\nexists f(0)$ ya que $x=0 \notin \text{Dom}(f(x)) \rightarrow \text{No corta}$

③ Simetrías:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{\sqrt{(-x)^2-4}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$-f(x) = -\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$$

Caso $f(x) = f(-x)$, la función es par o simétrica respecto al eje Y

④ Asíntotas:

$\rightarrow$ A. Verticales

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \rightarrow x = -2 \text{ es A. Vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \rightarrow x = +2 \text{ es A. Vertical}$$

→ A. Horizontales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} &= +\infty \end{aligned} \right\} f(x) \text{ no presenta A. Horizontales}$$

→ A. oblicuas: $y = mx + n$

$$\text{En } x \rightarrow +\infty \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1 - x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow y = x$ es A. oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\text{En } x \rightarrow -\infty \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x \cdot \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-4}} - x \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

$\Rightarrow y = -x$ es A. oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

⑤ Monotonía:

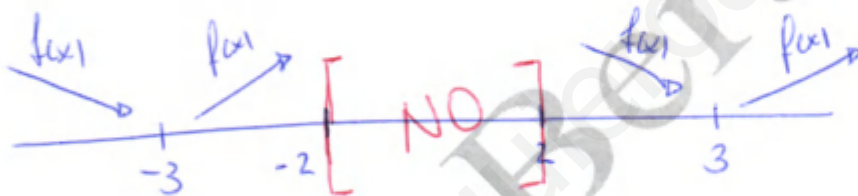
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^2 - 4} - (x^2 + 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}}{(\sqrt{x^2 - 4})^2} = \frac{2x(x^2 - 4) - x(x^2 + 1)}{(x^2 - 4)^{3/2}} =$$

$$= \frac{x^3 - 9x}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

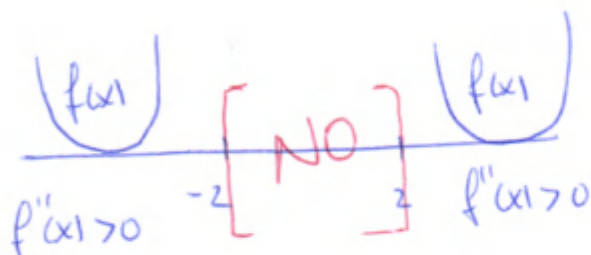
$\swarrow$ $x = 0$ (No sirve $\notin$ Dom)
 $\rightarrow$ $x = 3$
 $\searrow$ $x = -3$

Creciente: $]-3, -2[\cup]3, +\infty[$ Decreciente: $]-\infty, -3[\cup]2, 3[$ Mínimo en $x = -3 \rightarrow \text{Min}(-3, f(-3)) = (-3, 4'47)$ Mínimo en $x = 3 \rightarrow \text{Min}(3, f(3)) = (3, 4'47)$

⑥ Curvatura:

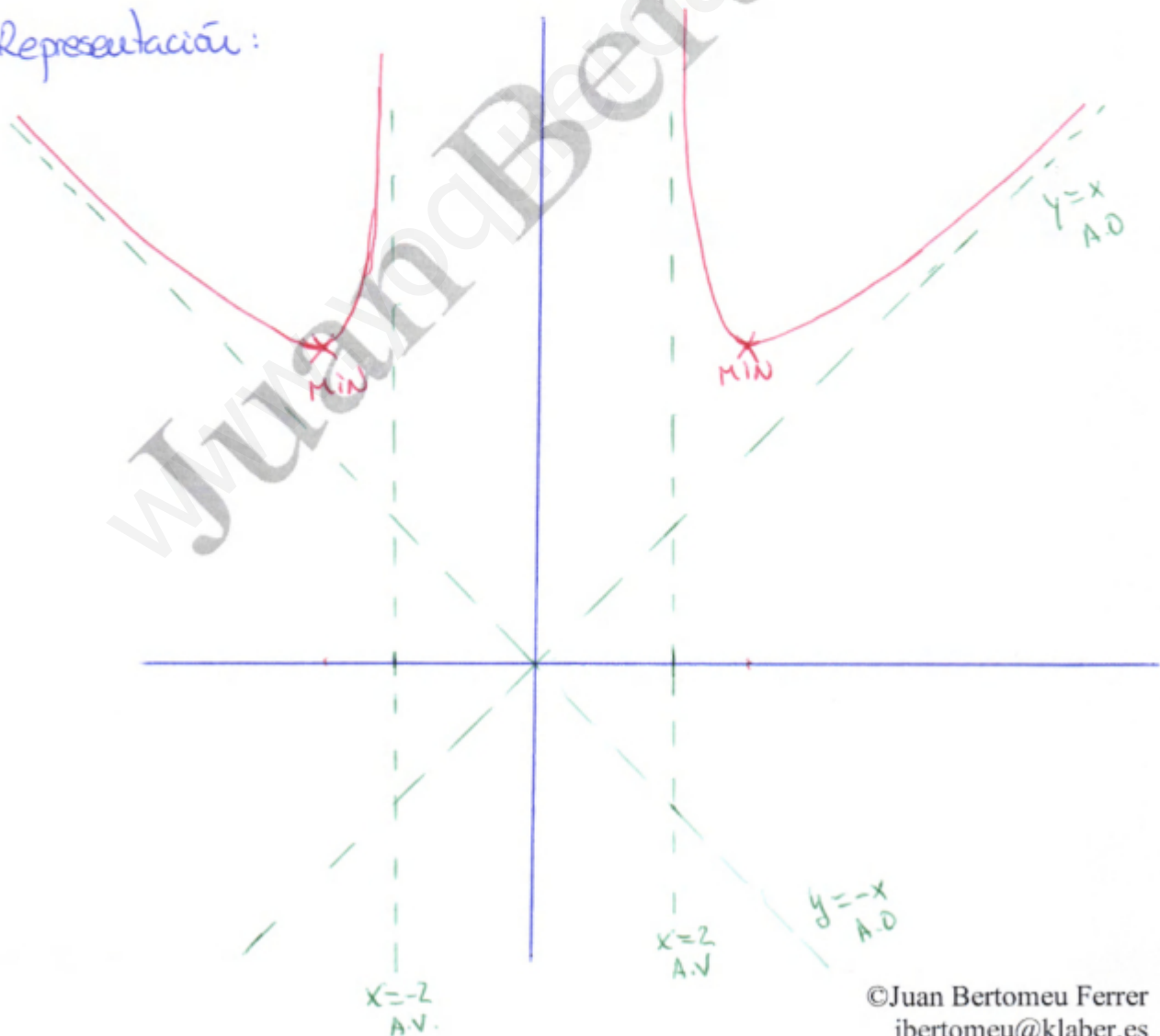
$$f'(x) = \frac{x^3 - 9x}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 36}{\sqrt{(x^2 - 4)^5}} ; f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f(x))$$



$f(x)$ es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

⑦ Representación:

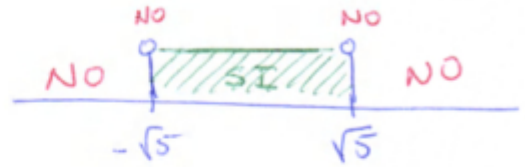


$$7) f(x) = \ln(5-x^2)$$

① Dominio:

$$5-x^2 > 0$$

$$5-x^2=0 \rightarrow x^2=5 \begin{cases} x=+\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{cases}$$



$$\text{Dom}(f) =]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$$

② Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje $x \rightarrow f(x)=0$

$$\ln(5-x^2)=0 \rightarrow 5-x^2=1 \rightarrow x^2=4 \begin{cases} x=2 \rightarrow PC(2,0) \\ x=-2 \rightarrow PC(-2,0) \end{cases}$$

- Con el eje $y \rightarrow x=0$

$$f(0) = \ln 5 \rightarrow PC(0, \ln 5)$$

③ Simetrías:

$$f(x) = \ln(5-x^2)$$

$$f(-x) = \ln(5-(-x)^2) = \ln(5-x^2)$$

$$-f(x) = -\ln(5-x^2)$$

Como $f(x) = f(-x)$, la función es par o simétrica respecto al eje y

④ Asíntotas:

→ A. Verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}^+} \ln(5-x^2) = -\infty \rightarrow x = -\sqrt{5} \text{ es A. Vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\sqrt{5}^-} \ln(5-x^2) = -\infty \rightarrow x = \sqrt{5} \text{ es A. Vertical}$$

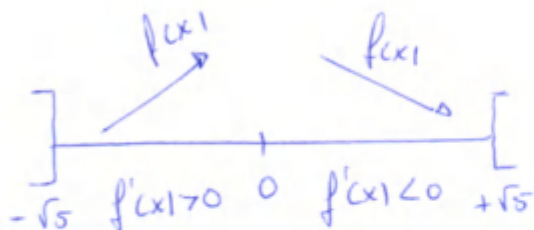
→ A. Horizontales y oblicuas:

No puede tener por estar definida en $] -\sqrt{5}, \sqrt{5} [$

⑤ Monotonía:

$$f(x) = \ln(5-x^2)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{5-x^2} ; f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$



Creciente: $] -\sqrt{5}, 0 [$

Decreciente: $] 0, \sqrt{5} [$

Máximo $(0, f(0)) = (0, \ln 5)$

⑥ Curvatura:

$$f'(x) = \frac{-2x}{5-x^2} ; f''(x) = \frac{-2(5-x^2) + 2x(-2x)}{(5-x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 10}{(5-x^2)^2}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 - 10 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es cóncava en todo su dominio

⑦ Representación:

