1) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $P(-1, 4)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal en ese punto? Representa gráficamente el ejercicio.

2) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 2x^3 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Comprueba que son paralelas a la recta $y = 6x$. Representa gráficamente el ejercicio.

3) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de estas funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + x$ en $x = \pi$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3}{x}$ en $x = -1$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 7)$ en $x = 0$

d) $f(x) = 3^{x+1}$ en $x = -1$

e) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$

g) $f(x) = \ln(x)$ en $x = e^2$

h) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ en $x = \frac{\pi}{3}$

4) Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ obtener la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto de abcisa $x = 3$

5) Encuentra los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las funciones siguientes es igual a 2:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

c) $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x+3}$ d) $f(x) = \ln(4x-1)$

6) Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ que sea paralela a la recta dada:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela a $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela a $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0$

7) Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $f(x) = 4 - x^2$ en los puntos de corte de $f(x)$ con el eje X. Representa el ejercicio.

8) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje X

9) Obtén los puntos donde la recta tangente a $f(x)$ es horizontal y escribe su ecuación, siendo:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

10) Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$.

11) Determina la parábola $f(x) = ax^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y = 2x-3$ en el punto $A(2,1)$ y que pasa por el punto $B(5,-2)$

12) Encuentra el valor de x para el que las rectas tangentes a las curvas $f(x) = 3x^2-2x+5$ y $g(x) = x^2+6x$ son paralelas. Escribe las ecuaciones de estas tangentes y representa gráficamente el ejercicio.

13) Encuentra $a, b,$ y c en $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ tiene tangente horizontal en los puntos $x=-4$ y $x=0$ y que pasa por el punto $P(1,1)$

14) La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abcisa $x=2$ es $4x-3y+1=0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

15) Encuentra una función $f(x) = ax^2+bx+c$ sabiendo que pasa por $(0,1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2,-1)$ vale 0.

16) Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, encuentra el valor de a y b para que la recta tangente a f(x) en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$

17) Encuentra el valor de "K" para que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + K$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

18) Encuentra los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abcisas.

19) Dada la parábola $f(x) = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = 3$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esta cuerda. Representa el ejercicio.

20) Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$

21) Calcula el valor de "a" para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$ en el punto de abcisa $x = 3$, corte al eje X en el punto de abcisa $x = 5$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal en $x = 3$?

22) Dada la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, calcula los valores b y c si esa función pasa por el punto $(1,4)$ y en ese punto, la ecuación de la recta tangente es $y = 4$.

23) ¿Para qué valor de K la recta $Kx + y = \ln(2)$ es tangente a $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abcisa $x = 0$?

24) Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ que pasan por el punto $(2,3)$

25) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - ax + 6$ en el punto $P(1,2)$ de la función.

26) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-5}{4-x}}$ en el punto de abcisa $x = 3$

27) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ en el punto de ordenada 1 y abcisa positiva.

28) ¿Puede ser la recta de ecuación $y = -2x + 4$ tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{x}$? En caso afirmativo, indica en qué punto.

29) Considera la función $f(x) = \ln(x-1)$ definida en el intervalo $[2, e+1]$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ paralela a la recta secante a $f(x)$ que pasa por los puntos de abcisas $x=2$ y $x=e+1$

30) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$

a) Determina el punto de la función en el que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x - 1$

b) Demuestra que la recta obtenida no corta en otro punto a $f(x)$.

31) Halla la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ cuya recta tangente en el punto $(1,1)$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

32) Halla los valores del parámetro K para que las rectas tangentes a la curva $f(x) = Kx^3 - x^2 + 7Kx - 18$ en los puntos de abcisas $x=1$ y $x=2$ sean paralelas.

33) Considera la función $f(x) = \sqrt{x^2 + m}$

a) Calcula el valor de m para el que la recta de ecuación $2x - y - 3 = 0$ sea tangente a $f(x)$ en $x=2$, y determina el punto de tangencia.

b) Halla m para el que la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $P(a,5)$ pase por el punto $Q(1,1)$

34) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $x=2$. Halla el área del triángulo que esta recta forma junto con los ejes de coordenadas.

35) Determina el área de la región delimitada por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la función $f(x) = 3 + \ln(\operatorname{tg} x)$ en el punto de abcisa $x = \frac{\pi}{4}$

36) Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+4} - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcula el área del triángulo delimitado por las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $x=-2$ y $x=5$ y el eje de abcisas.

37) Las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = c \cdot e^{-(x+1)}$ se cortan en el punto $P(-1,2)$ y tienen, en ese punto, la misma recta tangente. Determina los valores de a, b y c.

38) Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ en el punto de abcisa 3 y ordenada positiva.

39) Considera la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $\sqrt{5}$. Determina el área de la figura delimitada por las rectas tangentes a la curva en los puntos de abcisa $x=1$ y el eje de ordenadas

40) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina los valores a, b, c, y d para que se cumplan las siguientes condiciones:

i) Que la tangente a la gráfica de f en el punto (0,2) sea paralela a la recta $y + 1 = 0$

ii) Que la recta $x - y - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.

41) La ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$ define a "y" como función implícita de "x". Obtén la ecuación de la recta tangente a la cónica dada trazada por el punto (0,0) de la misma.

42) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de las siguientes funciones, obteniendo además los extremos relativos (máximos y mínimos) que presenten:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ b) $f(x) = 12x - 3x^2$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ f) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x}$

43) Comprueba que las siguientes funciones no tienen extremos y obtén sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) $f(x) = x^3+3x$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \ln(x)$

44) Estudia la monotonía de la función definida a trozos dada por $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-6x+8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indicando si existen o no extremos relativos. Represéntala gráficamente.

45) Estudia la monotonía de la función definida a trozos dada por $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indicando si existen o no extremos relativos. Represéntala gráficamente.

46) Estudia la monotonía de la función definida a trozos dada por $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indicando si existen o no extremos relativos. Represéntala gráficamente.

47) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de las siguientes funciones, obteniendo además los extremos relativos (máximos y mínimos) que presenten:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = -x^2-2x+5$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^6+2}$ f) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3+x^2-6x}$

g) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ h) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

48) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de las siguientes funciones, obteniendo además los extremos relativos (máximos y mínimos) que presenten:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $f(x) = |x^2-4| - 3$

c) $f(x) = |9-x^2|$ d) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

e) $f(x) = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ f) $f(x) = x - \text{sen}(x)$

g) $f(x) = 2^{x-x^2} - 3$ h) $f(x) = \text{arctg}(x)$

49) Determina los máximos y mínimos de las siguientes funciones utilizando la derivada segunda:

a) $f(x) = x^3 - 24x - 6$

b) $f(x) = 8x + 6x^2 - x^4$

c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \ln(x^2+1)$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$

f) $f(x) = (x^2+4)\cdot e^x$

g) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

i) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$

50) Determina los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican en cada caso:

a) $f(x) = x^2 - 6x - 4$, $x \in [0,5]$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$, $x \in [-1,4]$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in [-2,4]$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in [0,2]$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [0,2\pi]$

f) $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0,2\pi]$

51) Estudia la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad) de las siguientes funciones, obteniendo además los puntos de inflexión que presenten.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

e) $f(x) = (x^2-1)^2$

f) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

g) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

h) $f(x) = (1+x^2) \cdot e^x$

52) Estudia la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad) de las siguientes funciones, obteniendo además los puntos de inflexión que presenten:

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+7x}$

e) $f(x) = \dfrac{-x^3+2}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

h) $f(x) = (x-3) \cdot e^x$

i) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$

j) $f(x) = \cos(2x)$

53) Dada la función $f(x)=ax^2+bx+c$, determina los coeficientes a, b y c sabiendo que la gráfica de esta función pasa por los puntos (1,2) y (2,6) y que, en este último punto, la recta tangente a la curva tiene como ecuación $7x-y-8=0$. Para los valores calculados, estudia la monotonía y extremos relativos de $f(x)$.

54) Calcula los valores de a, b y c sabiendo que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos (1,0) y (0,-2) y presenta un máximo en $x=\frac{3}{2}$. Para esos valores, estudia la monotonía y extremos relativos de $f(x)$.

55) La función $f(x)=x^3+ax$ presenta un extremo relativo en el punto de abcisa $x=2$. Determina el valor de "a" y para ese valor estudia la monotonía y extremos relativos de $f(x)$.

56) Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ pasa por el origen de coordenadas, por el punto $\left(1,\frac{5}{6}\right)$, tiene un máximo relativo en el punto de abcisa 1 y un mínimo relativo en el punto de abcisa 2.

57) Determina a y b sabiendo que $f(x)=\dfrac{ax^2+x+b}{x^2+1}$ pasa por el punto $P\left(-2,\frac{13}{5}\right)$ y alcanza un extremo relativo en el punto de abcisa $x=-1$. Estudia monotonía y extremos.

58) Calcula $a \neq 0$ sabiendo que $f(x) = \dfrac{a^2 x}{2x^2 - 5ax + 2a^2}$ tiene un extremo relativo en $x = 2$. Para el valor calculado, obtén el dominio de la función $f(x)$.

59) Calcula a, b y c de modo que la función $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + ax + c}$ tenga un extremo relativo en el punto $(2, -1)$ y pase por el origen de coordenadas

60) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{ax}$, determina "a" sabiendo que f(x) alcanza un máximo relativo en el punto $x = 1$

61) La función $f(x) = x + a \cdot x \cdot |x|$ alcanza un extremo relativo en $x = 1$. Para el valor calculado, estudia la monotonía y los extremos relativos.

62) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x$, calcula "a" sabiendo que f(x) tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

63) Halla los valores de a, b y c sabiendo que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de inflexión en $x = 3$, pasa por el punto $(1, 0)$ y alcanza un mínimo relativo en $x = 1$.

64) La función $f(x) = x^3 - ax^2 - 4x + b$ corta al eje OX en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abcisa $\frac{2}{3}$. Determina a y b.

65) Calcula los valores de "a", con $a \neq 0$ para que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ trazadas por sus puntos de inflexión, sean perpendiculares entre si.

66) Dada la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcula "a" sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abcisa $x=3$ ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

67) Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x=2$ y un punto de inflexión en $P(1,2)$

68) La función $f(x) = ax^2 + x^3 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, que $f'(1) = 0$, y que $f(x)$ no tiene extremo relativo en $x=1$. Calcula a, b, y c.

69) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la función $f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.

70) Halla el valor de "c" de modo que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico. Clasifica dicho punto crítico.

71) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x<0 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcula el valor de a y b para que sea derivable en $\mathbb{R}$.

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a=-2$ y $b=1$

72) Dada la función $f(x) = |x-3|(x+1)$, halla los puntos donde las rectas tangentes son paralelas a la recta $y=6x-2$

73) Dada la función $f(x) = 4-x^2$ se pide:

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la cuerda que une los puntos $(-1,3)$ y $(2,0)$. Representa gráficamente el ejercicio.

b) Las rectas que, pasando por el punto $(2,1)$, son tangentes a $f(x)$. Representa gráficamente el ejercicio.

74) Halla "a" para que $f(x) = x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)$ con $a>0$ tenga un punto crítico en $x=e$

75) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+px & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+mx+n & \text{si } x>1 \end{cases}$, calcula m, n, y p sabiendo que es derivable en $\mathbb{R}$ y que tiene extremo relativo en $x=-\frac{1}{2}$. ¿Es un máximo o un mínimo? ¿Existen otros puntos críticos? Representa la función.

76) Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + |x-2|$ b) $f(x) = 3 \cdot e^{-2 \cdot |x|}$

77) Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo $[-2,3]$ de la función $f(x) = \ln(x^2+1) + (x-3)$

78) El coste total en euros de fabricación de "q" unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

El coste medio por unidad es $M(q) = \frac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se tienen que fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de "q" calculado en el apartado anterior.

79) La función $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios en miles de euros desde que una empresa empezó a funcionar hace "x" años. ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio? ¿Pierde la empresa dinero en algún momento?

80) Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación $C(x)$, en euros, son función del número "x" de juguetes fabricados según:

$$C(x) = 10x^2 - 1850x + 25000$$

Si el precio de venta de cada juguete es de 50€:

a) Plantea la función de ingresos que obtiene el taller al vender los juguetes que fabrica.

b) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuáles son los beneficios máximos?

81) La función $B(x) = \dfrac{-x^2+9x-16}{x}$ representa, en miles de euros, el beneficio neto del proceso de venta de "x" artículos. ¿Cuántos artículos hay que vender para maximizar el beneficio? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

82) La caldera de calefacción de un colegio funciona desde las 9 hasta las 14 h. A las 12h se obtiene el consumo mínimo, que es de 15 litros. Si el consumo viene dado por la función:

$$C(t) = (t-a)^2 + b \quad \text{con } 9 \le t \le 14$$

determina las constantes a y b.

83) El consumo de agua de la piscina municipal, en metros cúbicos mensuales, varía durante los primeros seis meses del año según:

$$C(t) = 8t^3 - 84t^2 + 240t \quad \text{con } 1 \le t \le 6$$

Estudia la evolución del consumo y averigua cuándo se producen los consumos máximo y mínimo. ¿Cuáles son esos consumos?

84) El rendimiento de una máquina durante un tiempo de funcionamiento de 20 horas, medido en %, puede describirse mediante la función $R(t) = At(B-t)$ con $0 < t \le 20$:

a) Determina A y B sabiendo que el rendimiento máximo del 100% se alcanza a las 10 horas.

b) ¿A qué horas el rendimiento es del 64%?

85) Una empresa ha estimado que, al cabo de 15 años de funcionar, sus ingresos y gastos en miles de euros vienen dados por:

$$I(t) = -2t^2 + 50t \quad \text{con } 0 \le t \le 15$$

$$G(t) = t^2 - 16t + 100 \quad \text{con } 0 \le t \le 15$$

a) ¿Cuáles son los gastos iniciales de la empresa?

b) Obtén la función B(t) de beneficios de la empresa. ¿En qué año fueron máximos los beneficios? ¿Cuáles fueron estos beneficios máximos?

86) Un restaurante abre a las 10 de la noche, y cierra cuando se marchan todos los clientes. El número de clientes N en función del número t de horas que lleva abierto es:

$$N(t) = 80t - 10t^2$$

a) ¿A qué hora cierra el restaurante?

b) ¿Cuantos clientes habrá como máximo y a qué hora?

87) El beneficio en miles de euros en función del gasto "x" en publicidad (también en miles de euros) es:

$$B(x) = \begin{cases} -5x^2+40x-60 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \le 10 \end{cases}$$

a) ¿Cuánto se debe invertir en publicidad para no tener pérdidas?

b) ¿Qué gasto en publicidad maximiza el beneficio? ¿Cuál es el máximo beneficio?

88) Las acciones de una empresa tienen una rentabilidad anual, en %, que viene dada por la expresión:

$$R(t) = 3 + \frac{t}{100} - \frac{t^2}{1000}$$

donde t es el número de años de funcionamiento. ¿Cuál será la rentabilidad máxima y en qué año se consigue?

89) Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo de 1000€ más una comisión que viene dada por la función $17x - 0'0025x^3$, donde "x" representa el número de pólizas vendidas. Si el vendedor tiene un gasto general de 200€ mensuales, más otro de 5 € por póliza vendida, ¿cuántas polizas debe vender para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles son dichos beneficios?

90) Una empresa de compra y venta de coches ha realizado un estudio sobre sus beneficios/pérdidas, en miles de euros, a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función:

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 10$$

a) ¿En qué año se alcanza el máximo y el mínimo? Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento.

b) ¿Cuáles son los beneficios máximos?

91) Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad en euros viene dada por:

$$R(x) = -0'01x^2 + 5x + 2500 \; , \quad x \equiv \text{cantidad invertida } (€)$$

Calcula cuánto se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad, así como dicha rentabilidad máxima.

92) Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio P(t), en miles de euros, varió con el tiempo "t", en años, según la función:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2+4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -\frac{5}{2}\cdot t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

Averigua en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron esos precios.

93) La oferta de un producto conocido su precio "p" es:

$$S(p) = \begin{cases} 30p+200 & \text{si } 0 \le p \le 10 \\ p^2-60p+1000 & \text{si } 10 < p \le 40 \end{cases}$$

Diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta.

94) La distancia, en millas, entre un barco que zarpó hace 10 días y su puerto base viene dada por:

$$M(t) = \begin{cases} 36-(2t-6)^2 & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ 4\cdot(10-t) & \text{si } 5 < t \le 10 \end{cases} \quad (t \text{ en días})$$

a) ¿En qué periodos aumentó y en cuáles disminuyo la distancia al puerto base? ¿Cuándo fue máxima y cuál fue esa distancia máxima?

b) ¿A partir de que día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

95) Queremos añadir a una casa una nueva habitación rectangular de $12\ m^2$ de superficie. ¿Qué longitud debemos dar a sus paredes para que el perímetro sea mínimo?

96) Se desea delimitar una parcela rectangular que linda con la pared de una nave. Si disponemos de 200 m de tela metálica para cercarla, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela que tiene la mayor superficie?

97) ¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado de $20\ dm^3$ de volumen para que en su fabricación se use la menor cantidad posible de material?

98) De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 20cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima y determina dicha área.

99) Considera los triángulos rectángulos de 8cm de hipotenusa, y halla los catetos del que tiene área máxima.

100) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 6cm de radio.

101) Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio "r" es un cuadrado de lado "$r\cdot\sqrt{2}$"

102) Entre todos los rectángulos de $3\,m^2$ de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.

103) Determina las dimensiones de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, teniendo uno de los lados sobre el diámetro de ella.

104) La suma del perímetro de un cuadrado más la longitud de circunferencia de un círculo es de 98 cm. ¿Cuál es el lado del cuadrado y el radio del círculo si la suma de las áreas ha de ser mínima?

105) De todos los prismas rectos de base cuadrada y de $24\,cm^2$ de área total, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?

106) Halla las dimensiones de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado, genera un cilindro de volumen máximo.

107) El perímetro de un triángulo isósceles es 10 m. Si gira alrededor de la altura correspondiente al lado desigual, genera un cono. Calcula los lados del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.

108) De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.

109) De todos los conos que pueden inscribirse en una esfera de 9cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.

110) De todas las rectas que pasan por el punto $(2,1)$, encuentra aquella que determina, junto con los semiejes de coordenadas positivos, un triángulo de área mínima.

111) Considera todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice en la recta de ecuación $x+2y=2$, y determina los vértices del de mayor superficie y halla dicha superficie.

112) Determina los puntos de la parábola $y=x^2$ que están a distancia mínima del punto $(0,1)$ y calcula dicha distancia.

113) Un rectángulo tiene por vértices los puntos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$ con $a>0$ y $b>0$. El punto (a,b) está sobre la curva $y=\frac{1}{x^2}+4$. Determina a y b para que el rectángulo tenga área mínima.

114) ¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima? Considera el triángulo en el primer cuadrante.

115) De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de 5 cm de radio, halla las dimensiones del que tiene mayor área.

116) Se desea fabricar una papelera cilíndrica, sin tapa, de 10 dm^3 de capacidad. ¿Qué dimensiones deberá tener para que en su fabricación se utilice la menor cantidad de material?

117) Determina tres números reales positivos cuya suma vale 100, la suma del primero más dos veces el segundo más tres veces el tercero vale 200 y cuyo producto sea lo mayor posible.

118) Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

119) Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede $x + y$ ser menor que 7?

120) Dada $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ con $1 \leq x \leq e$, determina cuáles de las rectas tangentes a $f(x)$ tienen pendiente máxima

121) El radio de un círculo crece uniformemente con una velocidad de 2cm/s. Halla la velocidad de crecimiento de su superficie cuando el radio sea 5 cm.

122) El punto P(x,y) recorre la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0,0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

123) Las manecillas de un reloj miden 4cm y 6cm. Uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(\alpha)=12\cdot \text{sen}(\alpha)$ donde α es el ángulo que forman las manecillas.

b) Halla "α" para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.

124) En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?

125) Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5m. Encuentra un punto P sobre la altura tal que la suma de distancias de P a los tres vértices sea mínima.

126) En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:

a) Expresa el área A del rectángulo en función de su base x y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

127) Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material. Pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

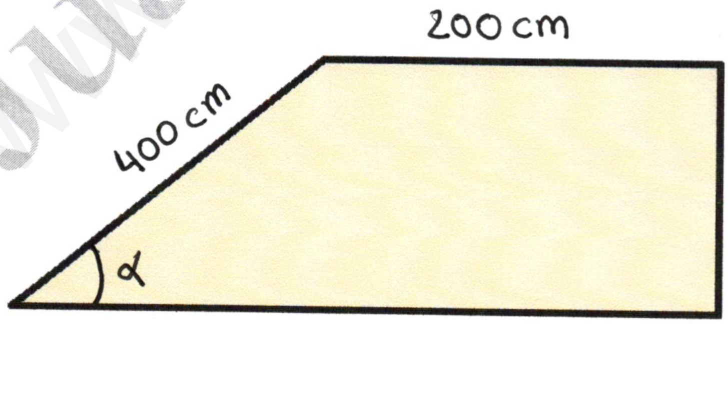
128) Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total sea mínima?

129) Un nadador, A, se encuentra a 3 Km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km

de la caseta. Sabiendo que nada a 3 Km/h y anda por la playa a 5 Km/h, averigua hasta que punto P de la playa debe nadar para llegar a B en el menor tiempo posible.

130) Un hilo de 34 m se divide en dos trozos para hacer un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo es el doble que su altura, encuentra la longitud de los dos trozos de hilo para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

131) Una ventana tiene forma de trapecio rectangular como en la figura. La base menor mide 200 cm y el lado oblicuo mide 400 cm. Encuentra el ángulo α que tiene que formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. ¿Cuál es dicha área máxima?

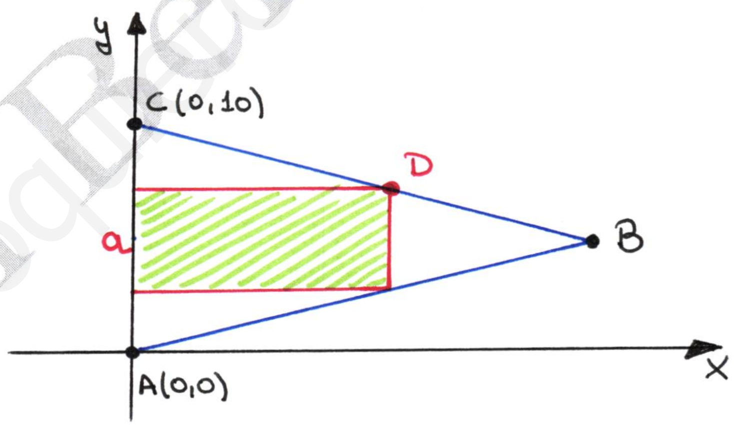


132) Se dispone de un alambre metálico de 140m. Se quiere dividir el alambre en tres trozos de forma que uno de los trozos mida el doble que otro, y que si con cada trozo se construye un cuadrado, la suma de las tres áreas sea mínima. Encuentra la longitud de cada trozo.

133) En el triángulo isósceles de la figura, la base $\overline{AC}$ mide 10cm y la altura es 20cm. Dado el rectángulo inscrito de la figura cuya base mide "a" cm:

a) Calcula las coordenadas del punto D en función de "a"

b) Encuentra el valor de "a" que maximiza el área del rectángulo.



134) Un avión vuela horizontalmente a velocidad constante y a 6Km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un observador P en tierra. Sabiendo que cuando la distancia entre P y el avión es de 10 Km ésta está aumentando a razón de 6 Km/min, halla la velocidad del avión.

135) Un incendio forestal se extiende en forma circular de manera uniforme. El radio del círculo quemado crece a una velocidad constante de 1'8 m/min

a) obtén el área quemada en función del tiempo "t" transcurrido desde el inicio del incendio.

b) Calcula la velocidad de crecimiento del área quemada en el instante en que el radio sea de 45m.

136) En una esfera se inyecta aire a una velocidad constante de 0'1 m^3/s. Halla la velocidad de crecimiento del radio cuando éste mida 2m.

137) obtener la expresión de la diferencial de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 9$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos(x)}$

c) $f(x) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^2$ d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$

138) Sea $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Qué error se comete cuando se calcula f(2'01) utilizando la ordenada del punto de abcisa x = 2'01 de la recta tangente a f(x) en x = 2?

139) Un alumno ha olvidado llevar la calculadora a un examen. ¿Cómo puede aproximar $\sqrt[6]{67}$ utilizando la diferencial?

140) Utiliza la diferencial para aproximar cuánto aumenta el área de un círculo de 4m de radio cuando dicho radio se incrementa 0'05mm.

141) A una bola de bronce de 7cm de radio se le da un baño de plata de 0'2 mm de grosor. Utilizando la diferencial, aproxima la cantidad de plata empleada.

142) Utiliza la diferencial para calcular cuánto varía la superficie total de un cubo de arista 10cm cuando dicha arista aumenta 0'3cm. Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos por utilizar la diferencial en lugar de utilizar la expresión exacta.

1) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2+3$ en el punto $P(-1,4)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal en ese punto? Representa gráficamente el ejercicio.

$$\left.\begin{array}{c} y - y_0 = m(x - x_0) \\ (x_0, y_0) = (-1,4) \\ m_{tg} = f'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) = x^2+3$$

$$\hookrightarrow f'(x) = 2x$$

$$\hookrightarrow m_{tg} = f'(-1) = -2$$

$$\hookrightarrow m_n = \frac{-1}{m_{tg}} = \frac{1}{2}$$

Y por tanto, las rectas pedidas

Tangente:

$$y - 4 = -2(x+1) \Rightarrow \boxed{y = -2x+2}$$

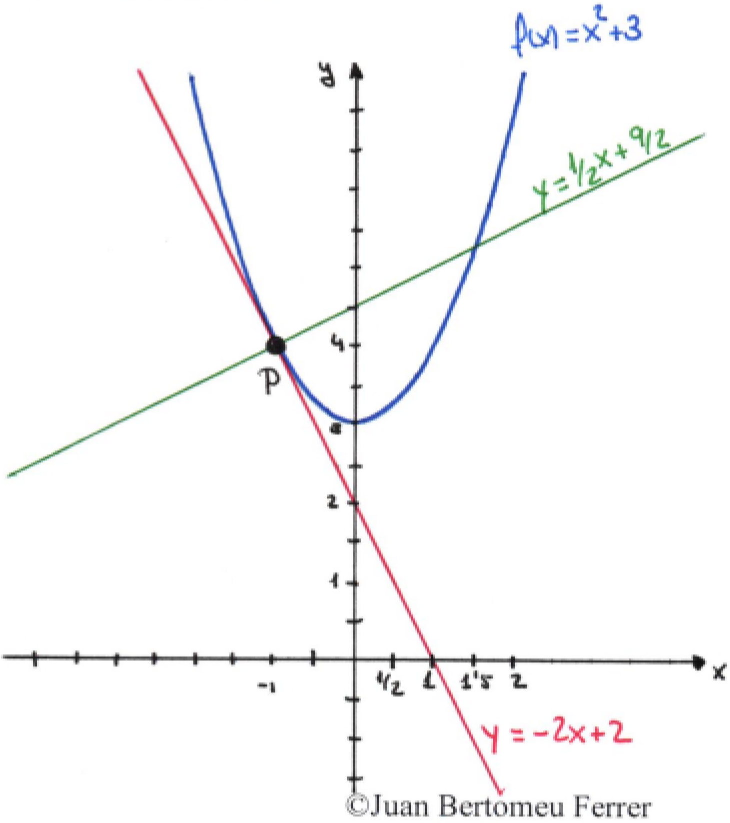
Normal:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}$$

x	$f(x) = x^2+3$
-2	7
-1	4
0	3
1	4
2	7

x	$y = -2x+2$
0	2
1	0

x	$y = 1/2\,x + 9/2$
0	$9/2$
-1	4



2) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 2x^3 + 3$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Comprueba que son paralelas a la recta $y = 6x$. Representa gráficamente el ejercicio.

$$f(x) = 2x^3 + 3 \longrightarrow f'(x) = 6x^2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

En $x = 1$:

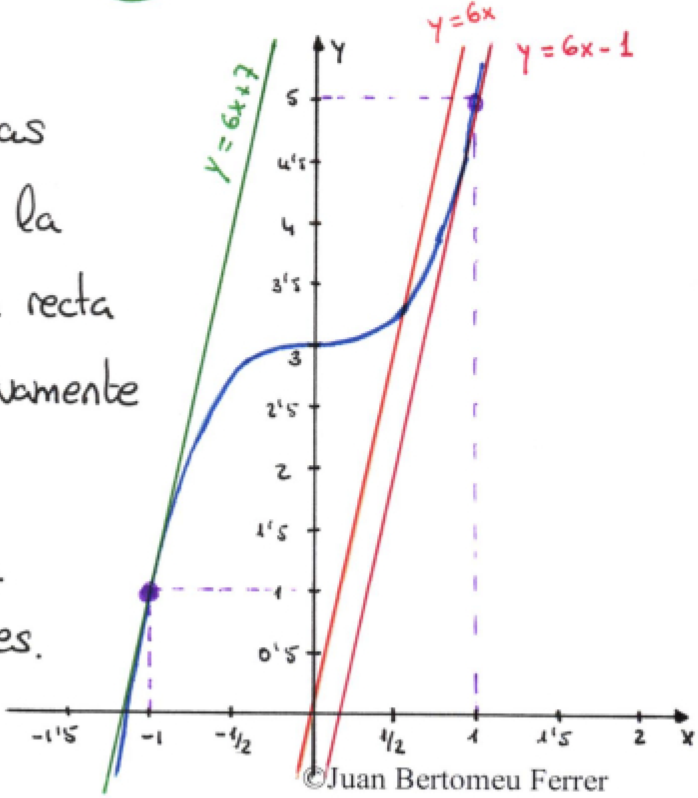
$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = f(1) = 5 \\ m = f'(1) = 6 \cdot 1^2 = 6 \end{array}\right\} \quad y - 5 = 6(x-1) \rightarrow \boxed{y = 6x - 1}$$

En $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = f(-1) = 1 \\ m = f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 = 6 \end{array}\right\} \quad y - 1 = 6(x+1) \rightarrow \boxed{y = 6x + 7}$$

Como vemos, las rectas calculadas tienen pendiente $m = 6$, que es la misma pendiente que tiene la recta dada $y = 6x$. Por tanto, efectivamente son paralelas.

Para la representación gráfica basta con hacer tabla de valores.



3) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de estas funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = sen(x) + x$ en $x = \pi$

$f'(x) = \cos(x) + 1$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \pi \\ y_0 = f(\pi) = \pi \\ m = f'(\pi) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - \pi = 0(x - \pi) \\ \boxed{y = \pi} \end{array}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3}{x}$ en $x = -1$

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4 - 3)}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = f(-1) = 2 \\ m = f'(-1) = 6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 2 = 6(x + 1) \\ \boxed{y = 6x + 8} \end{array}$$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 7)$ en $x = 0$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 7}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = f(0) = \ln 7 \\ m = f'(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - \ln 7 = 0 \cdot (x - 0) \\ \boxed{y = \ln 7} \end{array}$$

d) $f(x) = 3^{x+1}$ en $x = -1$

$f'(x) = 3^{x+1} \cdot \ln 3$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = f(-1) = 1 \\ m = f'(-1) = \ln 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 1 = \ln 3 \, (x+1) \\ \boxed{y = x \cdot \ln 3 + \ln 3 + 1} \end{array}$$

e) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $x = 2$

$f'(x) = 2x - 5$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = f(2) = 0 \\ m = f'(2) = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 0 = -1(x-2) \\ \boxed{y = -x + 2} \end{array}$$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ y_0 = f(3) = 2 \\ m = f'(3) = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 2 = \frac{1}{4}(x-3) \\ \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}} \end{array}$$

g) $f(x) = \ln(x)$ en $x = e^2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = e^2 \\ y_0 = f(e^2) = 2 \\ m = f'(e^2) = \frac{1}{e^2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 2 = \frac{1}{e^2} \cdot (x - e^2) \\ \boxed{y = \frac{1}{e^2} \cdot x + 1} \end{array}$$

h) $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ en $x = \frac{\pi}{3}$

$$f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{\pi}{3} \\ y_0 = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ m = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 1/2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}} \end{array}$$

4) Dada la función $f(x) = \frac{x}{x-2}$ obtener la ecuación de la recta tangente a dicha función en el punto de abcisa $x = 3$

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1.(x-2) - x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ y_0 = f(3) = 3 \\ m = f'(3) = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 3 = -2(x - 3) \\ \boxed{y = -2x + 9} \end{array}$$

5) Encuentra los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las funciones siguientes es 2.

a) $f(x) = x^2 - 2x$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ trazada por un punto de abcisa x_0 de la misma es el valor que toma la derivada $f'(x)$ en dicho punto x_0. Es decir:

$$m = f'(x_0)$$

Así:

$f(x) = x^2 - 2x \longrightarrow f'(x) = 2x - 2$

$m = f'(x_0) \longrightarrow 2 = 2x_0 - 2 \Rightarrow x_0 = 2$

El punto pedido es $P(x_0, f(x_0)) = (2, 0)$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+2) - x}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$m = f'(x_0) \longrightarrow 2 = \dfrac{2}{(x_0+2)^2} \Rightarrow (x_0+2)^2 = 1$ $\begin{cases} \nearrow x_0 + 2 = -1 \Rightarrow x_0 = -3 \\ \searrow x_0 + 2 = 1 \Rightarrow x_0 = -1 \end{cases}$

Los puntos pedidos

$P(x_0, f(x_0))$ $\begin{cases} \xrightarrow{x_0 = -3} P(-3, 3) \\ \xrightarrow{x_0 = -1} P'(-1, -1) \end{cases}$

c) $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x+3}$

$f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$m = f'(x_0) \longrightarrow 2 = \dfrac{2}{\sqrt{x_0+3}} \Rightarrow \sqrt{x_0+3} = 1 \Rightarrow x_0 + 3 = 1 \Rightarrow x_0 = -2$

El punto pedido es $P(x_0, f(x_0)) = (-2, 4)$

d) $f(x) = \ln(4x-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{4x-1} \cdot 4 = \frac{4}{4x-1}$$

$$m = f'(x_0) \longrightarrow 2 = \frac{4}{4x_0 - 1} \Rightarrow 4x_0 - 1 = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}$$

El punto pedido es $P(x_0, f(x_0)) = \left(\frac{3}{4}, \ln 2\right)$

6) Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ que sea paralela a la recta dada

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela a $2x + y + 1 = 0$

Por ser la recta tangente que buscamos paralela a la recta dada, ambas tendrán la misma pendiente:

$$r: 2x + y + 1 = 0 \longrightarrow r: y = -2x - 1 \Rightarrow m_r = -2$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$m = f'(x_0) \longrightarrow -2 = 2x_0 + 4 \Rightarrow 2x_0 = -6 \Rightarrow x_0 = -3$$

Y ahora que conocemos la abcisa x_0 del punto de tangencia ya podemos calcular la recta tangente pedida de la forma habitual.

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -3 \\ y_0 = f(-3) = -2 \\ m = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y + 2 = -2(x+3) \\ y = -2x - 8 \end{array}$$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela a $y = 6x + 10$

$r: y = 6x + 10 \Rightarrow m_r = 6$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$m = f'(x_0) \Rightarrow 6 = 3x_0^2 - 3 \Rightarrow x_0^2 = 3 \rightarrow x_0 = -\sqrt{3}, \quad x_0 = +\sqrt{3}$

En $x = -\sqrt{3}$:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -\sqrt{3} \\ y_0 &= f(-\sqrt{3}) = 0 \\ m &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= 6(x + \sqrt{3}) \\ y &= 6x + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

En $x = +\sqrt{3}$:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{3} \\ y_0 &= f(\sqrt{3}) = 0 \\ m &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= 6(x - \sqrt{3}) \\ y &= 6x - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0$

$r: 5x - y = 0 \rightarrow y = 5x \Rightarrow m_r = 5$

$f'(x) = \frac{1(x+2) - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$m = f'(x_0) \rightarrow 5 = \frac{5}{(x_0+2)^2} \Rightarrow (x_0 + 2)^2 = 1 \rightarrow x_0 + 2 = -1 \Rightarrow x_0 = -3, \quad x_0 + 2 = 1 \Rightarrow x_0 = -1$

En $x_0 = -3$:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -3 \\ y_0 &= f(-3) = 6 \\ m &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 6 &= 5(x + 3) \\ y &= 5x + 21 \end{aligned}$$

En $x_0 = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = f(-1) = -4 \\ m = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y + 4 = 5(x+1) \\ y = 5x + 1 \end{array}$$

7) Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $f(x) = 4 - x^2$ en los puntos de corte de $f(x)$ con el eje X. Representa el ejercicio.

Veamos dónde la función $f(x)$ corta al eje X:

$$f(x) = 0 \longrightarrow 4 - x^2 = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = -2 \\ \searrow x = +2 \end{array} \quad ; \quad f'(x) = -2x$$

En $x_0 = -2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ y_0 = f(-2) = 0 \\ m_{tg} = f'(-2) = 4 \\ m_n = -\dfrac{1}{m_{tg}} = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 0 = m(x+2) \\ y = m(x+2) \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{tangente}}$ $y = 4(x+2) \rightarrow y = 4x + 8$

$\xrightarrow{\text{normal}}$ $y = -\frac{1}{4}(x+2) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

En $x_0 = +2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = +2 \\ y_0 = f(2) = 0 \\ m_{tg} = f'(2) = -4 \\ m_n = \dfrac{-1}{m_{tg}} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 0 = m(x-2) \\ y = m(x-2) \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{tangente}}$ $y = -4(x-2) \rightarrow y = -4x + 8$

$\xrightarrow{\text{normal}}$ $y = \frac{1}{4}(x-2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

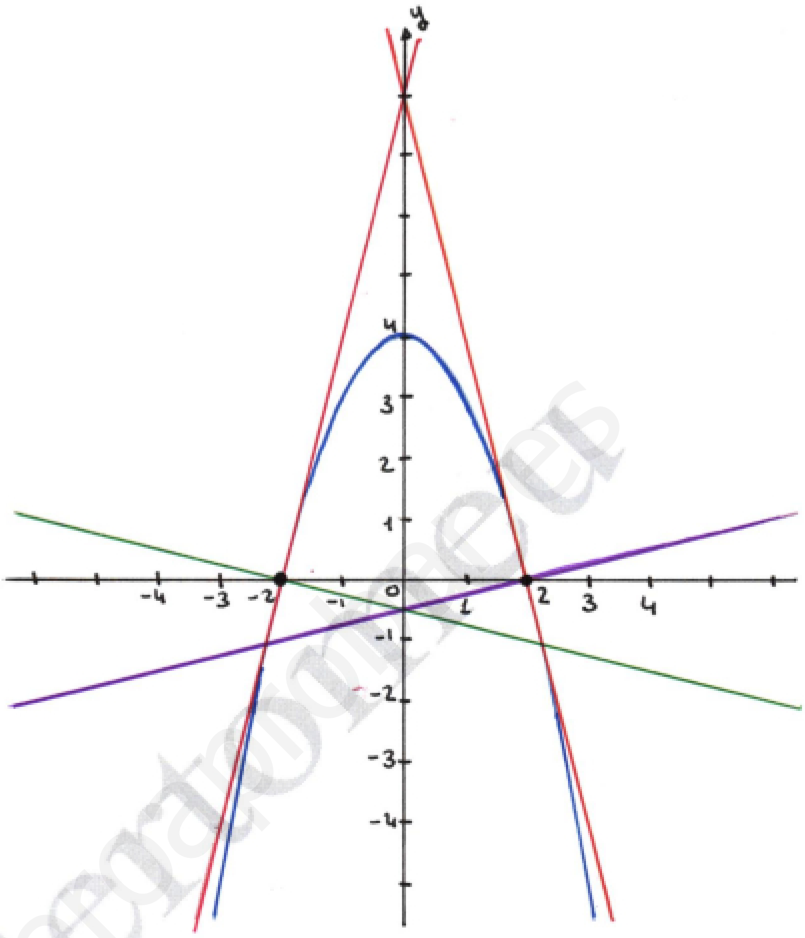
x	$f(x) = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0

x	$y = 4x + 8$
-2	0
0	8

x	$y = -\frac{1}{4}x - 1/2$
-2	0
0	-1/2

x	$y = -4x + 8$
2	0
0	8

x	$y = 1/4\, x - 1/2$
2	0
0	-1/2



8) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x+1)\cdot e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje X.

$$f(x) = (x+1)\cdot e^{-x} \longrightarrow f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+1)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x - 1) = -x\cdot e^{-x}$$

Veamos dónde la función $f(x)$ corta al eje X:

$$f(x) = 0 \longrightarrow (x+1)\cdot e^{-x} = 0 \begin{cases} x+1=0 \longrightarrow x=-1 \\ e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En $x_0 = -1$:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ y_0 &= f(-1) = 0 \\ m &= f'(-1) = e \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= e(x+1) \\ y &= ex + e \end{aligned}$$

9) Obtén los puntos donde la recta tangente a $f(x)$ es horizontal y escribe su ecuación, siendo:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$f'(x) = 6x - 2$

Una recta horizontal tiene pendiente nula $\Rightarrow m_{tg} = 0$

$m = f'(x_0) \longrightarrow 6x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$

En $x_0 = 1/3$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1/3 \\ y_0 = f(1/3) = \frac{14}{3} \\ m = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - \frac{14}{3} = 0(x - 1/3) \\ y = \frac{14}{3} \end{array}$$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$$m = f'(x_0) \longrightarrow 6x_0(x_0 - 1) = 0 \begin{cases} 6x_0 = 0 \longrightarrow x_0 = 0 \\ x_0 - 1 = 0 \longrightarrow x_0 = 1 \end{cases}$$

En $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = f(0) = 1 \\ m = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 1 = 0(x - 0) \\ y = 1 \end{array}$$

En $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = f(1) = 0 \\ m = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 0 = 0(x - 1) \\ y = 0 \end{array}$$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4a+2b+c=1 \\ 25a+5b+c=-2 \\ 4a+b=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2-E_1} \left.\begin{array}{l} 21a+3b=-3 \\ 4a+b=2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 21a+3b=-3 \\ \times(-3)\quad -12a-3b=-6 \\ \hline 9a=-9 \end{array}$$

$$a=-1 \Rightarrow b=2-4a=6$$

$$c=1-4a-2b=1+4-12=-7$$

La parábola pedida es $f(x)=-x^2+6x-7$

12) Encuentra el valor de "x" para el que las rectas tangentes a las curvas $f(x)=3x^2-2x+5$ y $g(x)=x^2+6x$ son paralelas. Escribe las ecuaciones de estas tangentes y representa gráficamente el ejercicio.

$$f(x)=3x^2-2x+5 \longrightarrow f'(x)=6x-2$$

$$g(x)=x^2+6x \longrightarrow g'(x)=2x+6$$

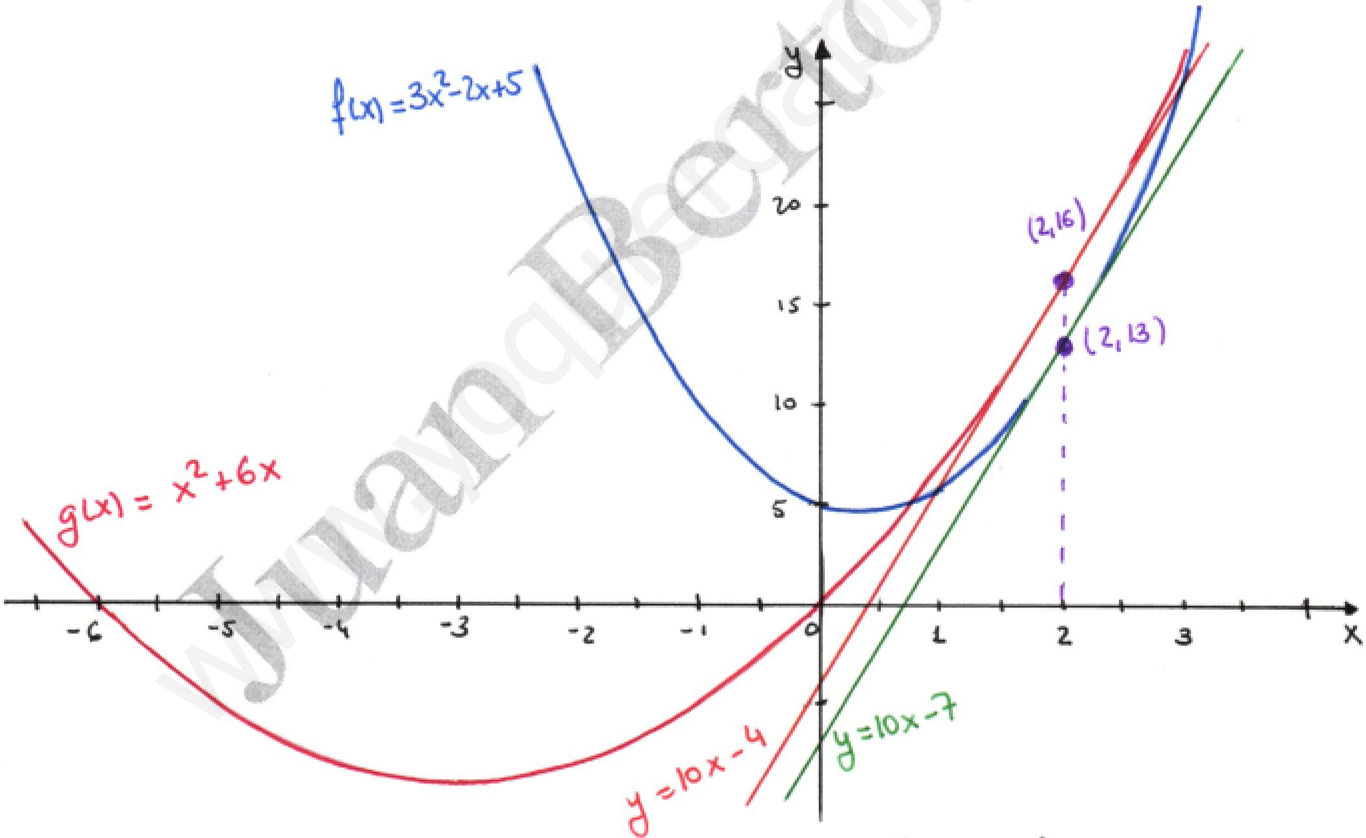
Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.
La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ trazada por el punto de abcisa x_0 es $m_f=f'(x_0)$
La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ trazada por el punto de abcisa x_0 es $m_g=g'(x_0)$

$$m_f = m_g \Rightarrow 6x_0 - 2 = 2x_0 + 6 \Rightarrow 4x_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$$

En $x_0 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = f(2) = 13 \\ m_f = f'(2) = 10 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 13 = 10(x-2) \\ y = 10x - 7 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = g(2) = 16 \\ m_g = g'(2) = 10 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 16 = 10(x-2) \\ y = 10x - 4 \end{array}$$



Para obtener esta representación gráfica, lo único que hemos hecho ha sido dar valores.

13) Encuentra a, b, y c en $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ tiene tangente horizontal en los puntos $x=-4$ y $x=0$ y que pasa por el punto $P(1,1)$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \longrightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

La recta tangente a $f(x)$ trazada por el punto de abcisa $x_0=-4$ es horizontal (pendiente nula!!)

$$m=f'(x_0) \longrightarrow f'(-4)=0 \longrightarrow 64-8a+b=0 \text{ (Ecuación 1)}$$

La recta tangente a $f(x)$ trazada por el punto de abcisa $x_0=0$ es horizontal (pendiente nula!!)

$$m=f'(x_0) \longrightarrow f'(0)=0 \longrightarrow b=0 \text{ (Ecuación 2)}$$

La función pasa por el punto $P(1,1)$

$$f(1)=1 \longrightarrow \cancel{1}+a+b+c=\cancel{1} \text{ (Ecuación 3)}$$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 64-8a+b=0 \\ b=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b=0 \\ 8a=64 \longrightarrow a=8 \\ c=-a-\cancelto{0}{b}=-8 \end{array}$$

14) La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abcisa $x=2$ es $4x-3y+1=0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

La recta tangente a $f(x)$ trazada por el punto de abcisa $x_0 = 2$ tiende pendiente cero:

$$m = f'(x_0) \Rightarrow f'(2) = 0 \longrightarrow 4a + b = 0 \quad (\text{Ecuación } 3)$$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c = 1 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4a + 2b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{array}\right\} E_1 - E_2 \rightarrow b = -2$$

$$a = -\frac{b}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

16) Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, encuentra el valor de a y b para que la recta tangente a $f(x)$ en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b \longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 24x + a$$

La recta $y = 2x - 3$ tiene pendiente $m = 2$, y por tanto:

$$m = f'(x_0) \Rightarrow f'(-2) = 2 \rightarrow 24 - 48 + a = 2 \Rightarrow a = 26$$

Como el punto de tangencia pertenece tanto a la recta tangente como a la función $f(x)$:

$$f(-2) = y(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$$

$$f(-2) = -7 \rightarrow -16 + 48 - 2a + b = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -39 + 2a \underset{a=26}{=} 13$$

17) Encuentra el valor de "K" para que la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5x + K$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

$$f(x) = x^2 - 5x + K \longrightarrow f'(x) = 2x - 5$$

En $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = f(1) = K - 4 \\ m = f'(1) = -3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - (K-4) = -3(x-1) \\ y = -3x + K - 1 \end{array}$$

Si la recta tangente calculada pasa por el $(0,0)$:

$$y(0) = 0 \longrightarrow 0 = K - 1 \Rightarrow K = 1$$

18) Encuentra los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de $45°$ con el eje de abcisas

La pendiente de la recta tangente es igual a la tangente del ángulo que forma dicha recta con el eje de abcisas.

$$m = f'(x_0) = tg\,\alpha$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \\ tg(45°) = 1 \end{array}\right\} \quad 3x_0^2 - 6x_0 + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_0(x_0 - 2) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow x_0 = 0 \\ \searrow x_0 = 2 \end{array}$$

Los puntos pedidos son:

$$\xrightarrow{x_0=0} f(0)=0 \longrightarrow P(0,0)$$

$$\xrightarrow{x_0=2} f(2)=-2 \longrightarrow P'(2,-2)$$

19) Dada la parábola $f(x)=5+6x-3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abcisa $x=0$ y $x=3$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esta cuerda. Representa el ejercicio.

$$f(x)=5+6x-3x^2 \longrightarrow f'(x)=6-6x$$

Veamos cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos de abcisa $x=0$ y $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow f(0)=5 \\ x=3 \longrightarrow f(3)=-4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=mx+n \\ \left.\begin{array}{l} (0,5) \longrightarrow 5=n \\ (3,-4) \longrightarrow -4=3m+n \end{array}\right\} n=5;\ m=-3 \end{array}$$

La ecuación de la cuerda es $y=-3x+5$ que tiene pendiente $m=-3$. La recta tangente que buscamos es paralela a la cuerda, y por tanto tendrá la misma pendiente. Así:

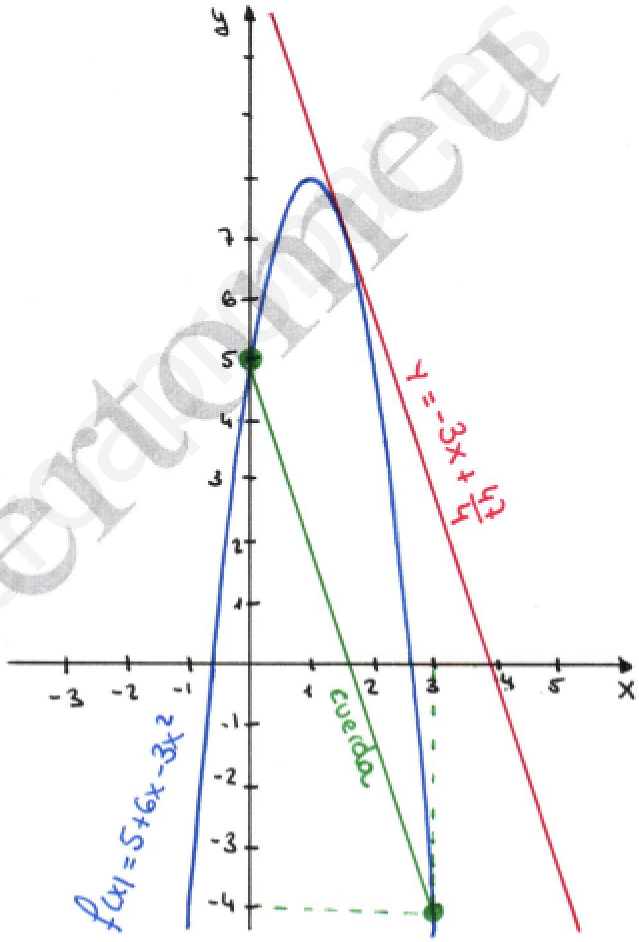
$$m=f'(x_0) \longrightarrow 6-6x_0=-3 \longrightarrow x_0=3/2$$

En $x_0 = 3/2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 3/2 \\ y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{29}{4} \\ m = -3 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - \frac{29}{4} = -3\left(x - 3/2\right) \\ y = -3x + \frac{47}{4} \end{array}$$

x	$f(x) = 5+6x-3x^2$
-1	-4
0	5
1	8
2	5
3	-4

x	$y = -3x + \frac{47}{4}$
0	$\frac{47}{4}$
2	$\frac{23}{4}$



20) Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $(1,5)$ sea la recta $y = 3x + 2$

$$f(x) = ax^2 - b \longrightarrow f'(x) = 2ax$$

23) ¿Para qué valor de K la recta $Kx+y=\ln(2)$ es tangente a $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abcisa $x=0$?

La recta que nos dan es, en forma explícita:

$y=-Kx+\ln(2)$, que tiene pendiente $m=-K$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ trazada por el punto de abcisa $x_0=0$ es $f'(x_0)$. Así:

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{\cancel{x+1}}}\cdot\frac{1(x+1)-(x+2)\cdot 1}{(x+1)^{\cancel{2}}}=\frac{-1}{(x+2)(x+1)}$$

$$m=f'(0)\Rightarrow -K=\frac{-1}{2\cdot 1}\Rightarrow K=1/2$$

24) Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=x^2+2x-1$ que pasan por el punto $(2,3)$

El punto $(2,3)$ no pertenece a la función $f(x)=x^2+2x-1$ ya que $f(2)=2^2+2\cdot 2-1=7\neq 3$. Luego el punto dado (x_0,y_0) NO es el punto de tangencia. Así, $(x_0,y_0)=(2,3)$ será un punto de la recta, y $T(x_T,y_T)$ será el punto de tangencia desconocido que tendremos que determinar.

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \longrightarrow f'(x) = 2x + 2$$

El punto de tangencia $T(x_T, y_T)$ pertenece a la función $f(x)$, y por tanto será de la forma:

$$T(x_T, y_T) = (x_T, f(x_T)) = (x_T, x_T^2 + 2x_T - 1)$$

La ecuación de la recta tangente que estamos buscando:

$$\left.\begin{array}{l} (x_0, y_0) = (2, 3) \\ m = f'(x_T) = 2x_T + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 3 = (2x_T + 2)(x - 2) \end{array}$$

El punto de tangencia, además de pertenecer a la función $f(x)$, pertenece igualmente a la recta tangente y por tanto debe verificar su ecuación. Así:

$$x_T^2 + 2x_T - 1 - 3 = (2x_T + 2)(x_T - 2)$$

$$x_T^2 + \cancel{2x_T} \cancel{-4} = 2x_T^2 - 4x_T + \cancel{2x_T} \cancel{-4}$$

$$x_T^2 - 4x_T = 0 \longrightarrow x_T(x_T - 4) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x_T = 0 \\ \searrow x_T = 4 \end{array}$$

Las rectas tangentes pedidas por tanto:

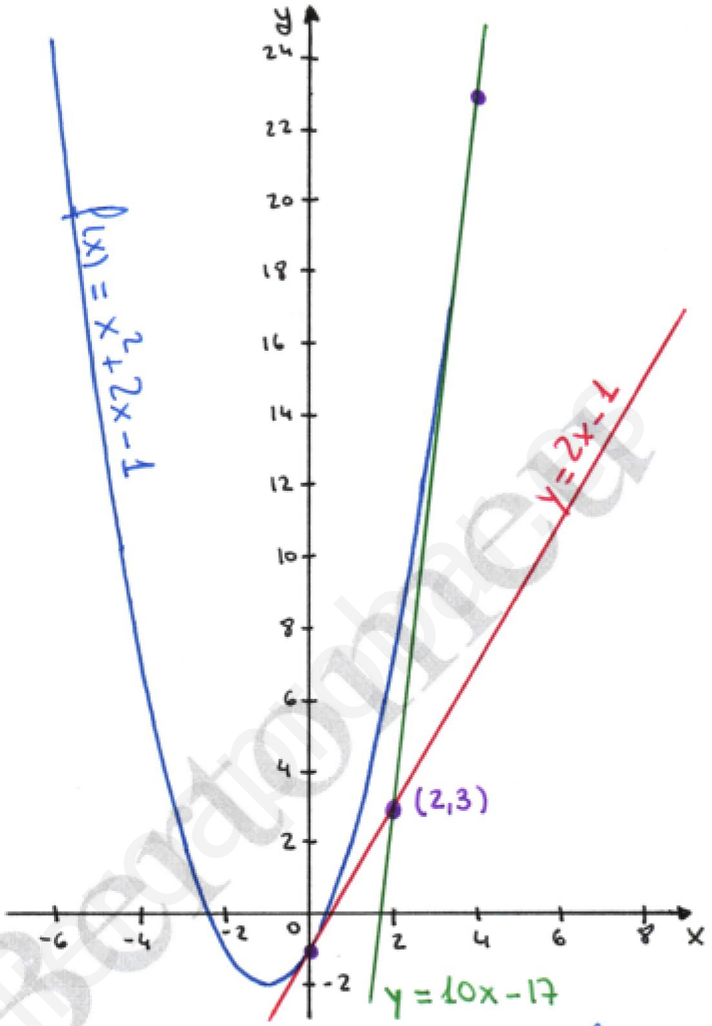
$$\xrightarrow{x_T = 0} y - 3 = 2(x - 2) \longrightarrow y = 2x - 1$$

$$\xrightarrow{x_T = 4} y - 3 = 10(x - 2) \longrightarrow y = 10x - 17$$

x	$f(x) = x^2+2x-1$
-4	7
-2	-1
0	-1
1	2
2	7
4	23

x	$y = 2x-1$
0	-1
2	3

x	$y = 10x-17$
2	3
4	23



25) Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2-ax+6$ en el punto $P(1,2)$ de la función.

Como el punto $P(1,2)$ pertenece a la función:

$$f(1) = 2 \longrightarrow 1-a+6 = 2 \Longrightarrow a = 5$$

Y por tanto: $f(x) = x^2-5x+6 \longrightarrow f'(x) = 2x-5$

En $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = f(1) = 2 \\ m = f'(1) = -3 \end{array}\right\}$$

$$y - y_0 = m(x-x_0)$$

$$y-2 = -3(x-1)$$

$$y = -3x+5$$

34) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ en el punto $x=2$. Halla el área del triángulo que esta recta forma junto con los ejes de coordenadas.

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \longrightarrow f'(x)=\frac{1(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

En $x_0=2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ y_0=f(2)=3 \\ m=f'(2)=-2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y-y_0=m(x-x_0) \\ y-3=-2(x-2) \\ y=-2x+7 \end{array}$$

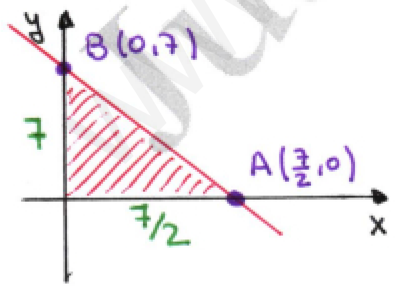
Puntos de corte:

- Con el eje X $\Rightarrow y=0$

$$-2x+7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \Rightarrow A\left(\frac{7}{2},0\right)$$

- Con el eje Y $\Rightarrow x=0$

$$y(0)=-2\cdot 0+7=7 \Longrightarrow B(0,7)$$



$$A=\frac{b\cdot h}{2}$$

$$A=\frac{\frac{7}{2}\cdot 7}{2}=\frac{49}{4}\ u^2$$

35) Determina el área de la región delimitada por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la función $f(x) = 3 + \ln(tg(x))$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$

$$f(x) = 3 + \ln(tg(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{tg(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{sen(x) \cdot \cos(x)}$$

En $x_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{\pi}{4} \\ y_0 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \\ m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 3 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ y = 2x - \frac{\pi}{2} + 3 \end{array}$$

Puntos de corte:

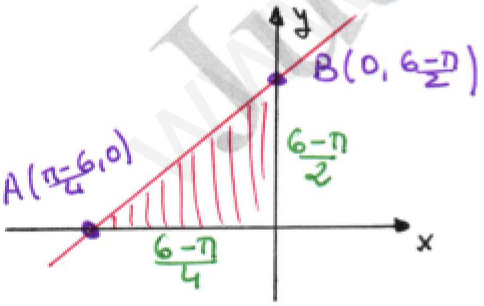
- Con el eje X $\Rightarrow y = 0$

$$2x - \frac{\pi}{2} + 3 = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi - 6}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi - 6}{4} \Rightarrow A\left(\frac{\pi - 6}{4}, 0\right)$$

- Con el eje Y $\Rightarrow x = 0$

$$y(0) = 2 \cdot 0 - \frac{\pi}{2} + 3 = 3 - \frac{\pi}{2} = \frac{6 - \pi}{2} \Rightarrow B\left(0, \frac{6-\pi}{2}\right)$$



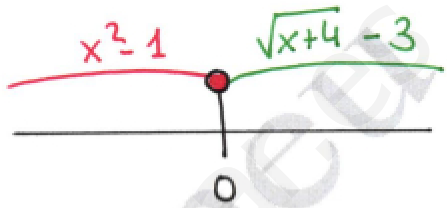
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{\left(\frac{6-\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{6-\pi}{2}\right)}{2}$$

$$A = \frac{(6-\pi)^2}{16} \approx 0'51\, u^2$$

36) Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x+4}-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcula el área del triángulo delimitado por las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $x=-2$ y $x=5$ y el eje de abcisas.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x+4}-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Si $x<0 \longrightarrow f(x) = x^2-1 \longrightarrow f'(x) = 2x$

En $x_0 = -2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ y_0 = f(-2) = 3 \\ m = f'(-2) = -4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x-x_0) \\ y - 3 = -4(x+2) \\ y = -4x-5 \end{array}$$

Si $x>0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{x+4}-3 \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$

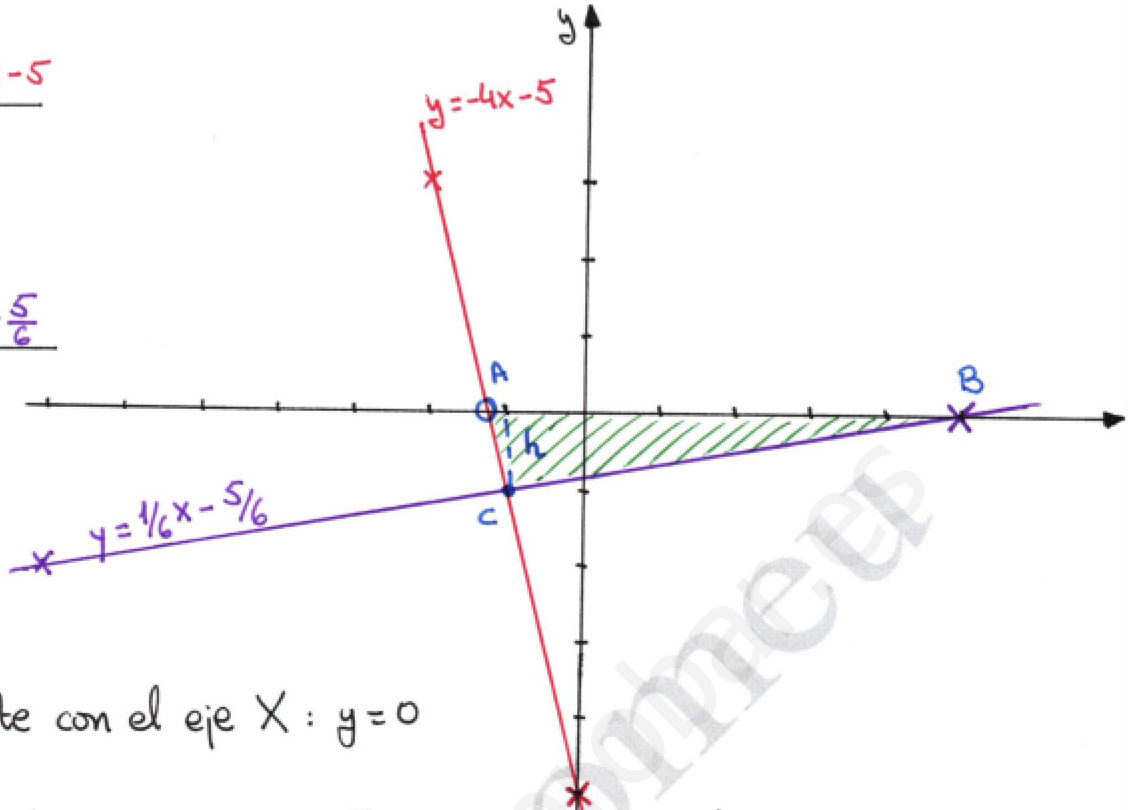
En $x_0 = 5$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ y_0 = f(5) = 0 \\ m = f'(5) = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y - y_0 = m(x-x_0) \\ y - 0 = \frac{1}{6}(x-5) \\ y = \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} \end{array}$$

Ahora voy a realizar una pequeña representación gráfica de estas dos rectas que ayudará a comprender qué área queremos calcular. Así:

x	$y=-4x-5$
0	-5
-2	3

x	$y=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}$
5	0
-7	-2



Puntos de corte con el eje X : $y=0$

$\hookrightarrow 0=-4x-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{4} \Rightarrow A\left(-\frac{5}{4},0\right)$

$\hookrightarrow 0=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6} \Rightarrow x=5 \Rightarrow B(5,0)$

Punto de corte entre las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y=-4x-5 \\ y=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6} \end{array}\right\} -4x-5=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{25}{6}x=-\frac{25}{6} \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow C(-1,-1)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Base}=5+\frac{5}{4}=\frac{25}{4} \\ \text{Altura}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\frac{25}{4}\cdot 1}{2}=\frac{25}{8}\ u^2$$

37) Las funciones $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=c\cdot e^{-(x+1)}$ se cortan en el punto $P(-1,2)$ y tienen, en ese punto, la misma recta tangente. Determina los valores de a, b y c.

40) Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, determina los valores a, b, c, y d para que se cumplan las siguientes condiciones:

i) Que la tangente a la gráfica de f en el punto (0,2) sea paralela a la recta $y+1=0$

ii) Que la recta $x-y-2=0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=1$.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \longrightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

La función f(x) pasa por el punto (0,2)

$f(0)=2 \longrightarrow d=2$ (Ecuación 1)

Por ser paralela a la recta $y+1=0$ que tiene pendiente $m=0$, la recta tangente trazada por el punto de abcisa $x_0=0$ también tiene pendiente $m_{tg}=0$.

$m_{tg}=f'(x_0) \rightarrow f'(0)=0 \rightarrow c=0$ (Ecuación 2)

La recta tangente trazada por el punto de abcisa $x_0=1$ es la recta $y=x-2$, que tiene pendiente $m=1$

$m_{tg}=f'(x_0) \rightarrow f'(1)=1 \rightarrow 3a+2b+c=1$ (Ecuación 3)

La recta tangente pasa por el punto de tangencia que tiene abcisa $x_0=1$. Así:

$y_0=x_0-2=1-2=-1 \Rightarrow T(1,-1)$

Por tanto, la función $f(x)$ pasa por el punto $(1,-1)$:

$$f(1)=-1 \longrightarrow a+b+c+d=-1 \quad \text{(Ecuación 4)}$$

Ahora hay que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c+d=-1 \\ 3a+2b+c=1 \\ c=0 \\ d=2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=-3 \\ 3a+2b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3a-3b=9 \\ 3a+2b=1 \end{array}\right\}$$

$$-b=10 \Rightarrow b=-10$$

$$a-10=-3 \Rightarrow a=7$$

41) La ecuación $x^2+y^2-6x-6y=0$ define a "y" como función implícita de "x". Obtén la ecuación de la recta tangente a la cónica dada trazada por el punto $(0,0)$ de la misma.

$$x^2+y^2-6x-6y=0$$

Derivamos utilizando derivación implícita:

$$2x+2y\cdot y'-6-6y'=0$$

$$2y\cdot y'-6y'=6-2x$$

$$y'(2y-6)=6-2x$$

$$y'(x,y)=\frac{6-2x}{2y-6}$$

El punto de tangencia dado es $(x_0,y_0)=(0,0)$ y así:

$$m_{tg}=y'(0,0)=\frac{6-0}{0-6}=-1$$

Con lo que:

$$\left.\begin{array}{r} y - y_0 = m(x - x_0) \\ (x_0, y_0) = (0,0) \\ m_{tg} = -1 \end{array}\right\} \quad y = -x$$

42) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de las siguientes funciones, obteniendo además los extremos relativos (máximos y mínimos) que presenten:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$

$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$

$$\begin{array}{ccc} f(x) \searrow & & f(x) \nearrow \\ \hline f'(x) < 0 & 4 & f'(x) > 0 \end{array}$$

Creciente: $(4, +\infty)$

Decreciente: $(-\infty, 4)$

Mínimo relativo en $x = 4 \Rightarrow \mathrm{Min}\,(4, f(4)) = (4, -13)$

No hay máximos relativos.

43) Comprueba que las siguientes funciones no tienen extremos y obtén sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) $f(x) = x^3 + 3x$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x$

$f(x)$ ↗

$-\infty$ $\quad f'(x) > 0 \quad$ $+\infty$

Como $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, la función $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$

No presenta extremos relativos.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$x = 0 \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$

$f(x)$ ↘ $\quad$ $f(x)$ ↘

$f'(x) < 0 \quad 0 \quad f'(x) < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

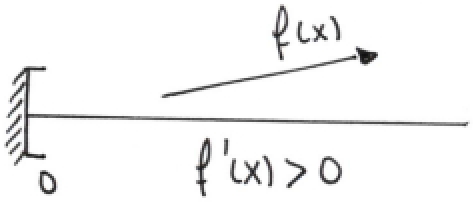
No presenta extremos relativos

c) $f(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0 \Rightarrow Dom(f(x)) = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$

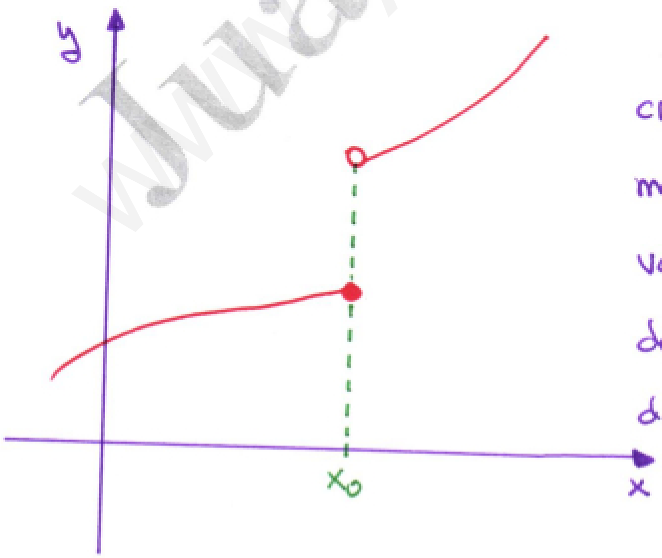


Creciente : $[0, +\infty)$

No presenta extremos relativos

* Ojo!! → Aunque no existe $f'(0)$ eso no quiere decir que en $x=0$ la función no sea creciente. La definición de cuándo una función es creciente, decreciente o alcanza un máximo o mínimo relativo NO tiene nada que ver con la derivada de esa función.

Es cierto que cuando $f'(x_0)>0$ se puede afirmar que $f(x)$ es creciente en x_0. Pero el recíproco no es cierto. Hay funciones que son crecientes en x_0 en las que no se puede cumplir que $f'(x_0)>0$ ya que no son derivables en x_0.



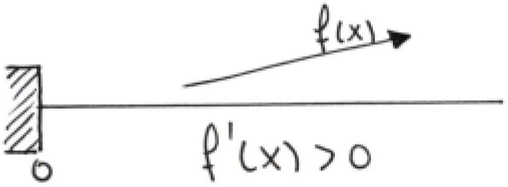
La función representada es creciente en x_0 (antes de x_0 vale menos que en x_0 y después de x_0 vale más que en x_0) a pesar de no ser ni continua ni derivable en x_0.

d) $f(x) = \ln(x)$

$$x > 0 \longrightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

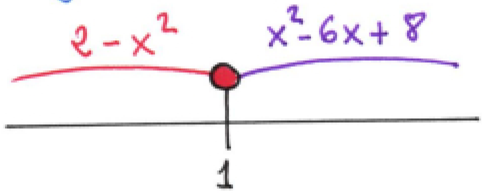
$$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$



Creciente: $(0, +\infty)$

No presenta extremos relativos

44) Estudia la monotonía de la función definida a trozos dada por $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indicando si existen o no extremos relativos. Represéntala gráficamente.



$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x < 1 \longrightarrow f(x) = 2 - x^2$

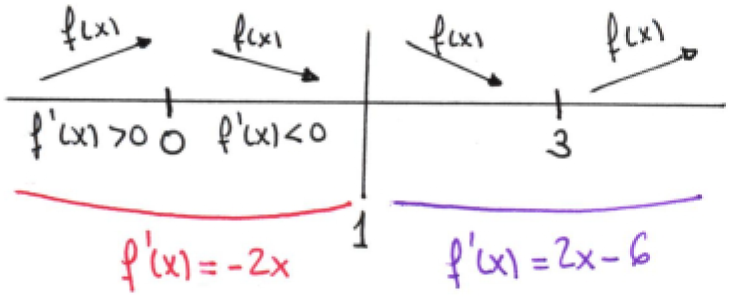
$f'(x) = -2x$

$f'(x) = 0 \longrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (Sirve)

Si $x > 1 \longrightarrow f(x) = x^2 - 6x + 8$

$f'(x) = 2x - 6$

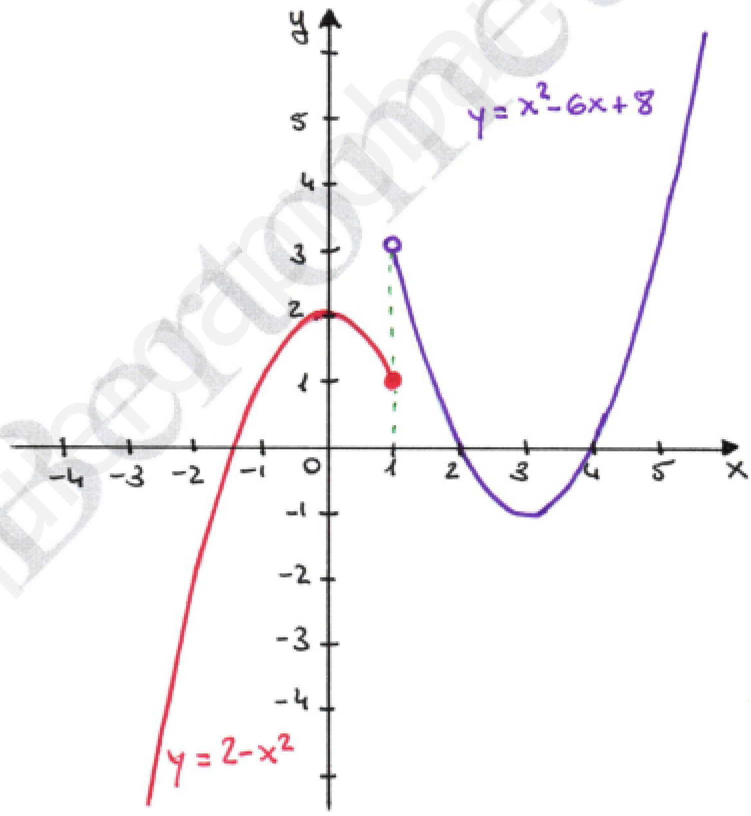
$f'(x) = 0 \longrightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ (Sirve)



Antes de plasmar las conclusiones acerca de la monotonía y extremos como hacemos de forma habitual, haremos la representación gráfica que nos pedían:

x	$y = 2-x^2$
-2	-2
-1	1
0	2
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$ SI

x	$y = x^2-6x+8$
1	3 NO
2	0
3	-1
4	0



Como vemos, se tiene:

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Decreciente: $(0, 1) \cup (1, 3)$

Máximo relativo en $x = 0 \Rightarrow$ Máx $(0, 2)$

Mínimos relativos
$\begin{cases} \text{En } x = 3 \Rightarrow \text{Mín } (3, -1) \\ \text{En } x = 1 \Rightarrow \text{Mín } (1, 1) \end{cases}$

47) Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de las siguientes funciones, obteniendo además los extremos relativos (máximos y mínimos) que presenten.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$x^2+1=0 \Rightarrow \nexists x \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

$f(x)$ ↘		$f(x)$ ↗		$f(x)$ ↘
$f'(x)<0$	-1	$f'(x)>0$	$+1$	$f'(x)<0$

Creciente: $(-1, +1)$

Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Mínimo relativo en $x=-1 \Rightarrow \text{Min}(-1, f(-1)) \Rightarrow \text{Min}(-1, -1/2)$

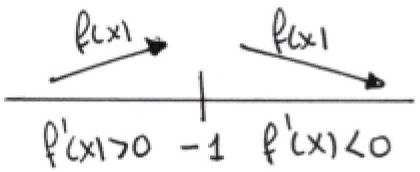
Máximo relativo en $x = 1 \Rightarrow \text{Máx}(1, f(1)) \Rightarrow \text{Máx}(1, 1/2)$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x-2 = 0 \Rightarrow x = -1$$



Creciente: $(-\infty, -1)$

Decreciente: $(-1, +\infty)$

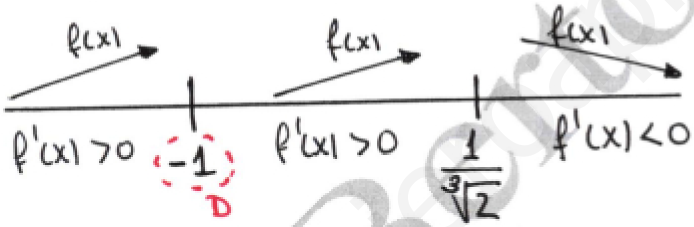
Máximo relativo en $x=-1 \Rightarrow$ Máx $(-1, 6)$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$

$x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1 \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^3+1)-x\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}=0 \Rightarrow -2x^3+1=0 \Rightarrow x^3=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$



Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1/\sqrt[3]{2})$

Decreciente: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$

Máximo relativo en $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow$ Máx $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0'53\right)$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

$x^3=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}-\{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x^{\cancel{3}} - (x^2-1)\cdot \cancel{3x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}} = \frac{2x^2-3x^2+3}{x^4} = \frac{-x^2+3}{x^4}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+3}{x^4}=0 \Rightarrow -x^2+3=0 \Rightarrow x^2=3 \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ x=+\sqrt{3} \end{cases}$$

$f(x)$ ↘		$f(x)$ ↗		$f(x)$ ↗		$f(x)$ ↘
$f'(x)<0$	$-\sqrt{3}$	$f'(x)>0$	0 D	$f'(x)>0$	$\sqrt{3}$	$f'(x)<0$

Creciente: $(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$

Decreciente: $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

Mínimo relativo en $x=-\sqrt{3} \Rightarrow \text{Min}(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -0'38)$

Máximo relativo en $x=\sqrt{3} \Rightarrow \text{Máx}(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, 0'38)$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^6+2}$

$$x^6+2=0 \Rightarrow \nexists x \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^6+2) - x^2\cdot 6x^5}{(x^6+2)^2} = \frac{2x^7+4x-6x^7}{(x^6+2)^2} = \frac{4x-4x^7}{(x^6+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-4x^7}{(x^6+2)^2}=0 \Rightarrow 4x-4x^7=0 \Rightarrow 4x(1-x^6)=0$$

$4x=0 \rightarrow x=0$

$1-x^6=0 \rightarrow x=-1$, $x=+1$

$f(x)$ ↗		$f(x)$ ↘		$f(x)$ ↗		$f(x)$ ↘
$f'(x)>0$	-1	$f'(x)<0$	0	$f'(x)>0$	1	$f'(x)<0$

Creciente: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

Decreciente: $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

Máximos relativos
- En $x=-1 \Rightarrow \text{Máx}(-1, f(-1)) = (-1, 1/3)$
- En $x=1 \Rightarrow \text{Máx}(1, f(1)) = (1, 1/3)$

Mínimo relativo en $x=0 \Rightarrow \text{Min}(0, f(0)) = (0,0)$

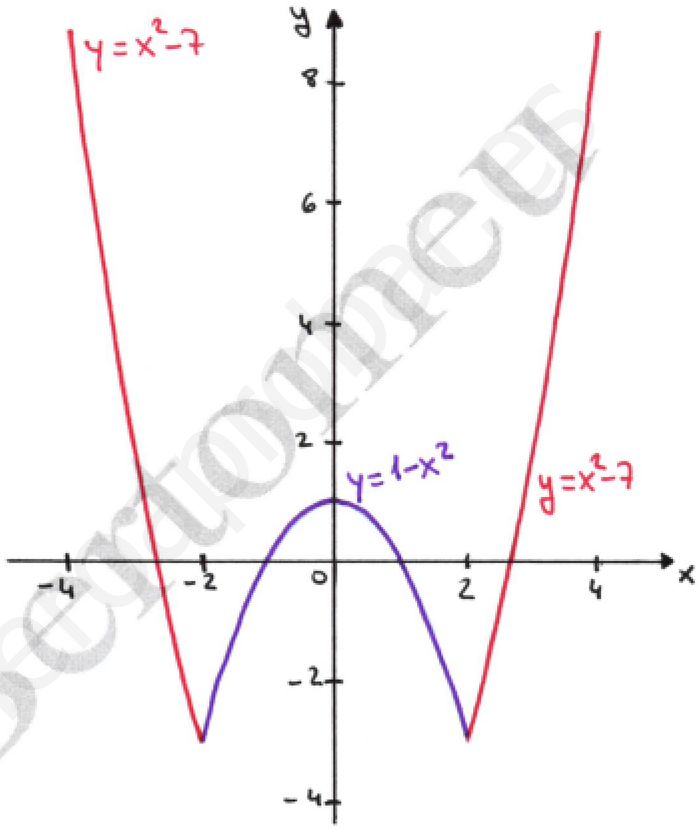
$f(x) \searrow$	$f(x) \nearrow$	$f(x) \searrow$	$f(x) \nearrow$
$f'(x)<0$	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
$f'(x)=2x$	$f'(x)=-2x$		$f'(x)=2x$

$-2 \qquad 0 \qquad 2$

x	$y=x^2-7$	
-4	9	
-3	2	
$\boxed{-2}$	$\boxed{-3}$	SI

x	$y=1-x^2$	
-2	-3	NO
-1	0	
0	1	
1	0	
2	-3	NO

x	$y=x^2-7$	
$\boxed{2}$	$\boxed{-3}$	SI
3	2	
4	9	



y Por tanto:

Creciente: $(-2,0) \cup (2,+\infty)$

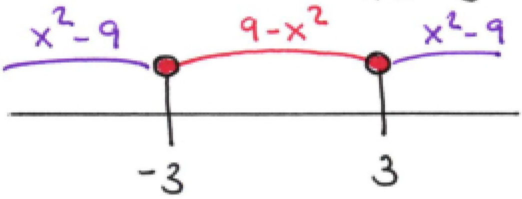
Decreciente: $(-\infty,-2) \cup (0,2)$

Mínimos relativos $\begin{cases} \text{en } x=-2 \rightarrow \text{Min } (-2,-3) \\ \text{en } x=2 \rightarrow \text{Min } (2,-3) \end{cases}$

Máximo relativo en $x=0 \Rightarrow$ Máx $(0,1)$

c) $f(x) = |9-x^2|$

$$9-x^2=0 \begin{cases} x=-3 \\ x=+3 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{si } x<-3 \\ 9-x^2 & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ x^2-9 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Si $x<-3$ $\longrightarrow$ $f(x) = x^2-9$

$f'(x) = 2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$ (No sirve)

Si $-3<x<3$ $\longrightarrow$ $f(x) = 9-x^2$

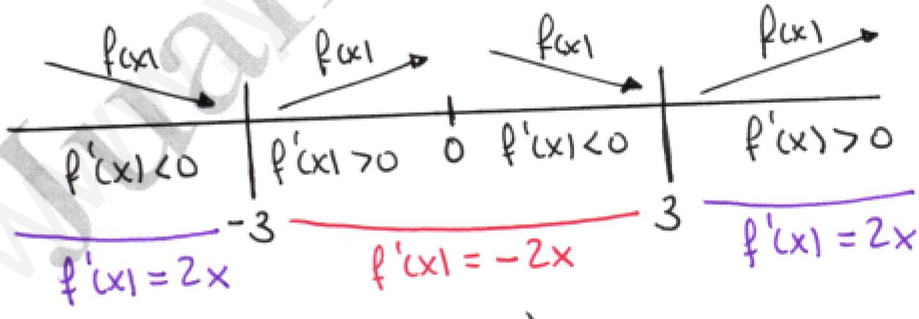
$f'(x) = -2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$ (Sirve)

Si $x>3$ $\longrightarrow$ $f(x) = x^2-9$

$f'(x) = 2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$ (No sirve)



Creciente: $(-3,0) \cup (3,+\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-3) \cup (0,3)$

Mínimos relativos $\begin{cases} \text{en } x=-3 \Rightarrow \text{Min } (-3,0) \\ \text{en } x=3 \Rightarrow \text{Min } (3,0) \end{cases}$

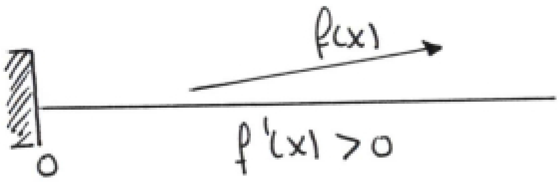
Máximo relativo en $x=0 \Rightarrow$ Máx $(0,9)$

d) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

$$x > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$



Creciente : $(0, +\infty)$

No presenta extremos relativos

e) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(-\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = \text{arcsen}(0) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = 0 + k \cdot 2\pi \\ x + \frac{\pi}{2} = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Como $k \in \mathbb{Z}$, vamos a dar valores :

$$x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -\frac{5\pi}{2} \\ k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \\ k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$f''(-1) = 0 \rightarrow$ Posible punto de inflexión

$f'''(x) = -24x$

$f'''(-1) = 24 \neq 0 \rightarrow$ Punto de inflexión en $x = -1$

$$P.I\ (-1, f(-1)) = (-1, -3)$$

c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$$x^2+1 = 0 \Rightarrow \nexists x \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\cdot(x^2+1) - (x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot[x^2+1-x(x-1)]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2(x-1)(\cancel{x^2}+1\cancel{-x^2}+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2(x^2-1)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x=-1,\ x=+1$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot 2x(x^2+1)^{\cancel{2}} - 2(x^2-1)\cdot 2\cdot\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{4x(x^2+1) - 8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3+12x}{(x^2+1)^3}$$

$f''(-1) = -1 < 0 \rightarrow$ Máximo relativo en $x = -1$

$$Máx\ (-1, f(-1)) = (-1, 2)$$

$f''(1) = 1 > 0 \rightarrow$ Mínimo relativo en $x = +1$

$$Min\ (1, f(1)) = (1, 0)$$

d) $f(x) = \ln(x^2+1)$

$$x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ Mínimo relativo en $x = 0$

$$\text{Min}\,(0, f(0)) = (0,0)$$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$

$$x = 0 \rightarrow \text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2-4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2\cancel{x} \cdot x^2 - (x^2-4) \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8}{x^3}$$

$f''(-2) = -1 < 0 \rightarrow$ Máximo relativo en $x = -2$

$$\text{Máx}\,(-2, f(-2)) = (-2, -4)$$

$f''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ Mínimo relativo en $x = 2$

$$\text{Min}\,(2, f(2)) = (2, 4)$$

f) $f(x) = (x^2+4)\cdot e^x$

$\mathrm{Dom}(f(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x\cdot e^x + (x^2+4)\cdot e^x = e^x(x^2+2x+4)$$

$$f'(x)=0 \rightarrow e^x\cdot(x^2+2x+4)=0 \begin{cases} e^x \neq 0 \ \forall x \\ x^2+2x+4=0 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

Como $f'(x) \neq 0 \ \forall x$, $f(x)$ no presenta extremos relativos.

g) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

$x \neq 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f(x)) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}-2}{2x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^3}-2}{2x^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{\sqrt{x^3}-2}{2x^2}=0 \Rightarrow \sqrt{x^3}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x^3}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3=4 \Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^3}}\cdot 3x^2\cdot\cancel{2}x^{\cancel{2}} - (\sqrt{x^3}-2)\cdot 4\cancel{x}}{4x^{\cancel{4}3}} = \frac{\frac{1}{\cancel{x}\sqrt{x}}\cdot 3x^2\cdot\cancel{x} - 4\sqrt{x^3}+8}{4x^3} =$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x^3}+8}{4x^3} = \frac{\frac{3x^2-4x^2+8\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x^3} = \frac{-x^2+8\sqrt{x}}{4\sqrt{x^7}}$$

$f''(\sqrt[3]{4}) = 0'375 > 0 \longrightarrow$ Mínimo relativo en $x=\sqrt[3]{4}$

$$\mathrm{Min}\left(\sqrt[3]{4}, f(\sqrt[3]{4})\right) = \left(\sqrt[3]{4}, 1'89\right)$$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

$x^2+1=0 \Rightarrow \nexists x \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+1}} \neq 0 \ \forall x \\ \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} + e^{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x^2+1}}}{(x^2+1)^4} \cdot \left[4x^2 - 2(x^4+2x^2+1) + 8x^2(x^2+1)\right] =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x^2+1}}}{(x^2+1)^4} \cdot (6x^4+8x^2-2)$$

$f''(0) = -2e < 0 \rightarrow$ Máximo relativo en $x=0$

Máx $(0, f(0)) = (0, e)$

i) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

$$x^2-1=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases} \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$; $x \in [-2,4]$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0$ → $x = 0$ (Sirve) ; → $x = 2$ (Sirve)

$f(-2) = -20$
$f(0) = 0$
$f(2) = -4$
$f(4) = 16$

En el intervalo $[-2,4]$, el máximo absoluto de $f(x)$ se alcanza en $x = 4$ y vale 16 y el mínimo absoluto se alcanza en $x = -2$ y vale -20.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; $x \in [0,2]$

$x^2+1 \neq 0 \;\forall x \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -x^2+1 = 0$ → $x = -1$ (No sirve!!) ; → $x = +1$ (Sirve)

$f(0) = 0$
$f(1) = 1/2$
$f(2) = 2/5$

En el intervalo $[0,2]$, el máximo absoluto de $f(x)$ se alcanza en $x = 1$ y vale $1/2$ y el mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$ y vale 0

e) $f(x) = sen(x)\ ,\ x \in [0, 2\pi]$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \cos(x)$

$f'(x) = 0 \longrightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \arccos(0) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$

En el intervalo $[0, 2\pi]$ $\rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $\rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \\ f(2\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$ el máximo absoluto de la función $f(x)$ se alcanza en $x = \frac{\pi}{2}$ y vale 1 y el mínimo absoluto se alcanza en $x = \frac{3\pi}{2}$ y vale -1.

f) $f(x) = \cos(x)\ ,\ x \in [0, 2\pi]$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -sen(x)$

$f'(x) = 0 \rightarrow -sen(x) = 0 \Rightarrow x = arcsen(0) \Rightarrow x = 0 + K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$

En el intervalo $[0, 2\pi]$ $\rightarrow x = 0$, $\rightarrow x = \pi$, $\rightarrow x = 2\pi$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(\pi) = -1 \\ f(2\pi) = 1 \end{array}\right\}$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$ el máximo absoluto de la función $f(x)$ vale 1 y se alcanza tanto en $x = 0$ como en $x = 2\pi$. El mínimo absoluto vale -1 y se alcanza en $x = \pi$

51) Estudia la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad) de las siguientes funciones, obteniendo además los puntos de inflexión que presenten.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$

$f''(x) = 0 \longrightarrow 12x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$f(x)$ | $f(x)$

$f''(x) < 0$ $\quad 1/2 \quad$ $f''(x) > 0$

Cóncava: $(1/2, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 1/2)$

P. Inflexión: $(1/2, f(1/2)) = \left(\frac{1}{2}, -6'5\right)$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-2 \cdot 2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{-4}{(x+1)^3}$

$f''(x) = 0 \longrightarrow \dfrac{-4}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow -4 \neq 0$

$f(x)$ | $f(x)$

$f''(x) > 0$ $\quad -1 \quad$ $f''(x) < 0$

Cóncava: $(-\infty, -1)$

Convexa: $(-1, +\infty)$

No tiene puntos inflexión

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

$x = 0 \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x\cdot x^{\cancel{2}} - (x^2-1)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \longrightarrow \frac{2}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

$f(x)$ ∩		$f(x)$ ∪
$f''(x) < 0$	0_D	$f''(x) > 0$

Cóncava: $(0, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 0)$

No tiene puntos de inflexión

d) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$

$Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$$f''(x) = 0 \longrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$f(x)$ ∩		$f(x)$ ∪
$f''(x) < 0$	3	$f''(x) > 0$

Cóncava: $(3, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, 3)$

Punto de Inflexión en $x = 3 \Rightarrow P.I\,(3, f(3)) = (3, 27)$

$$f''(x)=0 \rightarrow \frac{2x^3-6x^2-42x-98}{(x^2+7x)^3}=0 \Rightarrow 2x^3-6x^2-42x-98=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -6 & -42 & -98 \\ 7 & & 14 & 56 & 98 \\ \hline & 2 & 8 & 14 & \boxed{0} \end{array}$$

$2x^2+8x+14$

$$2x^2+8x+14=0$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-112}}{4} \Rightarrow \nexists x$$

$f''(x)<0$	-7	$f''(x)>0$	0	$f''(x)<0$	7	$f''(x)>0$
$f(x)$ ∩	D	$f(x)$ ∪	D	$f(x)$ ∩		$f(x)$ ∪

Cóncava: $(-7,0)\cup(7,+\infty)$

Convexa: $(-\infty,-7)\cup(0,7)$

P. Inflexión en $x=7 \Rightarrow$ P.I $(7, 3/49)$

e) $f(x)=\dfrac{-x^3+2}{x^2}$

$$x^2=0 \rightarrow x=0 \Rightarrow Dom(f(x))=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$f'(x)=\frac{-3x^2\cdot \cancel{x^2}-(-x^3+2)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-3x^3+2x^3-4}{x^3}=\frac{-x^3-4}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{-3\cancel{x^2}\cdot x^3-(-x^3-4)\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}}=\frac{\cancel{-3x^3}+\cancel{3x^3}+12}{x^4}=\frac{12}{x^4}$$

$$f''(x)=0 \rightarrow \frac{12}{x^4}=0 \Rightarrow 12\neq 0$$

$f''(x)>0$	0	$f''(x)>0$
$f(x)$ ∪	D	$f(x)$ ∪

Cóncava: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

No tiene puntos de inflexión

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

$$x^2-1=0 \longrightarrow x^2=1 \begin{cases} \nearrow x=-1 \\ \searrow x=+1 \end{cases} \qquad Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1,+1\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3}-2x-\cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-1)^{\cancel{2}}+2x\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x)=0 \longrightarrow \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}=0 \Rightarrow 6x^2+2=0 \Rightarrow \nexists x$$

$f(x)$ ∪		$f(x)$ ∩		$f(x)$ ∪
$f''(x)>0$	-1 D	$f''(x)<0$	1 D	$f''(x)>0$

Cóncava: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Convexa: $(-1,1)$

No tiene puntos de inflexión

g) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

$$x^2-4 \geq 0 \longrightarrow x^2-4=0 \begin{cases} \nearrow x=-2 \\ \searrow x=+2 \end{cases}$$

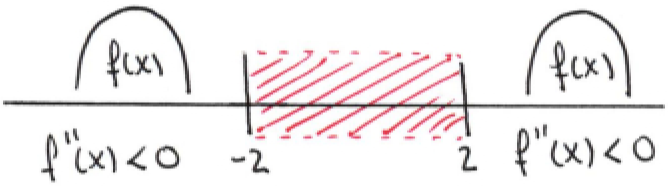
SI	SI -2	NO	SI 2	SI

$$Dom(f(x)) = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2-4} - x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{(\cancel{\sqrt{x^2-4}})^{\cancel{2}}} = \frac{\dfrac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$$

$$f''(x)=0 \longrightarrow \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4)^3}}=0 \Rightarrow -4 \neq 0$$



Convexa: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

No tiene puntos de inflexión

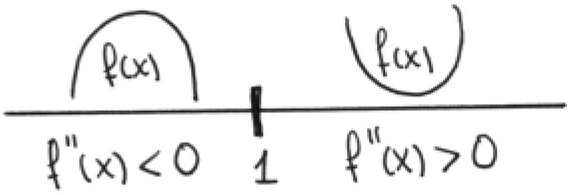
h) $f(x)=(x-3)\cdot e^x$

$Dom(f(x))=\mathbb{R}$

$f'(x)=1\cdot e^x+(x-3)\cdot e^x=e^x(x-2)$

$f''(x)=e^x(x-2)+e^x\cdot 1=e^x(x-1)$

$f''(x)=0 \longrightarrow e^x(x-1)=0$ → $e^x\neq 0$; → $x-1=0 \Rightarrow x=1$



Cóncava: $(1,+\infty)$

Convexa: $(-\infty,1)$

P. Inflexión: $(1,f(1))=(1,-2e)$

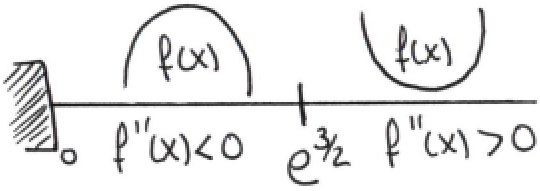
i) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}$

$x>0 \Rightarrow Dom(f(x))=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot 2\cancel{x}-\ln(x)\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{\cancel{2}(1-\ln(x))}{\cancel{4}_2 x^2}=\frac{1-\ln(x)}{2x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{\cancel{x}}\cdot 2x^{\cancel{2}}-(1-\ln(x))\cdot 4\cancel{x}}{4x^{\cancel{4}3}}=\frac{-2-4+4\ln(x)}{4x^3}=\frac{4\ln(x)-6}{4x^3}$$

$$f''(x)=0\longrightarrow \frac{4\ln(x)-6}{4x^3}=0\Rightarrow 4\ln(x)-6=0\Rightarrow \ln(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{3/2}$$



Cóncava: $(e^{3/2},+\infty)$

Convexa: $(0,e^{3/2})$

P. Inflexión: $\left(e^{3/2},f(e^{3/2})\right)=\left(e^{3/2},\dfrac{3}{4e^{3/2}}\right)$

56) Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pasa por el origen de coordenadas, por el punto $\left(1, \frac{5}{6}\right)$, tiene un máximo relativo en el punto de abcisa 1 y un mínimo relativo en el punto de abcisa 2.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

La función pasa por el origen (0,0):

$f(0) = 0 \longrightarrow d = 0$ (Ecuación 1)

La función pasa por el punto $\left(1, \frac{5}{6}\right)$:

$f(1) = \frac{5}{6} \rightarrow a + b + c + d = \frac{5}{6}$ (Ecuación 2)

La función tiene un máximo en $x = 1$:

$f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (Ecuación 3)

La función tiene un mínimo en $x = 2$:

$f'(2) = 0 \longrightarrow 12a + 4b + c = 0$ (Ecuación 4)

Ahora tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} d = 0 \\ a + b + c + d = \frac{5}{6} \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a + b + c = \frac{5}{6} \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_2 - E_1 \rightarrow 2a + b = -5/6 \\ E_3 - E_2 \rightarrow 9a + 2b = 0 \end{array}\Bigg\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} -2E_1 \rightarrow & -4a-2b=\frac{5}{3} \\ E_2 \rightarrow & 9a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1+E_2 \quad 5a=\frac{5}{3} \Rightarrow a=1/3$$

$$\rightarrow b=-\frac{9a}{2}=-\frac{9\cdot 1/3}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow c=-3a-2b=-3\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=2$$

La función por tanto era $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$

57) Determina a y b sabiendo que $f(x)=\frac{ax^2+x+b}{x^2+1}$ pasa por el punto $P(-2,\frac{13}{5})$ y alcanza un extremo relativo en el punto de abcisa $x=-1$. Estudia monotonía y extremos.

$$f(x)=\frac{ax^2+x+b}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2ax+1)(x^2+1)-(ax^2+x+b)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2ax^3}+2ax+x^2+1-\cancel{2ax^3}-2x^2-2bx}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2(a-b)x+1}{(x^2+1)^2}$$

La función pasa por el punto $P\left(-2,\frac{13}{5}\right)$:

$$f(-2)=\frac{13}{5} \rightarrow \frac{4a+b-2}{\cancel{5}}=\frac{13}{\cancel{5}} \rightarrow 4a+b=15 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

La función tiene un extremo en $x=-1$

$$f'(-1)=0 \rightarrow \frac{\cancel{-1}-2(a-b)\cancel{+1}}{4}=0 \rightarrow -2(a-b)=0 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4a+b=15 \\ a-b=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1+E_2} 5a=15 \Rightarrow a=3$$

$$\longrightarrow b=a \Rightarrow b=3$$

Por tanto:

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1} \longrightarrow f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow \nexists x \Rightarrow \mathrm{Dom}(f(x))=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=-1 \\ x=+1 \end{cases}$$

$f(x)$ ↘		$f(x)$ ↗		$f(x)$ ↘
$f'(x)<0$	-1	$f'(x)>0$	1	$f'(x)<0$

Creciente: $(-1,1)$

Decreciente: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Mínimo relativo en $x=-1 \Rightarrow \mathrm{Min}(-1, f(-1)) = (-1, 5/2)$

Máximo relativo en $x=1 \Rightarrow \mathrm{Máx}(1, f(1)) = (1, 7/2)$

58) Calcula $a \neq 0$ sabiendo que $f(x)=\dfrac{a^2x}{2x^2-5ax+2a^2}$ tiene un extremo relativo en $x=2$. Para el valor calculado, obtén el dominio de la función $f(x)$.

$$f(x) = \frac{a^2 \cdot x}{2x^2 - 5ax + 2a^2}$$

$$f'(x) = \frac{a^2(2x^2-5ax+2a^2) - a^2x(4x-5a)}{(2x^2-5ax+2a^2)^2} =$$

$$= \frac{2a^2x^2 - \cancel{5a^3x} + 2a^4 - 4a^2x^2 + \cancel{5a^3x}}{(2x^2-5ax+2a^2)^2} = \frac{-2a^2x^2+2a^4}{(2x^2-5ax+2a^2)^2}$$

La función tiene un extremo relativo en $x = 2$:

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{-8a^2+2a^4}{(2\cdot 2^2 - 10a + 2a^2)^2} = 0 \Rightarrow -8a^2+2a^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2\cdot(-4+a^2) = 0 \begin{cases} 2a^2 = 0 \rightarrow a = 0 \\ -4+a^2 = 0 \begin{cases} a = -2 \\ a = +2 \end{cases} \end{cases}$$

No sirve pues debe ser $a \neq 0$

Si $a = -2$

$$f(x) = \frac{4x}{2x^2+10x+8}$$

$$2x^2+10x+8 = 0 \rightarrow x^2+5x+4 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{-4, -1\}$$

Si $a = 2$

$$f(x) = \frac{4x}{2x^2-10x+8}$$

$$2x^2-10x+8 = 0 \rightarrow x^2-5x+4 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

Ahora resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a=-9 \\ a+b+c=-1 \\ 2a+b=-3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow c=-1-a-b=-7 \\ \xrightarrow[a=-9]{} -18+b=-3 \Rightarrow b=15 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3-9x^2+15x-7$$

64) La función $f(x)=x^3-ax^2-4x+b$ corta al eje OX en $x=3$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abcisa $\frac{2}{3}$. Determina a y b.

$$f(x)=x^3-ax^2-4x+b \longrightarrow f'(x)=3x^2-2ax-4 \longrightarrow f''(x)=6x-2a$$

La función corta al eje X en $x=3 \longrightarrow PC(3,0)$

$$f(3)=0 \longrightarrow 27-9a-12+b=0 \longrightarrow -9a+b=-15 \text{ (Ec. 1)}$$

La función presenta un punto de inflexión en $x=\frac{2}{3}$:

$$f''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \longrightarrow 6\cdot\frac{2}{3}-2a=0 \longrightarrow a=2 \text{ (Ecuación 2)}$$

Y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -9a+b=-15 \\ a=2 \end{array}\right\} \longrightarrow -18+b=-15 \Rightarrow b=3$$

65) Calcula los valores de "a", con $a\neq 0$, para que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)=ax^4+2ax^3-ax+1512$ trazadas por sus puntos de inflexión, sean perpendiculares entre si.

$f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512 \longrightarrow f'(x) = 4ax^3 + 6ax^2 - a \longrightarrow$

$\longrightarrow f''(x) = 12ax^2 + 12ax$

Los puntos de inflexión:

$f''(x) = 0 \longrightarrow 12ax^2 + 12ax = 0$

$12x(ax+a) = 0$ → $12x = 0 \longrightarrow x = 0$; $ax + a = 0 \longrightarrow x = -1$ ($a \neq 0$)

La pendiente de la recta tangente trazada por el punto x_0 es $m = f'(x_0)$. Así:

En $x = 0 \longrightarrow m_1 = f'(0) = -a$

En $x = -1 \longrightarrow m_2 = f'(-1) = -4a + 6a - a = a$

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si se verifica $m_1 \cdot m_2 = -1$. Así:

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow -a \cdot a = -1 \Rightarrow a^2 = 1$ → $a = -1$; $a = 1$

66) Dada la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcula "a" sabiendo que f(x) tiene un extremo relativo en el punto de abcisa x = 3. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

$$f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2} \longrightarrow f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

La función tiene un extremo en $x = 3$

$$f'(3) = 0 \longrightarrow -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{-12}{27} \Rightarrow a = -4$$

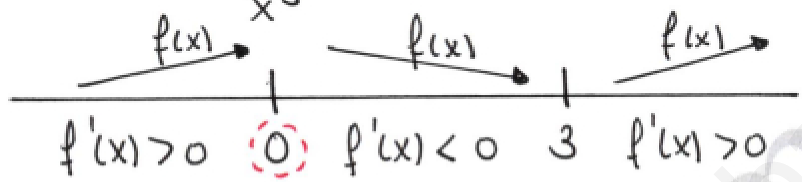
Por tanto:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}$$

$$Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = 0 + \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3} = \frac{4x-12}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{4x-12}{x^3} = 0 \Rightarrow 4x-12=0 \Rightarrow x=3$$



Del estudio de la monotonía de la función se deduce que el extremo de $x=3$ era un mínimo relativo

67) Halla una función $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x=2$ y un punto de inflexión en $P(1,2)$

$$f(x) = x^3+ax^2+bx+c \rightarrow f'(x) = 3x^2+2ax+b \rightarrow f''(x) = 6x+2a$$

La función pasa por el punto $P(1,2)$

$f(1) = 2 \rightarrow 1+a+b+c = 2$ (Ecuación 1)

La función tiene extremo relativo en $x=2$

$f'(2) = 0 \rightarrow 12+4a+b = 0$ (Ecuación 2)

La función tiene un punto de inflexión en $x=1$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6+2a = 0 \Rightarrow a = -3$ (Ecuación 3)

Por tanto, si $a=-2$ y $b=1$ la función es derivable en $x=0$ y por tanto en $\mathbb{R}$.

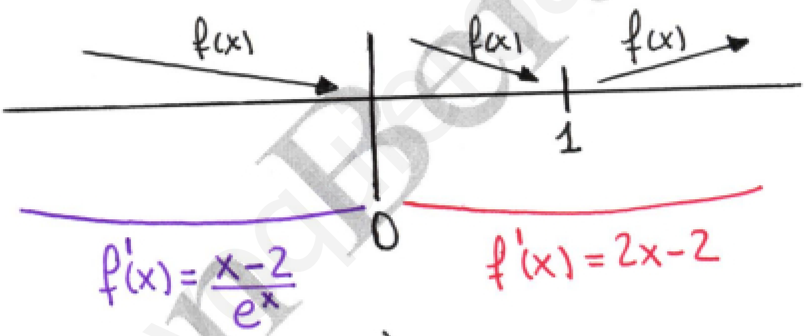
b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x<0 \\ x^2-2x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x<0 \\ 2x-2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

Si $x<0$ $\longrightarrow f'(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$

$f'(x)=0 \longrightarrow \dfrac{x-2}{e^x}=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ (No sirve!!)

Si $x\geq 0$ $\longrightarrow f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0 \longrightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$ (Sirve)



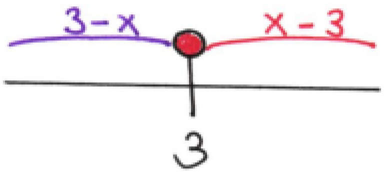
Decreciente: $(-\infty, 1)$

Creciente: $(1, +\infty)$

Mínimo relativo en $x=1 \Rightarrow \text{Min}(1, f(1)) = (1, 0)$

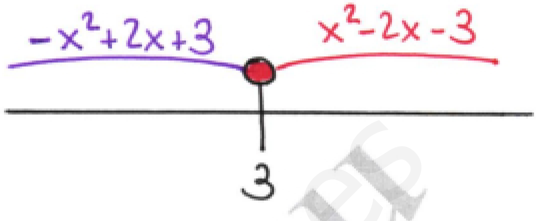
72) Dada la función $f(x)=|x-3|\cdot(x+1)$, halla los puntos donde las rectas tangentes son paralelas a la recta $y=6x-2$

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$



$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} (3-x)(x+1) & \text{si } x < 3 \\ (x-3)(x+1) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



La recta $y = 6x - 2$ tiene pendiente $m = 6$. Si las rectas tangentes son paralelas a la recta dada, tendrán la misma pendiente. Así:

$$m_{tg} = f'(x_0) \longrightarrow 6 = f'(x_0)$$

Buscamos aquellos puntos donde la derivada vale 6. Así:

Si $x < 3 \longrightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = -2x + 2$

$f'(x) = 6 \longrightarrow -2x + 2 = 6 \longrightarrow x = -2$ (Sirve)

En el punto $(-2, f(-2)) = (-2, -5)$ la recta tangente es paralela a la dada.

Si $x > 3 \longrightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 6 \longrightarrow 2x - 2 = 6 \longrightarrow x = 4$ (Sirve)

En el punto $(4, f(4)) = (4, 5)$ la recta tangente es paralela a la dada.

73) Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ se pide:

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ paralela a la cuerda que une los puntos $(-1,3)$ y $(2,0)$. Representa gráficamente el ejercicio

La recta $y = mx + n$ que pasa por $A(-1,3)$ y $B(2,0)$

$$\left.\begin{array}{l} A(-1,3) \longrightarrow 3 = -m + n \\ B(2,0) \longrightarrow 0 = 2m + n \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2 - E_1} -3 = 3m \Rightarrow m = -1$$

$$\hookrightarrow n = -2m = 2$$

Por tanto, como la recta tangente debe ser paralela a la recta $y = -x + 2$ que tiene pendiente $m = -1$, la recta tangente también tendrá pendiente $m_{tg} = -1$. La pendiente de la recta tangente es el valor que toma la derivada evaluada en el punto de tangencia x_0:

$$f(x) = 4 - x^2 \longrightarrow f'(x) = -2x$$

$$m_{tg} = f'(x_0) \longrightarrow -1 = -2x_0 \Rightarrow x_0 = 1/2$$

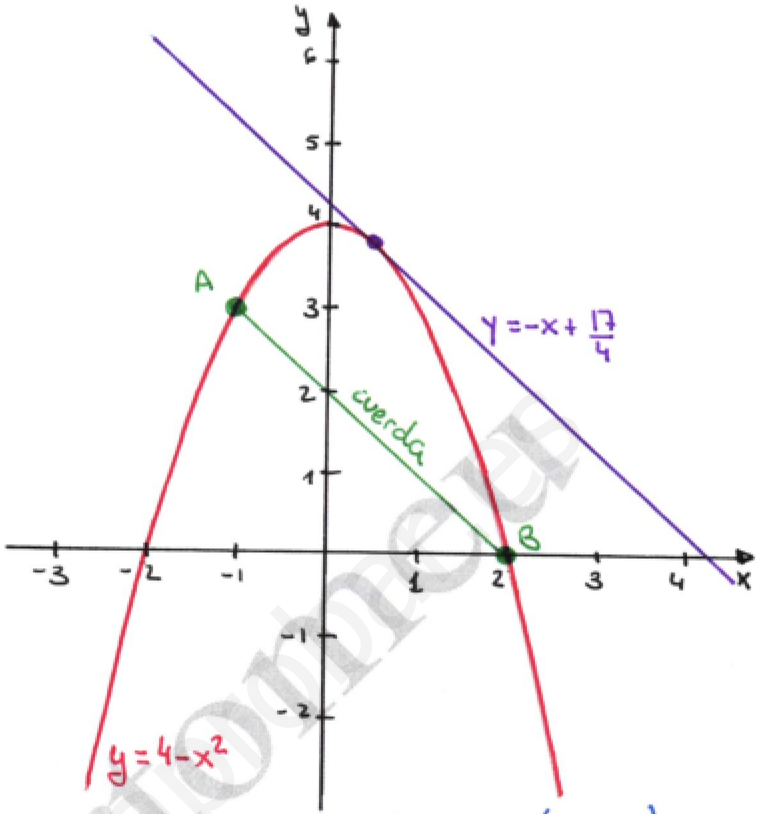
En $x_0 = 1/2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1/2 \\ y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4} \\ m_{tg} = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - \frac{15}{4} = -1\left(x - 1/2\right) \\ y = -x + \frac{17}{4} \end{array}$$

Veamos la representación:

x	$y = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0

x	$y = -x + \frac{17}{4}$
0	$\frac{17}{4}$
$\frac{17}{4}$	0



b) Las rectas que, pasando por el punto $(2,1)$, son tangentes a $f(x)$. Representa gráficamente el ejercicio.

El punto $(2,1)$ no pertenece a la función $f(x) = 4 - x^2$ ya que $f(2) = 4 - 2^2 = 0 \neq 1$. Luego el punto dado $(2,1)$ NO es el punto de tangencia. Así, $(x_0, y_0) = (2,1)$ será un punto de la recta, y $T(x_T, y_T)$ será el punto de tangencia desconocido que tendremos que determinar.

$$f(x) = 4 - x^2 \longrightarrow f'(x) = -2x$$

El punto de tangencia $T(x_T, y_T)$ pertenece a la función $f(x)$, y por tanto será de la forma:

$$T(x_T, y_T) = (x_T, f(x_T)) = (x_T, 4 - x_T^2)$$

Y tal y como vemos:

Creciente: $(-\infty, -1/2) \cup (5/2, +\infty)$

Decreciente: $(-1/2, 5/2)$

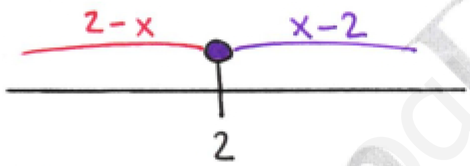
Máximo relativo en $x=-1/2 \longrightarrow$ Máx $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Mínimo relativo en $x=\frac{5}{2} \longrightarrow$ Mín $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-17}{4}\right)$

76) Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + |x-2|$

$x-2=0 \longrightarrow x=2 \quad \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-x+2 & \text{si } x<2 \\ x^2+x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



Si $x<2 \longrightarrow f(x) = x^2-x+2$

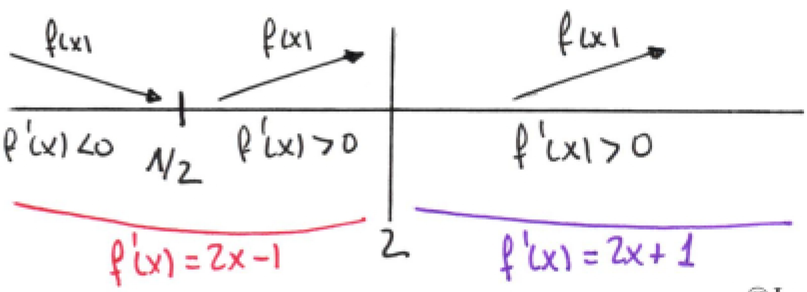
$f'(x) = 2x-1$

$f'(x)=0 \longrightarrow 2x-1=0 \longrightarrow x=1/2$ (Sirve)

Si $x>2 \longrightarrow f(x) = x^2+x-2$

$f'(x) = 2x+1$

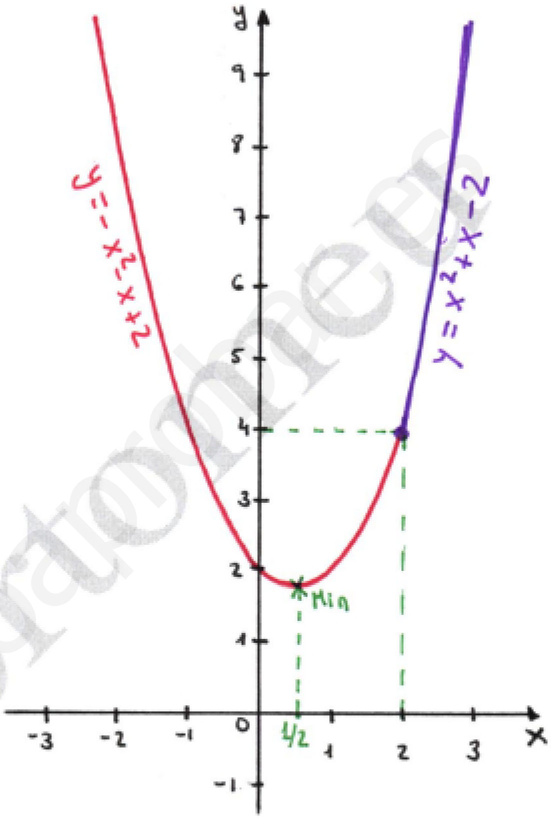
$f'(x)=0 \longrightarrow 2x+1=0 \longrightarrow x=-1/2$ (No sirve!!)



Para asegurarte de cuál es el comportamiento de la función en el punto de encuentro $(x=2)$, y dado que no hemos estudiado su continuidad, debes hacer la representación gráfica:

x	$y = x^2 - x + 2$
-2	8
-1	4
0	2
1	2
2	4 NO

x	$y = x^2 + x - 2$
$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ SI
3	10
...	...



Como vemos:

Decreciente: $(-\infty, 1/2)$

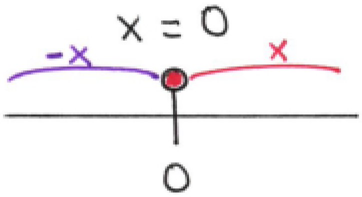
Creciente: $(1/2, +\infty)$ (En $x=2$ es creciente pese a no ser derivable!!)

Mínimo relativo en $x = 1/2 \Rightarrow \text{Min}\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(1/2, \frac{7}{4}\right)$

De la misma representación, podemos ver como $f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$ (pese a que $\nexists f''(2)$)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \quad (f''(x) > 0) \\ 2 & \text{si } x > 2 \quad (f''(x) > 0) \end{cases}$$

b) $f(x) = 3 \cdot e^{-2 \cdot |x|}$



$$f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 3e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x<0$ $\rightarrow f(x) = 3e^{2x}$

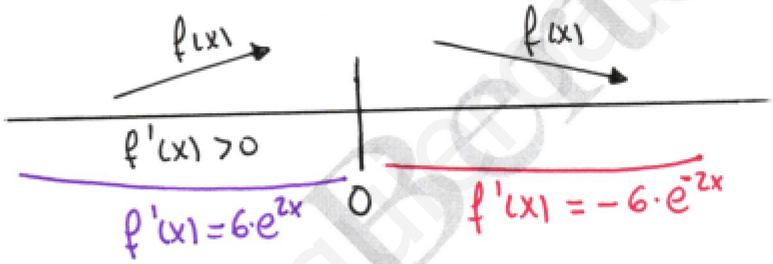
$f'(x) = 6 \cdot e^{2x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6 \cdot e^{2x} \neq 0 \ \forall x$

Si $x>0$ $\rightarrow f(x) = 3e^{-2x}$

$f'(x) = -6 \cdot e^{-2x}$

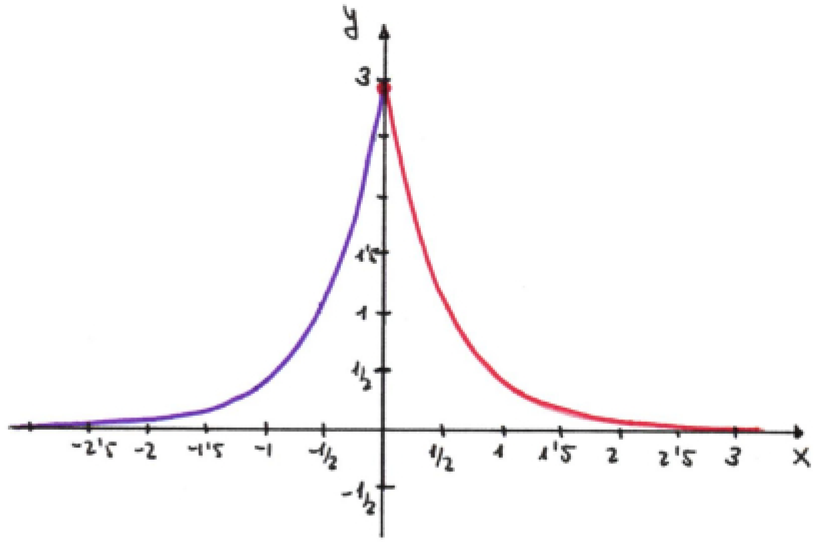
$f'(x) = 0 \rightarrow -6 \cdot e^{-2x} \neq 0 \ \forall x$



Veamos la representación:

x	$y = 3 \cdot e^{2x}$
$\lim_{x \to -\infty} 3e^{2x}$	0
-1	0'406
-1/2	1'104
0	3 NO

x	$y = 3 \cdot e^{-2x}$
0	3 SI
1	0'406
$\lim_{x \to \infty} 3 \cdot e^{-2x}$	0



Como puedes ver:

Creciente: $(-\infty, 0)$

Decreciente: $(0, +\infty)$

Máximo relativo en $x=0 \longrightarrow$ Máx $(0, f(0)) = (0,3)$

De la misma representación, es fácil ver como:

Cóncava: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} 6\cdot e^{2x} & \text{si } x<0 \\ -6\cdot e^{2x} & \text{si } x>0 \end{cases} \longrightarrow f''(x) = \begin{cases} 12\cdot e^{2x} & \text{si } x<0 \quad (f''(x)>0) \\ 12\cdot e^{-2x} & \text{si } x>0 \quad (f''(x)>0) \end{cases}$$

Ojo!! $\rightarrow$ Fíjate bien en la diferencia entre la función del apartado a) y la del apartado b). En ninguna de las dos existe $f''(x)$ en el punto de encuentro. Sin embargo, en la primera hemos podido decir que la función era cóncava en $\mathbb{R}$ (incluyendo $x=2$ en donde $\nexists f''(x)$) mientras que en la segunda no podemos incluir el $x=0$. Revisa en los apuntes la DEFINICIÓN de lo que es una función cóncava y comprenderás la diferencia.

77) Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo $[-2,3]$ de la función $f(x) = \ln(x^2+1) + (x-3)$

$$f(x) = \ln(x^2+1) + (x-3)$$

Como $x^2+1 > 0 \ \forall x \Rightarrow Dom(f(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 1$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{2x}{x^2+1} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = -1 \Rightarrow 2x = -x^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (Doble)} \quad (\text{Sirve porque } x = -1 \in [-2,3])$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = \ln(5) - 5 = -3'39 \\ f(-1) = \ln(2) - 4 = -3'31 \\ f(3) = \ln(10) = 2'30 \end{array}\right\}$$

En el intervalo $[-2,3]$, el máximo absoluto es el punto $(3, 2'30)$ y el mínimo absoluto es $(-2, -3'39)$

78) El coste total en euros de fabricación de "q" unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$. El coste medio por unidad es $M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

a) ¿Cuántas unidades se tienen que fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

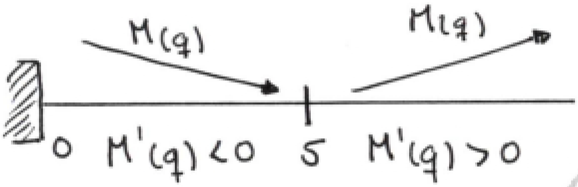
b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de "q" calculado en el apartado anterior.

$$M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2+5q+75}{q} \quad \text{con } q>0 \rightarrow$$ No nos lo dicen pero lo establecemos nosotros porque "q" representa un nº de unidades

$$\text{Dom}(M(q)) = (0, +\infty)$$

$$M'(q) = \frac{(6q+5)\cdot q - (3q^2+5q+75)}{q^2} = \frac{3q^2-75}{q^2}$$

$$M'(q) = 0 \longrightarrow \frac{3q^2-75}{q^2} = 0 \Rightarrow 3q^2-75=0 \Rightarrow q^2=25 \begin{cases} \cancel{q=-5} \text{ No sirve} \\ q=5 \end{cases}$$



El coste medio por unidad $M(q)$ es mínimo cuando se fabrican $q=5$ unidades.

b) $C(5) = 3\cdot 5^2 + 5\cdot 5 + 75 = 175$ euros.

$M(5) = \dfrac{C(5)}{5} = 35$ euros por unidad

79) La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios en miles de euros desde que una empresa empezó a funcionar hace "x" años. ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio? ¿Pierde la empresa dinero en algún momento?

$f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ $\quad x \equiv$ nº de años $\rightarrow \text{Dom}(f(x)) = [0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{60(x^2+9) - 60x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{-60x^2+540}{(x^2+9)^2}$$

$$10A(B-10) = 100 \underset{B=20}{\Longrightarrow} 100A = 100 \Rightarrow A = 1$$

Por tanto $R(t) = t(20-t) = 20t - t^2$ con $0 < t \leq 20$

El rendimiento será del 64% cuando:

$$R(t) = 64 \rightarrow 20t - t^2 = 64 \Rightarrow t^2 - 20t + 64 = 0 \begin{cases} t = 4 \text{ horas} \\ t = 16 \text{ horas} \end{cases}$$

85) Una empresa ha estimado que, al cabo de 15 años de funcionar, sus ingresos y gastos en miles de euros vienen dados por:

$$I(t) = -2t^2 + 50t \quad \text{con } 0 \leq t \leq 15$$

$$G(t) = t^2 - 16t + 100 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 15$$

a) ¿Cuáles son los gastos iniciales de la empresa?

b) Obtén la función $B(t)$ de beneficios de la empresa. ¿En qué año fueron máximos los beneficios? ¿Cuáles fueron estos beneficios máximos?

Los gastos iniciales (en $t=0$ años) son:

$$G(0) = 100 \text{ miles de euros} = 100000 \text{ euros}$$

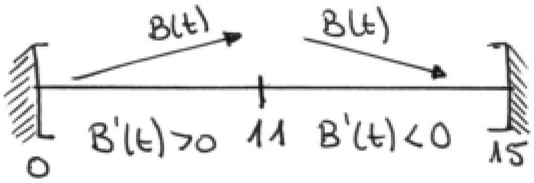
La función de beneficios:

$$B(t) = I(t) - G(t) = -2t^2 + 50t - (t^2 - 16t + 100) =$$

$$= -3t^2 + 66t - 100 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 15$$

$B'(t) = -6t + 66$

$B'(t) = 0 \longrightarrow -6t + 66 = 0 \Rightarrow t = 11$ años



Los beneficios son máximos a los $t = 11$ años, siendo estos beneficios máximos:

$B(11) = -3 \cdot 11^2 + 66 \cdot 11 - 100 = 263$ miles de euros $= 263000$ euros.

86) Un restaurante abre a las 10 de la noche y cierra cuando se marchan todos los clientes. El número de clientes N en función del número t de horas que lleva abierto es:

$$N(t) = 80t - 10t^2$$

a) ¿A qué hora cierra el restaurante?

b) ¿Cuántos clientes habrá como máximo y a qué hora?

$N(t) = 80t - 10t^2$

El restaurante cierra cuando no hay clientes:

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0$

$10t(8 - t) = 0 \rightarrow t = 0$ horas, $t = 8$ horas

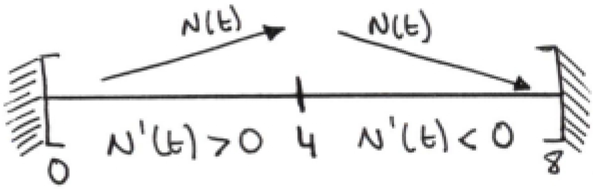
El restaurante cierra a las 8 horas de abrir. Es decir, a las 6 de la madrugada.

b) Hemos visto que:

$$N(t) = 80t - 10t^2 \quad \text{con } Dom(N(t)) = [0, 8]$$

$$N'(t) = 80 - 20t$$

$$N'(t) = 0 \longrightarrow 80 - 20t = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ horas}$$



El número de clientes es máximo a las $t = 4$ horas de abrir (es decir a las dos de la madrugada), siendo estos:

$$N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160 \text{ clientes}$$

87) El beneficio en miles de euros en función del gasto "x" en publicidad (también en miles de euros) es:

$$B(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5}{2}x - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

a) ¿Cuánto se debe invertir en publicidad para no tener pérdidas?

b) ¿Qué gasto en publicidad maximiza el beneficio? ¿Cuál es el máximo beneficio?

La empresa no tendrá pérdidas si $B(x) > 0$. Estudiemos pues el signo de la función $B(x)$:

89) Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo de 1000€ más una comisión que viene dada por la función $17x - 0'0025x^3$, donde "x" representa el número de pólizas vendidas. Si el vendedor tiene un gasto general de 200€ mensuales, más otro de 5€ por póliza vendida, ¿cuántas polizas debe vender para obtener los máximos beneficios? ¿Cuáles son dichos beneficios?

Los ingresos del vendedor vendrán dados por:

$$I(x) = 1000 + 17x - 0'0025x^3 \quad \text{con } x \geq 0$$

Los gastos serán:

$$G(x) = 200 + 5 \cdot x \quad \text{con } x \geq 0$$

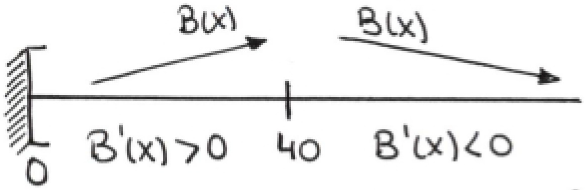
Por tanto:

$$B(x) = I(x) - G(x) = -0'0025x^3 + 12x + 800 \quad \text{con } x \geq 0$$

$$Dom(B(x)) = [0, +\infty)$$

$$B'(x) = -0'0075x^2 + 12$$

$$B'(x) = 0 \longrightarrow -0'0075x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 1600 \begin{cases} \cancel{x = -40} & \text{No sirve} \\ x = 40 \end{cases}$$



Los beneficios máximos se obtienen al vender $x = 40$ pólizas, siendo dichos beneficios de:

$$B(40) = -0'0025 \cdot 40^3 + 12 \cdot 40 + 800 = 1120 \text{ €}$$

90) Una empresa de compra y venta de coches ha realizado un estudio sobre sus beneficios/pérdidas, en miles de euros, a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función:

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 10$$

a) ¿En qué año se alcanza el máximo y el mínimo? Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento.

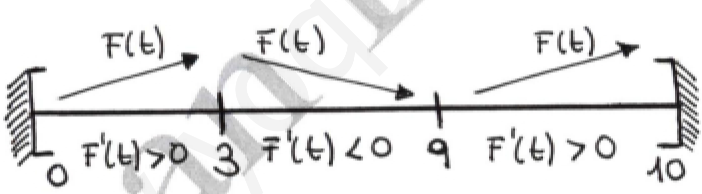
b) ¿Cuáles son los beneficios máximos?

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 10$$

$$\mathrm{Dom}(F(t)) = [0, 10]$$

$$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81$$

$$F'(t) = 0 \longrightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \begin{cases} t = 3 \text{ horas} \\ t = 9 \text{ horas} \end{cases}$$



Creciente: $[0, 3) \cup (9, 10]$

Decreciente: $(3, 9)$

Los máximos y mínimos ABSOLUTOS de $F(t)$ en $[0, 10]$:

$$\left.\begin{aligned} F(0) &= -3 \\ F(3) &= 105 \\ F(9) &= -3 \\ F(10) &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Los beneficios máximos de 105000 euros se alcanzan a los 3 años y los mínimos de −3000 € se alcanzan al inicio de la actividad (0 años) y a los 9 años.

91) Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad en euros viene dada por:

$$R(x) = -0'01x^2 + 5x + 2500, \quad x \equiv \text{cantidad invertida } (€)$$

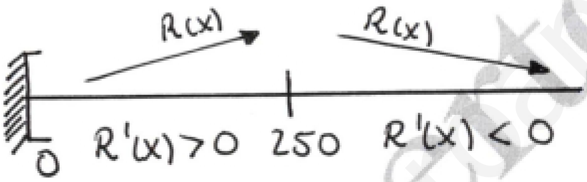
Calcula cuánto se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad, así como dicha rentabilidad máxima.

$$R(x) = -0'01x^2 + 5x + 2500$$

$$\text{Dom}(R(x)) = [0, +\infty)$$

$$R'(x) = -0'02x + 5$$

$$R'(x) = 0 \longrightarrow -0'02x + 5 = 0 \Rightarrow x = 250 \text{ euros.}$$



Hay que invertir $x = 250$ € para obtener la máxima rentabilidad de:

$$R(250) = -0'01 \cdot 250^2 + 5 \cdot 250 + 2500 = 3125 \text{ euros.}$$

92) Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años y su precio $P(t)$, en miles de euros, varió con el tiempo "t", en años, según la función:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -\frac{5}{2} \cdot t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

Averigua en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron esos precios.

Si $10 < p \leq 40 \longrightarrow S(p) = p^2 - 60p + 1000$

$S'(p) = 2p - 60$

$S'(p) = 0 \Rightarrow 2p - 60 = 0 \Rightarrow p = 30$

Y evaluando la función:

$$\left.\begin{array}{l} S(0) = 200 \\ S(10) = 30 \cdot 10 + 200 = 500 \\ S(30) = 30^2 - 60 \cdot 30 + 1000 = 100 \\ S(40) = 40^2 - 60 \cdot 40 + 1000 = 200 \end{array}\right\}$$

La oferta máxima se alcanza cuando el precio es $p = 10$ y la mínima cuando el precio es $p = 30$

94) La distancia, en millas, entre un barco que zarpó hace 10 días y su puerto base viene dada por:

$$M(t) = \begin{cases} 36 - (2t-6)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 4 \cdot (10-t) & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases} \quad (t \text{ en días})$$

a) ¿En qué periodos aumentó y en cuáles disminuyo la distancia al puerto base? ¿Cuándo fue máxima y cuál fue esa distancia máxima?

b) ¿A partir de qué día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

Tenemos que estudiar la monotonía y extremos ABSOLUTOS de la función $M(t)$ en el intervalo $[0, 10]$:

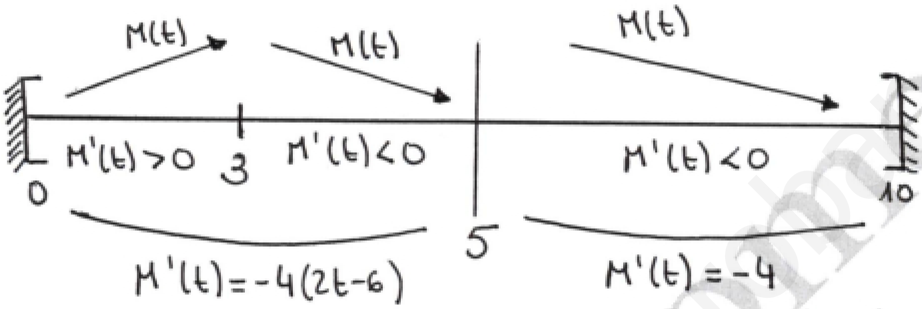
Si $0 \le t < 5 \longrightarrow M(t) = 36 - (2t-6)^2$

$$M'(t) = -2(2t-6)\cdot 2 = -4(2t-6)$$

$$M'(t) = 0 \Rightarrow -4(2t-6) = 0 \Rightarrow 2t-6 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ días}$$

Si $5 < t \le 10 \longrightarrow M(t) = 4(10-t)$

$$M'(t) = -4 \;;\; M'(t) \neq 0$$



La distancia al puerto aumenta durante los tres primeros días y disminuye hasta el día décimo:

Creciente: $[0, 3)$

Decreciente: $(3, 10]$

La distancia máxima se produce a los $t = 3$ días, siendo esta distancia máxima de:

$$M(3) = 36 - (2\cdot 3 - 6)^2 = 36 \text{ millas}$$

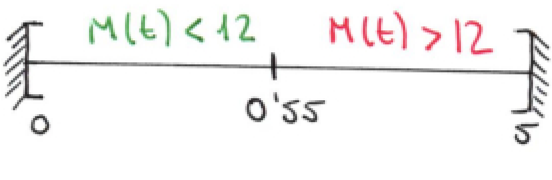
b) Si $0 \le t \le 5 \longrightarrow M(t) = 36 - (2t-6)^2 = -4t^2 + 24t$

$$M(t) < 12 \Rightarrow -4t^2 + 24t < 12$$

$$-4t^2 + 24t - 12 = 0$$

$\nearrow t = 0'55$ días

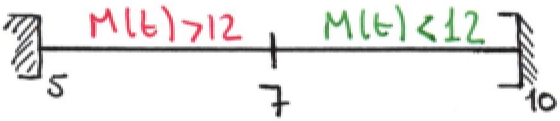
$\searrow t = \cancel{5'45}$ No sirve



Si $5 < t \leq 10 \longrightarrow M(t) = 4\cdot(10-t) = 40-4t$

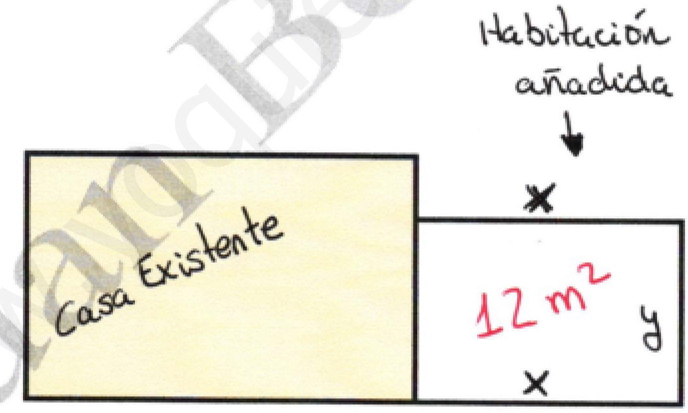
$M(t) < 12 \Rightarrow 40-4t < 12 \Rightarrow 28-4t < 0$

$28-4t=0 \Rightarrow t = 7$ días



Como vemos, después de haber alcanzando la distancia máxima, el barco estará a menos de 12 millas a partir del séptimo día.

95) Queremos añadir a una casa una nueva habitación rectangular de 12 m² de superficie. ¿Qué longitud debemos dar a sus paredes para que el perímetro sea mínimo?

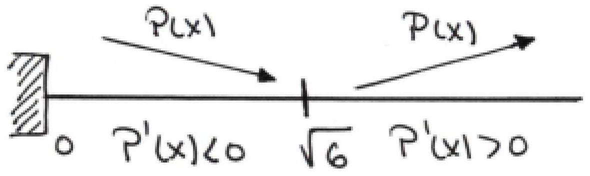


$\text{Área} = 12\,m^2 \Rightarrow x\cdot y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$ con $x>0$

$P(x,y) = 2x+y \Rightarrow P(x) = 2x + \frac{12}{x}$ con $x>0$

$P'(x) = 2 - \frac{12}{x^2}$

$P'(x)=0 \Rightarrow 2-\frac{12}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{12}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2=6$ → $\cancel{x=-\sqrt{6}}$ No sirve ; → $x=\sqrt{6}$

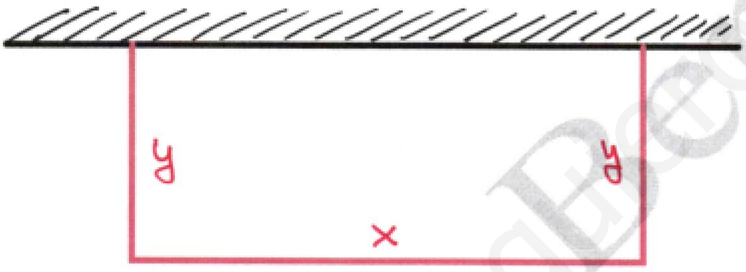


Como vemos, el perímetro será mínimo cuando la longitud de las paredes sea:

$$x = \sqrt{6} \text{ metros}$$

$$y = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \text{ metros}$$

96) Se desea delimitar una parcela rectangular que linda con la pared de una nave. Si disponemos de 200 m de tela metálica para cercarla, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela que tiene la mayor superficie?



Perímetro = 200

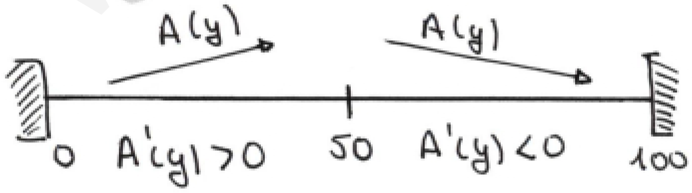
$$x + 2y = 200$$

$$x = 200 - 2y \quad \text{con } 0 < y < 100$$

$$A(x,y) = x \cdot y \Rightarrow A(y) = (200-2y)\cdot y = 200y - 2y^2 \quad \text{con } 0 < y < 100$$

$$A'(y) = 200 - 4y$$

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 200 - 4y = 0 \Rightarrow y = 50 \text{ metros}$$

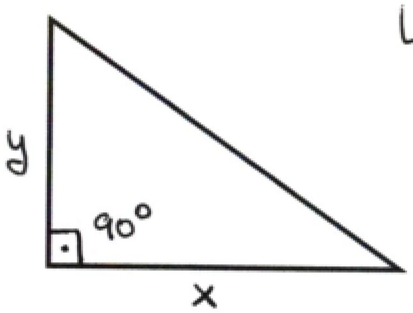


Como vemos, el área será máxima cuando las dimensiones de la parcela sean:

$$y = 50 \text{ metros}$$

$$x = 200 - 2\cdot 50 = 100 \text{ metros}$$

98) De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 20cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima y determina dicha área.



Los catetos suman 20cm:

$x+y=20 \Rightarrow y=20-x$ con $0<x<20$

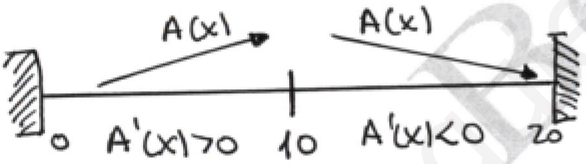
El área del triángulo:

$A(x,y) = \dfrac{x\cdot y}{2}$

$A(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot(20-x) = \frac{1}{2}(20x-x^2)\ ;\ 0<x<20$

$A'(x) = \frac{1}{2}\cdot(20-2x)$

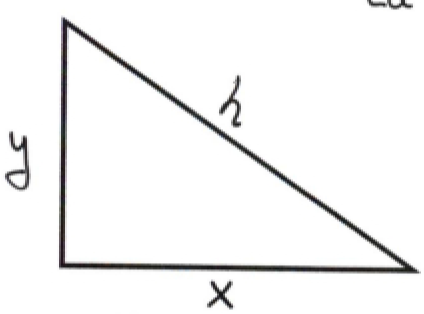
$A'(x)=0 \rightarrow \frac{1}{2}(20-2x)=0 \Rightarrow 20-2x=0 \Rightarrow x=10\text{cm}$



El área del triángulo es máxima cuando los catetos miden $x=10$ cm e $y=20-10=10$cm, siendo dicha área máxima:

$$A(10)=\frac{1}{2}(20\cdot 10-10^2)=50\text{ cm}^2$$

99) Considera los triángulos rectángulos de 8cm de hipotenusa y halla los catetos del que tiene área máxima



La hipotenusa es 8cm. Pitágoras:

$h^2=x^2+y^2 \Rightarrow 64=x^2+y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\sqrt{64-x^2}$ con $0<x<8$

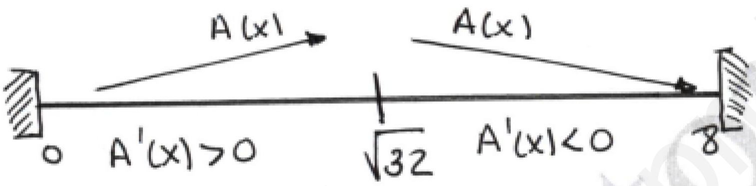
El área del triángulo:

$$A(x,y) = \frac{1}{2}\, x \cdot y$$

$$A(x) = \frac{1}{2}\, x \cdot \sqrt{64-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64x^2-x^4} \quad \text{con } 0<x<8$$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{128x-4x^3}{2\sqrt{64x^2-x^4}} = \frac{32x-x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}$$

$$A'(x)=0 \longrightarrow \frac{32x-x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}} = 0 \Rightarrow x(32-x^2)=0 \begin{cases} \cancel{x=0} \\ 32-x^2=0 \begin{cases} \cancel{x=-\sqrt{32}} \\ x=\sqrt{32} \end{cases} \end{cases}$$

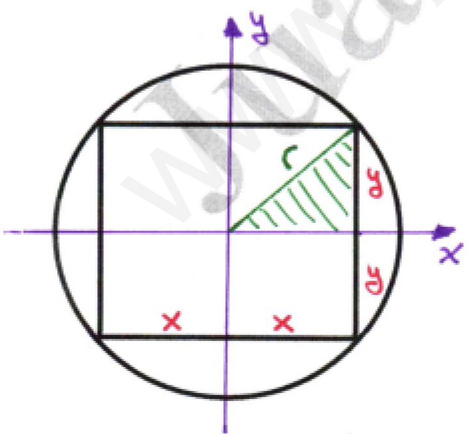


El área es máxima cuando los catetos miden

$$x = \sqrt{32} \text{ cm}$$

$$y = \sqrt{64-(\sqrt{32})^2} = \sqrt{32} \text{ cm}$$

100) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 6 cm de radio.



En el triángulo sombreado:

$$r^2 = x^2+y^2$$

$$36 = x^2+y^2 \Rightarrow$$

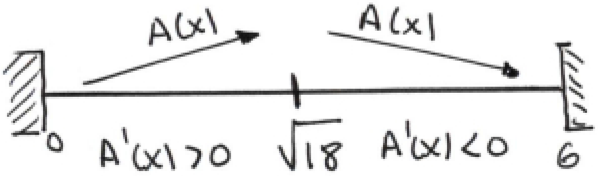
$$\Rightarrow y = \sqrt{36-x^2} \quad \text{con } 0<x<6$$

El área del rectángulo es $A(x,y) = (2x)\cdot(2y) = 4xy \Rightarrow$

$$\Rightarrow A(x) = 4x\cdot\sqrt{36-x^2} = 4\sqrt{36x^2-x^4} \quad \text{con } 0<x<6$$

$$A'(x) = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{72x - 4x^3}{\cancel{2}\sqrt{36x^2 - x^4}} = \frac{144x - 8x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow \frac{144x - 8x^3}{\sqrt{36x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 8x(18 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{x = 0} \\ \cancel{x = -\sqrt{18}} \\ x = +\sqrt{18} \end{cases}$$

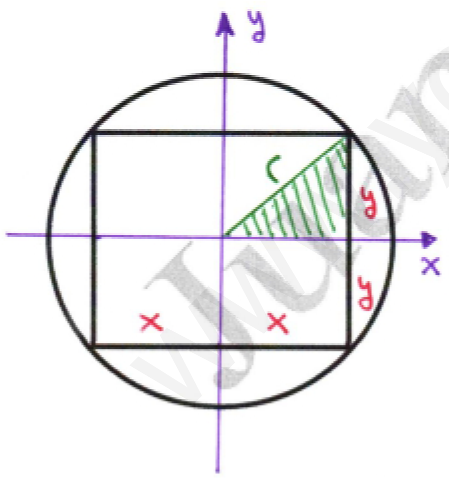


El área del rectángulo inscrito es máxima cuando sus dimensiones son:

$$\text{Base} = 2x = 2\sqrt{18}\ \text{cm}$$

$$\text{Altura} = 2y = 2\sqrt{36 - (\sqrt{18})^2} = 2\sqrt{18}\ \text{cm}$$

101) Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un círculo de radio "r" es un cuadrado de lado "$r \cdot \sqrt{2}$"



En el triángulo sombreado:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{con } 0 < x < r$$

El área del rectángulo es:

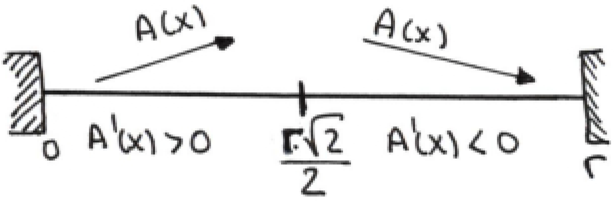
$$A(x,y) = (2x) \cdot (2y) = 4xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = 4x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} = 4\sqrt{r^2x^2 - x^4} \quad \text{con } 0 < x < r$$

$$A'(x) = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{2r^2x - 4x^3}{\cancel{2}\sqrt{r^2x^2 - x^4}} = \frac{4r^2x - 8x^3}{\sqrt{r^2x^2 - x^4}}$$

$$A'(x)=0 \longrightarrow \frac{4r^2x-8x^3}{\sqrt{r^2x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 4r^2x-8x^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(4r^2-8x^2)=0 \quad \begin{cases} \cancel{x=0} \\ 4r^2-8x^2=0 \quad \begin{cases} \cancel{x=-\sqrt{\frac{r^2}{2}}} \\ x=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases}$$



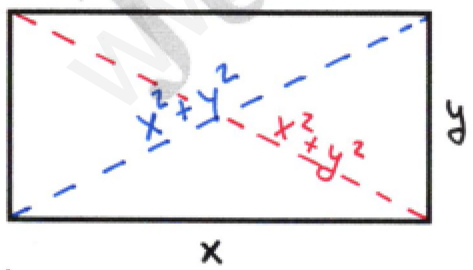
El área del rectángulo inscrito es máxima cuando sus dimensiones son:

$$\text{Base}=2x=2\cdot\frac{r\sqrt{2}}{2}=r\sqrt{2}$$

$$\text{Altura}=2y=2\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\cdot\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=2\cdot\frac{r}{\sqrt{2}}=r\sqrt{2}$$

Dado que base y altura son iguales, efectivamente se trata de un cuadrado como queríamos demostrar.

102) Entre todos los rectángulos de $3m^2$ de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.



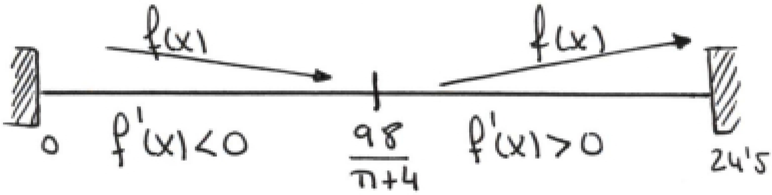
El área del rectángulo:

$$A=x\cdot y$$

$$3=x\cdot y \rightarrow y=\frac{3}{x} \text{ con } x>0$$

La función a optimizar es $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)=\left[x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2\right]\cdot\left[x^2+\left(\frac{3}{x}\right)^2\right]=\left(x^2+\frac{9}{x^2}\right)^2=x^4+18+\frac{81}{x^4} \text{ con } x>0$$

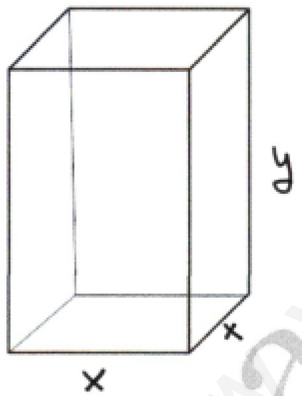


La suma de las áreas es mínima cuando las dimensiones pedidas son:

Lado del cuadrado $= x = \dfrac{98}{\pi+4}$ cm

Radio del círculo $= r = \dfrac{49 - 2\cdot\frac{98}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{49}{\pi+4}$ cm

105) De todos los prismas rectos de base cuadrada y de $24\,cm^2$ de área total, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?



Área $= 2x^2 + 4xy$

$24 = 2x^2 + 4xy \Rightarrow 12 = x^2 + 2xy \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{12 - x^2}{2x}$ con $0 < x < \sqrt{12}$

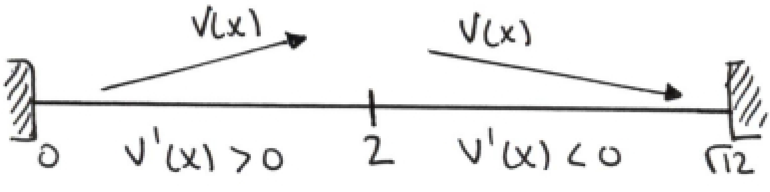
La función a optimizar es el volumen:

$V(x,y) = x^2 \cdot y \Rightarrow$

$\Rightarrow V(x) = x^{\cancel{2}} \cdot \dfrac{12 - x^2}{2\cancel{x}} = \dfrac{12x - x^3}{2}$ con $0 < x < \sqrt{12}$

$V'(x) = \dfrac{12 - 3x^2}{2}$

$V'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{12 - 3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \quad \begin{cases} \cancel{x = -2} \\ x = 2 \text{ cm} \end{cases}$



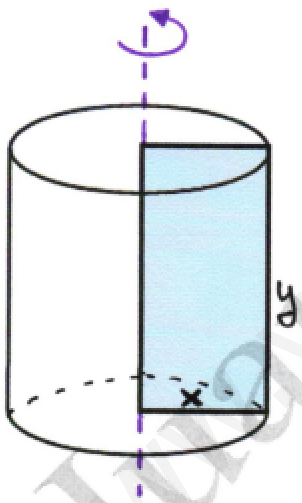
El volumen del prisma es máximo cuando sus dimensiones son:

$$x = 2\,cm$$
$$y = \frac{12-2^2}{2\cdot 2} = 2\,cm$$

siendo el volumen máximo:

$$V(2) = \frac{12\cdot 2 - 2^3}{2} = 8\,cm^3$$

106) Halla las dimensiones de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado, genera un cilindro de volumen máximo.



Perímetro cartulina $= 60$ cm

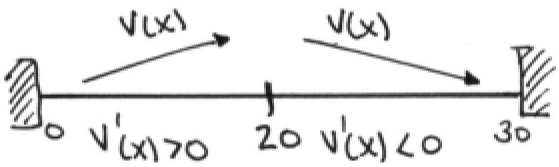
$$2x+2y = 60 \Rightarrow x+y = 30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 30-x \quad \text{con } 0<x<30$$

La función a optimizar es el volumen:

$$V(x,y) = \pi\cdot x^2\cdot y$$
$$V(x) = \pi x^2\cdot(30-x) = 30\pi x^2 - \pi x^3; \; 0<x<30$$

$$V'(x) = 60\pi x - 3\pi x^2$$

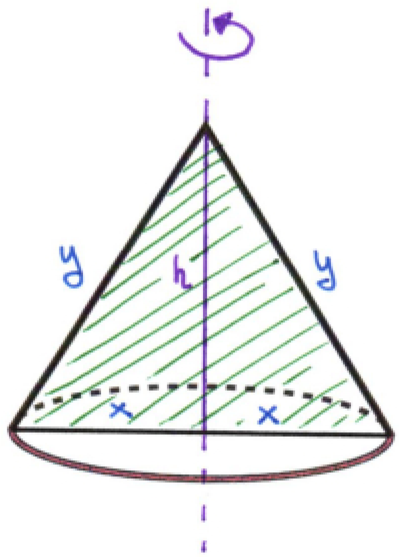
$$V'(x) = 0 \rightarrow 60\pi x - 3\pi x^2 = 0 \Rightarrow 3\pi x(20-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{x = 0\,cm} \\ x = 20\,cm \end{cases}$$



El volumen del cilindro es máximo cuando las dimensiones de la cartulina son:

$$x = 20\,cm$$
$$y = 30-20 = 10\,cm$$

107) El perímetro de un triángulo isósceles es 10m. Si gira alrededor de la altura correspondiente al lado desigual genera un cono. Calcula los lados del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.



$$\text{Perímetro}_{\text{triángulo}} = 10m$$

$$2x+2y = 10 \longrightarrow x+y=5 \Rightarrow$$

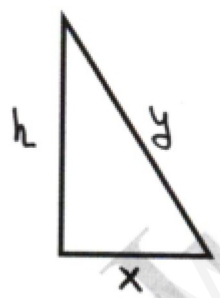
$$\Rightarrow y = 5-x \quad \text{con } 0<x<5$$

La función a optimizar es el volumen del cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \text{Área}_{base} \times \text{altura}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 \cdot h$$

En la figura vemos que:



Pitágoras:

$$y^2 = x^2+h^2 \Rightarrow h^2 = y^2-x^2 \Rightarrow h^2 = (5-x)^2 - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 25-10x \cancel{+x^2} \cancel{-x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{25-10x} \quad \text{con } 0<x<2'5$$

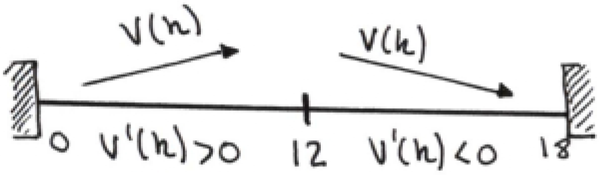
Y por tanto:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{25-10x} = \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{25x^4-10x^5} \quad \text{con } 0<x<2'5$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{100x^3-50x^4}{2\sqrt{25x^4-10x^5}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\cancel{2}x^{\cancel{3}}(50-25x)}{\cancel{2}\cancel{x^2}\sqrt{25-10x}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x(50-25x)}{\sqrt{25-10x}}$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(36h - 3h^2\right) = \pi h \left(12 - h\right)$$

$$V'(h) = 0 \rightarrow \pi h(12-h) = 0 \begin{cases} \cancel{h = 0} \text{ cm} \\ h = 12 \text{ cm} \end{cases}$$

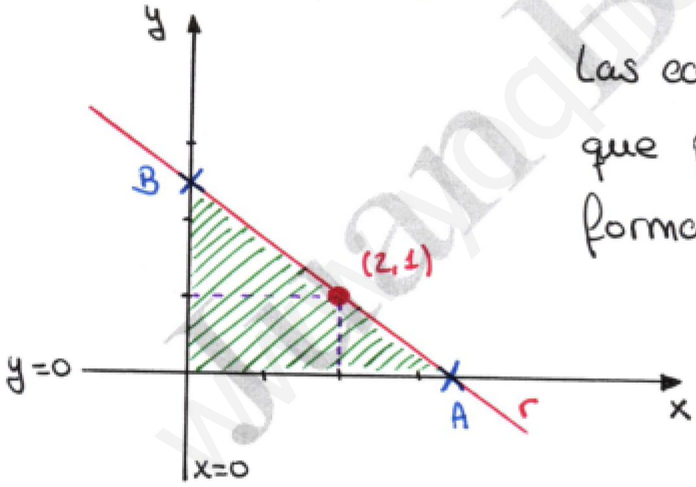


El volumen del cono inscrito en una esfera de radio $R = 9$cm es máximo cuando las dimensiones del cono son:

$$h = 12 \text{cm}$$

$$r = \sqrt{18 \cdot 12 - 12^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

110) De todas las rectas que pasan por el punto (2,1), encuentra aquella que determina, junto con los semiejes de coordenadas positivos, un triángulo de área mínima.



Las ecuaciones de todas las rectas que pasan por (2,1) serán de la forma:

$$y = mx + n$$

$$1 = 2m + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 1 - 2m \text{ con } m < 0 \Rightarrow y = mx + 1 - 2m$$

Determinamos los puntos de corte A y B:

Punto A $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = mx + 1 - 2m \Rightarrow x = \dfrac{2m-1}{m}$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2m-1}{m}, 0\right)$$

Punto B $\Rightarrow x=0 \Rightarrow y = 1-2m \Rightarrow B(0, 1-2m)$

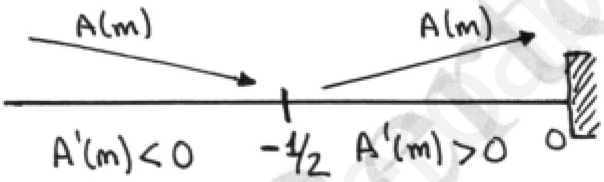
El área del triángulo por tanto:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$A(m) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2m-1}{m}\cdot(1-2m) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(2m-1)^2}{m} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4m^2-4m+1}{m}\ ;\ m<0$$

$$A'(m) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(8m-4)m-(4m^2-4m+1)}{m^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4m^2-1}{m^2}$$

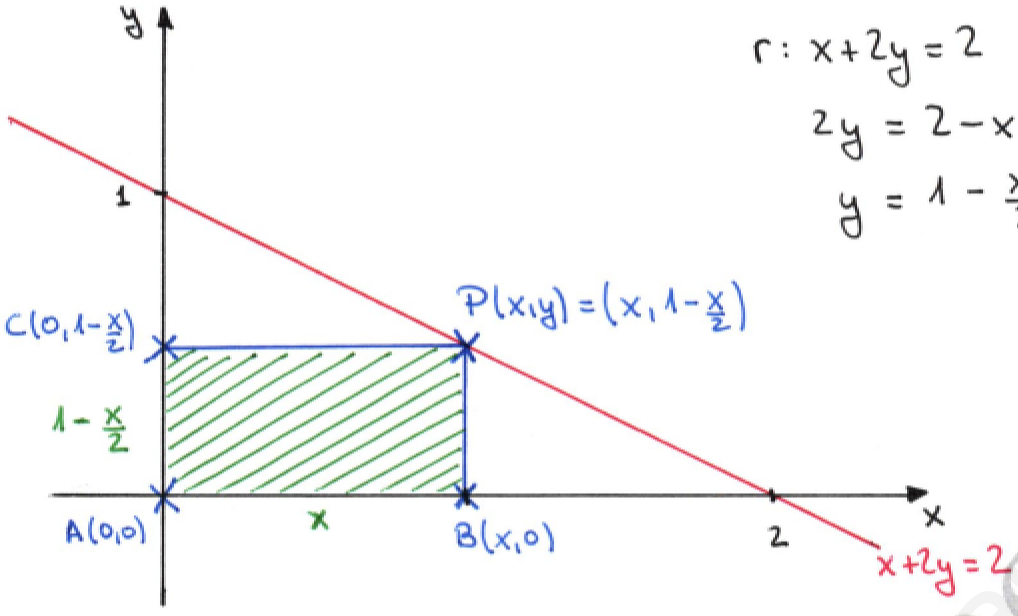
$$A'(m)=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot\frac{4m^2-1}{m^2}=0 \Rightarrow 4m^2-1=0 \begin{cases} m=-1/2 \\ \cancel{m=1/2} \text{ No sirve} \end{cases}$$



Como vemos, el área del triángulo será mínima cuando la pendiente de la recta sea $m=-1/2$, y por tanto, la ecuación de la recta pedida será:

$$y = mx + 1-2m \xRightarrow[m=-1/2]{} y = -\frac{1}{2}x + 2$$

111) Considera todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice en la recta de ecuación $x+2y=2$ y determina los vértices del de mayor superficie y halla dicha superficie.

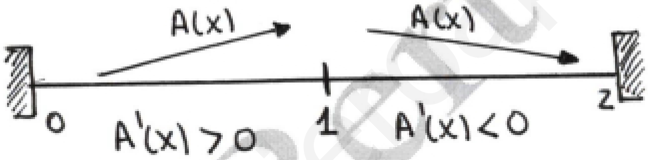


$$r: x+2y=2$$
$$2y = 2-x$$
$$y = 1 - \frac{x}{2}$$

x	$y = 1-\frac{x}{2}$
0	1
2	0

$$A(x) = x\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2} \quad \text{con } 0<x<2$$

$$A'(x) = 0 \longrightarrow 1-x=0 \Rightarrow x = 1$$



El rectángulo de área máxima es el que tiene por vértices:

$$A(0,0)\ ;\ B(1,0)\ ;\ C(0, 1/2)\ ;\ P(1, 1/2)$$

siendo dicha área máxima:

$$A(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ u^2$$

112) Determina los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a distancia mínima del punto $(0,1)$ y calcula dicha distancia.

Empezamos representando la parábola dada

Como vemos, los puntos de la parábola que están a distancia mínima del punto A son:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

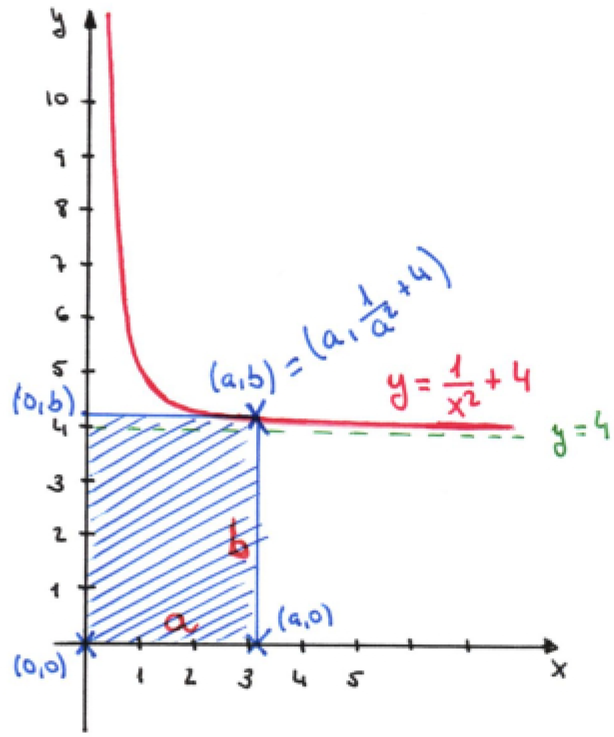
siendo la mínima distancia:

$$d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u.$$

113) Un rectángulo tiene por vértices los puntos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$ con $a>0$ y $b>0$. El punto (a,b) está sobre la curva $y = \frac{1}{x^2} + 4$. Determina a y b para que el rectángulo tenga área mínima.

Representamos el ejercicio:

x	$y = \frac{1}{x^2} + 4$
0^+	$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}+4\right) = +\infty$
1	5
2	4'25
$\vdots$	
∞	$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2}+4\right) = 4$



Como (a,b) está sobre la curva $y = \frac{1}{x^2} + 4 \Rightarrow b = \frac{1}{a^2} + 4$ con $a>0$.

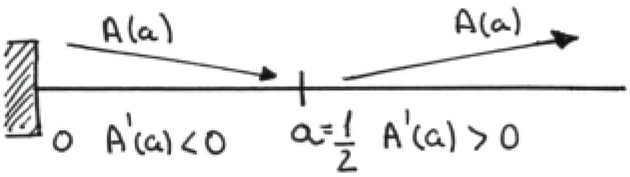
El área del rectángulo:

$$A(a,b) = a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(a) = a \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 4\right) = \frac{1}{a} + 4a \quad \text{con } a>0$$

$$A'(a) = -\frac{1}{a^2} + 4$$

$$A'(a) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} + 4 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \begin{cases} \cancel{a = -\frac{1}{2}} \\ a = 1/2 \end{cases}$$



El área del rectángulo será mínima cuando los valores de a y b sean:

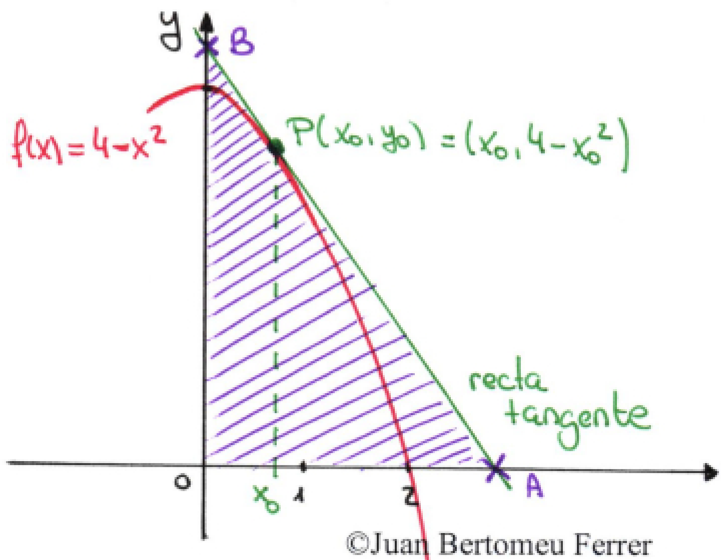
$$a = 1/2$$

$$b = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 4 = 8$$

114) ¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima? Considera el triángulo en el primer cuadrante.

Representamos la parábola:

x	$y = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0



$$f(x) = 4 - x^2 \longrightarrow f'(x) = -2x$$

La ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, siendo

$x_0 \to$ Punto tangencia que estamos buscando

$y_0 = f(x_0) = 4 - x_0^2$

$m = f'(x_0) = -2x_0$

$$y - (4 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2x_0 \cdot x + 2x_0^2 + 4 - x_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2x_0 \cdot x + x_0^2 + 4, \text{ con } x_0 > 0$$

Veamos donde corta esa recta a los ejes coordenados:

Punto A $\longrightarrow y = 0$

$$x_0^2 - 2x_0 \cdot x + 4 = 0 \Rightarrow 2x_0 x = x_0^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{x_0^2 + 4}{2x_0}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{x_0^2 + 4}{2x_0}, 0\right)$$

Punto B $\longrightarrow x = 0$

$$y = x_0^2 + 4 \Rightarrow B(0, x_0^2 + 4)$$

El área del triángulo por tanto será:

$$A_T(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_0^2 + 4}{2x_0}\right) \cdot (x_0^2 + 4) = \frac{(x_0^2 + 4)^2}{4x_0} = \frac{x_0^4 + 8x_0^2 + 16}{4x_0}; \ x_0 > 0$$

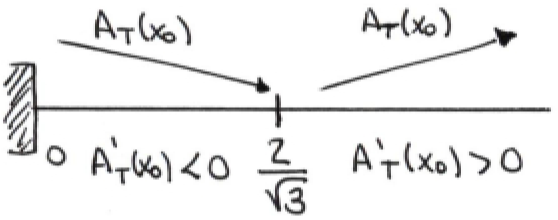
$$A'_T(x_0) = \frac{(4x_0^3 + 16x_0) \cdot 4x_0 - (x_0^4 + 8x_0^2 + 16) \cdot 4}{(4x_0)^2} =$$

$$= \frac{16x_0^4 + 64x_0^2 - 4x_0^4 - 32x_0^2 - 64}{16x_0^2} = \frac{12x_0^4 + 32x_0^2 - 64}{16x_0^2}$$

$$A'_T(x_0)=0 \Rightarrow \frac{12x_0^4+32x_0^2-64}{16x_0}=0 \Rightarrow 3x_0^4+8x_0^2-16=0$$

Hacemos un cambio de variable $\Rightarrow x_0^2=z \;;\; x_0^4=z^2 \Rightarrow$

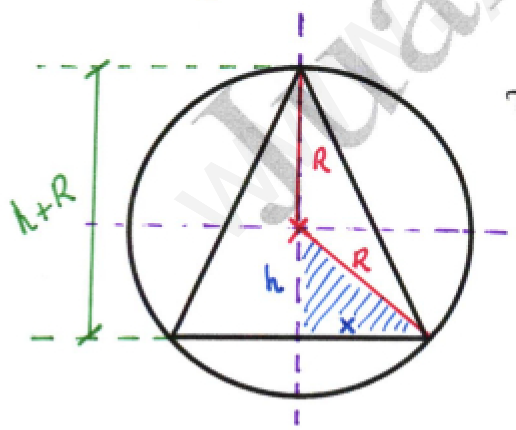
$$\Rightarrow 3z^2+8z-16=0 \begin{cases} z=-4 \Rightarrow \nexists\, x_0 \\ z=\dfrac{4}{3} \begin{cases} \cancel{x_0=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}} & \text{No sirve} \\ x_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{cases}$$



El área del triángulo pedido será mínima cuando la recta tangente la tracemos por el punto:

$$P(x_0, 4-x_0^2) \Longrightarrow P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}\right)$$

115) De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de 5cm de radio, halla las dimensiones del que tiene mayor área.



En el triángulo sombreado aplicamos Pitágoras:

$$R^2=x^2+h^2$$

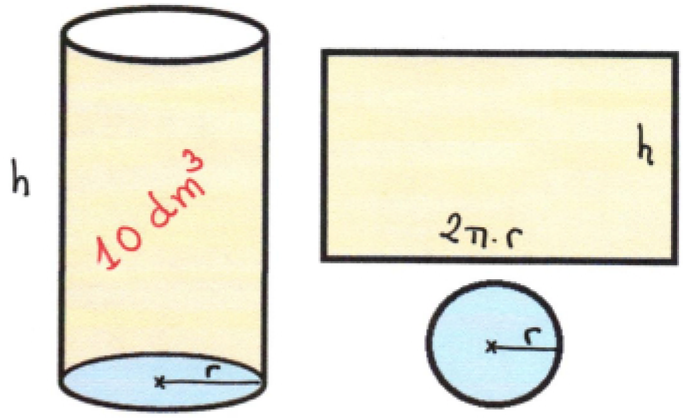
$$25=x^2+h^2 \Rightarrow h^2=25-x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{25-x^2} \quad \text{con } 0<x<5$$

El área del triángulo inscrito:

$$A(x,h)=\frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot(h+R)=x\cdot(h+5) \Rightarrow$$

116) Se desea fabricar una papelera cilíndrica, sin tapa, de $10 \, dm^3$ de capacidad. ¿Qué dimensiones deberá tener para que en su fabricación se utilice la menor cantidad de material?



El volumen del cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$10 = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{10}{\pi \cdot r^2} \quad \text{con } r > 0$$

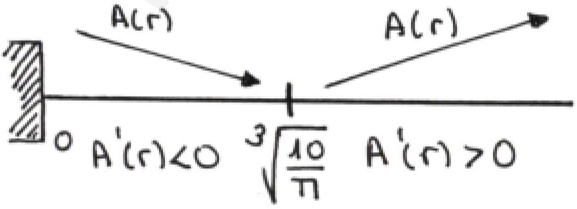
El área de la papelera será:

$$A(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(r) = \pi \cdot r^2 + \cancel{2\pi r} \cdot \frac{10}{\cancel{\pi \cdot r^2}} = \pi \cdot r^2 + \frac{20}{r} \quad \text{con } r > 0$$

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 2\pi r = \frac{20}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{10}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \ dm$$



El área de la papelera será mínima cuando sus dimensiones sean:

$$r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \ dm$$

$$h = \frac{10}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \ dm$$

117) Determina tres números reales positivos cuya suma vale 100, la suma del primero más dos veces el segundo más tres veces el tercero vale 200 y cuyo producto sea lo mayor posible

Sean x, y, z los tres números, con $x>0;\ y>0;\ z>0$

Su suma vale 100:

$$x+y+z=100 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

El primero, más el doble del segundo, más el triple del tercero es 200:

$$x+2y+3z=200 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

Relacionamos las variables:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x+2y+3z=200 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2-E_1} y+2z=100 \rightarrow \begin{cases} z=\lambda \\ y=100-2\lambda \end{cases}$$

$$x=100-y-z=100-100+2\lambda-\lambda=\lambda$$

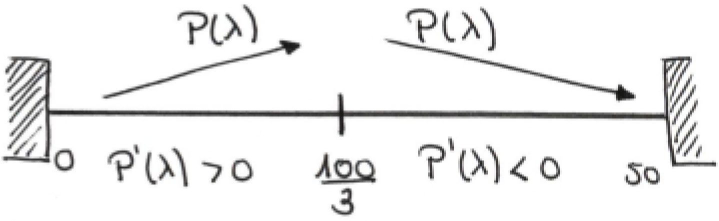
El producto que queremos que máximo por tanto:

$$P(x,y,z)=x\cdot y\cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\lambda)=\lambda\cdot(100-2\lambda)\cdot\lambda=100\lambda^2-2\lambda^3 \quad \text{con } 0<\lambda<50$$

$$P'(\lambda)=200\lambda-6\lambda^2$$

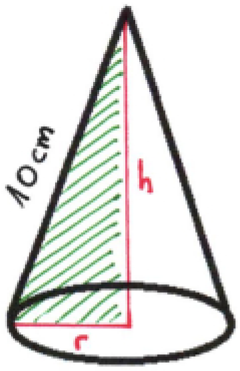
$$P'(\lambda)=0 \Rightarrow 2\lambda(100-3\lambda)=0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{\lambda=0} \rightarrow \text{No sirve pues debe ser } 0<\lambda<50 \\ \lambda=\dfrac{100}{3} \end{cases}$$



Como vemos, el producto será máximo cuando $\lambda = \frac{100}{3}$, siendo los tres números por tanto:

$$x = \frac{100}{3} \;;\; y = 100 - 2\cdot\frac{100}{3} = \frac{100}{3} \;;\; z = \frac{100}{3}$$

118) Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



Aplicamos Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$10^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 100 - r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{100 - r^2} \quad \text{con } 0 < r < 10$$

El volumen del cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \times (\text{Área}_{base}) \times \text{altura}$$

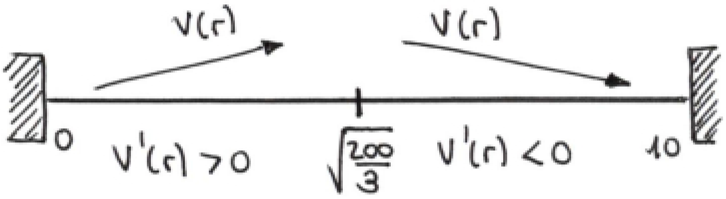
Por tanto:

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{100 - r^2} = \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{100r^4 - r^6} \quad \text{con } 0 < r < 10$$

$$V'(r) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{400r^3 - 6r^5}{2\sqrt{100r^4 - r^6}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\cancel{2}r^3(200 - 3r^2)}{\cancel{2}\cancel{r^2}\cdot\sqrt{100 - r^2}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{200r - 3r^3}{\sqrt{100 - r^2}}$$

$$V'(r) = 0 \rightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r(200 - 3r^2)}{\sqrt{100 - r^2}} = 0 \Rightarrow r(200 - 3r^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{r = 0} \\ \cancel{r = -\sqrt{\frac{200}{3}}} \\ r = +\sqrt{\frac{200}{3}} \text{ cm} \end{cases}$$



El volumen es máximo cuando el radio de la base es $r = \sqrt{\frac{200}{3}}$ cm

119) Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede x + y ser menor que 7?

Sean los números x, y con $x > 0$ e $y > 0$ tales que:

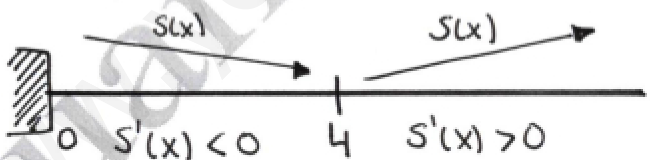
$$x \cdot y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x} \quad \text{con } x > 0$$

Veamos cuál es el mínimo de la suma de ambos:

$$S(x,y) = x + y \Rightarrow S(x) = x + \frac{16}{x} \quad \text{con } x > 0$$

$$S'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \quad \begin{cases} \cancel{x = -4} & \text{No sirve} \\ x = 4 \end{cases}$$



La suma es mínima cuando los números son $x = 4$ e $y = 4$.

La suma mínima es:

$$S(4) = 4 + 4 = 8$$

Por tanto x + y no puede ser menor que 7.

120) Dada $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ con $1 \le x \le e$, determina cuáles de las rectas tangentes a $f(x)$ tienen pendiente máxima.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ trazada por un punto de abcisa x_0 viene dada por:

$$m = f'(x_0).$$

Así:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \ ; \ \mathrm{Dom}(f(x)) = [1, e]$$

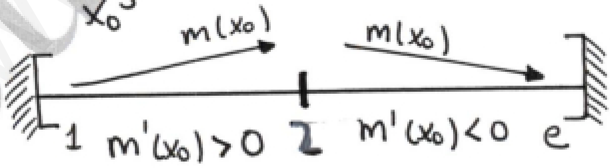
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

Por tanto:

$$m(x_0) = \frac{-1+x_0}{x_0^2} \quad \text{con } 1 \le x_0 \le e$$

$$m'(x_0) = \frac{1\cdot x_0^2 - (-1+x_0)\cdot 2x_0}{x_0^4} = \frac{-x_0+2}{x_0^3}$$

$$m'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{-x_0+2}{x_0^3} = 0 \rightarrow -x_0+2=0 \Rightarrow x_0 = 2$$



Como vemos, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ es máxima cuando ésta se traza por el punto de abcisa $x_0 = 2$. Dicha recta tangente es:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{-1+x}{x^2}$$

En $x_0 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = f(2) = \frac{1}{2} + \ln(2) \\ m = f'(2) = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - \left(\frac{1}{2} + \ln(2)\right) = \frac{1}{4}(x-2) \\ y = \frac{1}{4}x + \ln(2) \end{array}$$

121) El radio de un círculo crece uniformemente con una velocidad de 2cm/s. Halla la velocidad de crecimiento de su superficie cuando el radio sea 5cm.

La velocidad de crecimiento de una función o su ritmo de cambio, no es otra cosa que su derivada.

Como la velocidad de crecimiento del radio es 2cm/s, lo que sabemos es que:

$$r'(t) = 2 \text{ cm/s}$$

Veamos el ritmo de cambio de la superficie:

$S(r) = \pi \cdot r^2$, siendo r una función $r(t)$

$$S'(r) = 2\pi \cdot r \cdot \underbrace{r'}_{2\text{cm/s}} = 4\pi r \text{ cm}^2/\text{s}$$

En el instante en que $r = 5$cm $\Rightarrow$

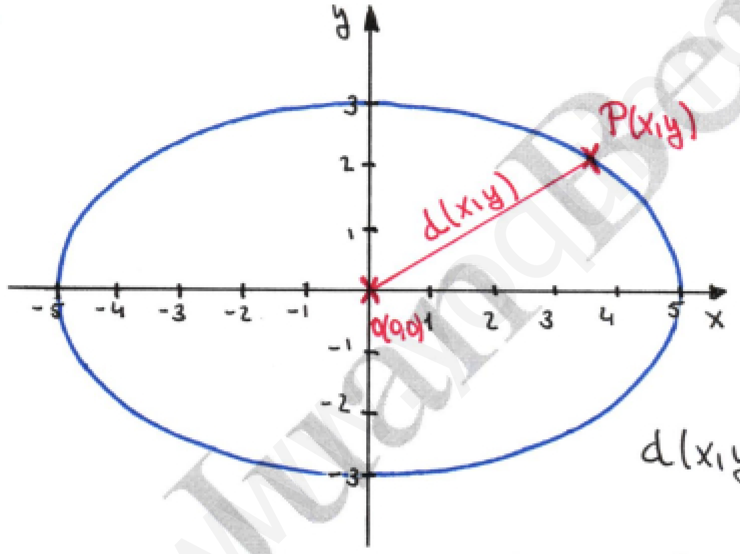
$$S'(5) = 20\pi \text{ cm}^2/\text{s} \approx 62'832 \text{ cm}^2/\text{s}$$

122) El punto $P(x,y)$ recorre la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto $(0,0)$ es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

Nos dan la ecuación de la elipse:

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ que tiene → Centro $(0,0)$ → Semieje mayor $a=5$ → Semieje menor $b=3$

Con esa información, representamos la elipse:



$\overrightarrow{OP}=(x,y)-(0,0)=(x,y)$

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$

Por tanto, la distancia es:

$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Relacionamos las variables con la ecuación de la elipse.

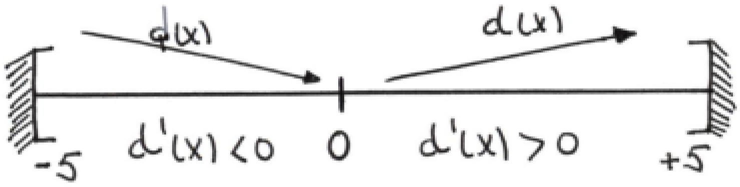
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{9x^2+25y^2}{225}=1 \Rightarrow 9x^2+25y^2=225$$

$$\Rightarrow 25y^2=225-9x^2 \Rightarrow y^2=9-\frac{9}{25}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x)=\sqrt{x^2+9-\frac{9}{25}x^2}=\sqrt{\frac{16}{25}x^2+9} \quad \text{con } -5\le x\le 5$$

$$d'(x) = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{16}{25}\cdot x}{\cancel{2}\sqrt{\frac{16}{25}x^2+9}} = \frac{16x}{25\sqrt{\frac{16}{25}x^2+9}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{16x}{25\sqrt{\frac{16}{25}x^2+9}} = 0 \Rightarrow 16x = 0 \Rightarrow x = 0$$



La distancia es mínima cuando la abcisa del punto $P(x,y)$ es $x=0$, siendo dichos puntos:

$$y^2 = 9 - \frac{9}{25}x^2 \xRightarrow[x=0]{} y^2 = 9 \begin{cases} \to y=-3 \Rightarrow P(0,-3) \\ \to y=+3 \Rightarrow P(0,3) \end{cases}$$

La distancia será máxima en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{aligned} d(5) &= \sqrt{\tfrac{16}{25}\cdot 5^2+9} = 5 \\ d(-5) &= \sqrt{\tfrac{16}{25}\cdot(-5)^2+9} = 5 \end{aligned}\right\}$$

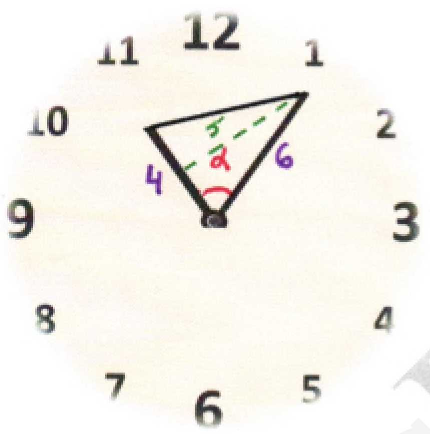
La distancia es máxima cuando la abcisa del punto $P(x,y)$ es $x=5$ y también $x=-5$, siendo dichos puntos:

$$y^2 = 9 - \frac{9}{25}\cdot x^2 \begin{cases} \xrightarrow{x=5} y^2=0 \to y=0 \Rightarrow P(5,0) \\ \xrightarrow{x=-5} y^2=0 \to y=0 \Rightarrow P(-5,0) \end{cases}$$

123) Las manecillas de un reloj miden 4cm y 6cm. Uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(\alpha) = 12 \cdot \text{sen}(\alpha)$ donde α es el ángulo que forman las manecillas

b) Halla "α" para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.



a) El área del triángulo es:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

Vemos que $b = 4\text{cm}$. Para sacar la altura:

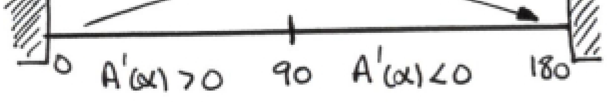
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Y por tanto:

$$A_T = \frac{4 \cdot 6 \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} \Rightarrow A(\alpha) = 12\,\text{sen}(\alpha) \text{ con } 0° < \alpha < 180°$$

b) $A'(\alpha) = 12 \cdot \cos(\alpha)$

$$A'(\alpha) = 0 \rightarrow 12 \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos(0) \begin{cases} \alpha = 90° \\ \cancel{\alpha = 270°} \end{cases}$$

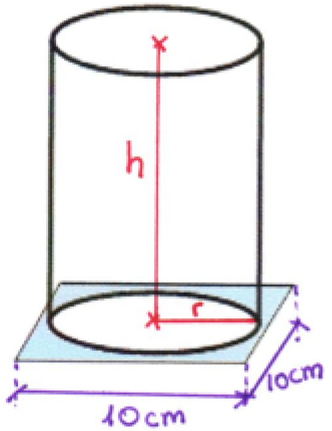


El área es máxima cuando el ángulo es $\alpha = 90°$, siendo dicha área máxima:

$$A(90) = 12 \cdot \text{sen}(90°) = 12\ \text{cm}^2$$

PÁGINA 169

124) En un cuadrado de lado 10cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm². ¿Cuál debe ser el radio de la base del cilindro para que su volumen sea máximo?



El área lateral del cilindro:

$$A_{lateral} = 2\pi r \cdot h$$

$$50 = 2\pi r h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{25}{\pi \cdot r} \text{ con } 0 < r \leq 5$$

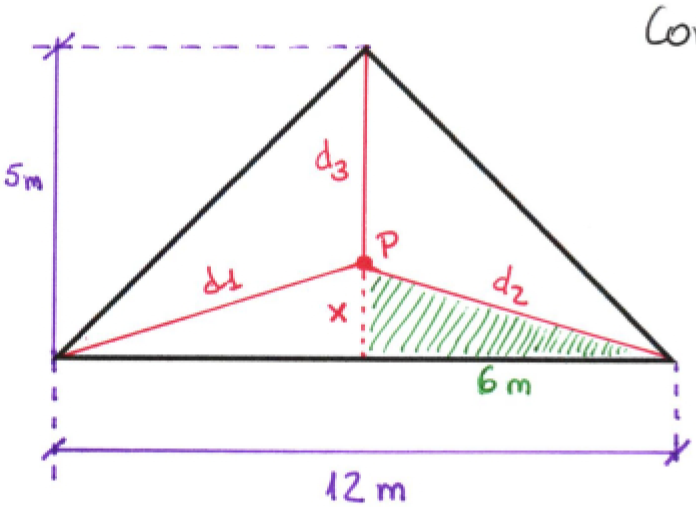
El volumen del cilindro:

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V(r) = \cancel{\pi} \cdot r^{\cancel{2}} \cdot \frac{25}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{r}} = 25r \text{ con } 0 < r \leq 5$$

$$V'(r) = 25 \Rightarrow V'(r) > 0 \ \forall r$$

Como vemos $V(r)$ es creciente siempre y en el intervalo $(0,5]$ alcanza su máximo valor cuando $r = 5$cm.

125) Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12m y la altura relativa a ese lado de 5m. Encuentra un punto P sobre la altura tal que la suma de distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Como vemos:

$$d_3(x) = 5 - x \quad \text{con } 0 \le x \le 5$$

En el triángulo sombreado:

$$d_2(x) = \sqrt{x^2+36} \quad \text{con } 0 \le x \le 5$$

Además, es obvio que $d_1(x) = d_2(x)$, con lo que la suma de las tres distancias será:

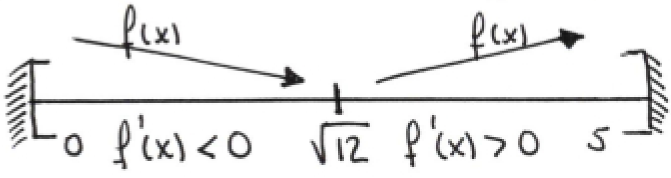
$$f(x) = d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)$$

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+36} + 5 - x \quad \text{con } 0 \le x \le 5$$

$$f'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow 2x - \sqrt{x^2+36} = 0 \Rightarrow (2x)^2 = \left(\sqrt{x^2+36}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 12 \begin{cases} x = \cancel{-\sqrt{12}} \text{ No sirve} \\ x = \sqrt{12} \text{ m} \end{cases}$$

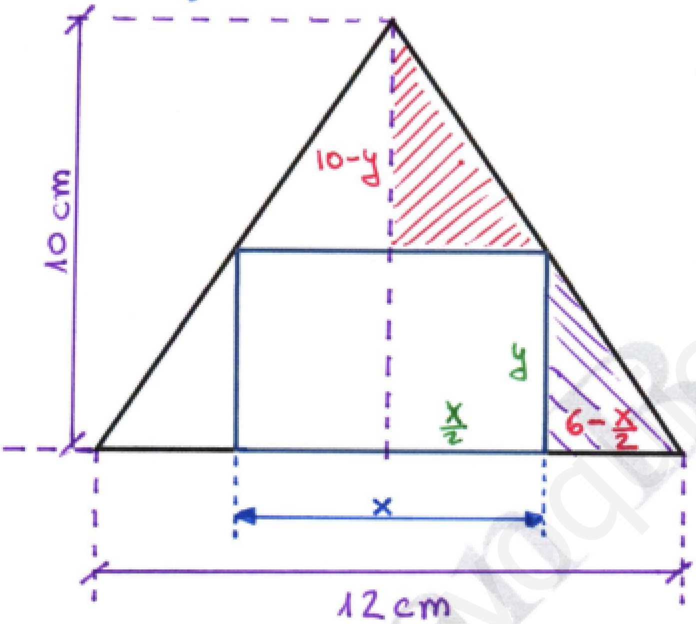


La suma de las tres distancias es mínima cuando el punto P está a $x = \sqrt{12}$ m medidos desde la base y situado sobre la altura.

126) En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales.

a) Expresa el área A del rectángulo en función de su base x y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.



El área del rectángulo es:

$$A(x,y) = x \cdot y$$

Para relacionar las variables x e y, podemos recurrir a la semejanza de triángulos en los triángulos sombreados según:

$$\frac{H}{B} = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{10-y}{\frac{x}{2}} = \frac{y}{6-\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{10-y}{\frac{x}{\cancel{2}}} = \frac{y}{\frac{12-x}{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10-y)\cdot(12-x) = x \cdot y \Rightarrow 120-10x-12y+\cancel{xy} = \cancel{xy} \Rightarrow$$

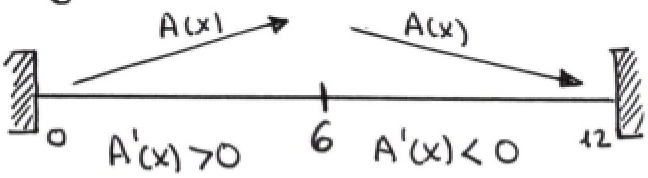
$$\Rightarrow 12y = 120-10x \Rightarrow y = \frac{120-10x}{12} = \frac{60-5x}{6} \text{ con } 0<x<12$$

Por tanto:

$$A(x) = x \cdot \frac{60-5x}{6} = \frac{60x-5x^2}{6} \text{ con } 0<x<12$$

$$A'(x) = \frac{60-10x}{6}$$

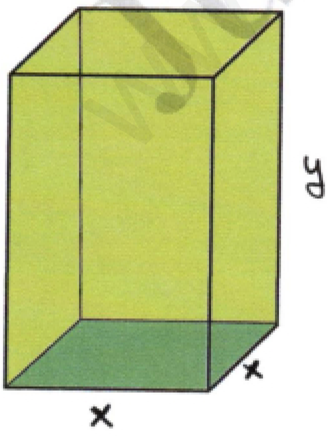
$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{60-10x}{6} = 0 \Rightarrow 10x = 60 \Rightarrow x = 6\,cm$$



El área es máxima cuando la base del rectángulo es x=6cm siendo dicha área máxima de:

$$A(6) = \frac{60\cdot 6 - 5\cdot 6^2}{6} = 30\,cm^2$$

127) Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material. Pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



El volumen del prisma:

$$V = x^2\cdot y$$

$$80 = x^2\cdot y \Rightarrow y = \frac{80}{x^2} \quad \text{con } x>0$$

Sea p el precio del material empleado para la tapa y la superficie lateral

$$A_{tapa} = x^2 \longrightarrow Coste_{tapa} = p\cdot x^2$$

$$A_{lateral} = 4\cdot x\cdot y = 4\cancel{x}\cdot\frac{80}{x^{\cancel{2}}} = \frac{320}{x} \longrightarrow Coste_{lateral} = p\cdot\frac{320}{x}$$

Sea $1'5p$ el precio del material empleado para la base:

$$A_{base} = x^2 \longrightarrow Coste_{base} = 1'5p \cdot x^2$$

El coste total por tanto:

$$C(x) = px^2 + p \cdot \frac{320}{x} + 1'5px^2$$

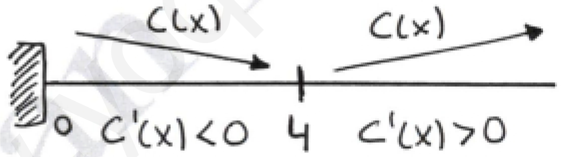
$$C(x) = p\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1'5x^2\right) = p \cdot \left(2'5x^2 + \frac{320}{x}\right), \; x>0 \; ; \; p\neq 0 \; , \; p>0$$

Ojo!! $\rightarrow$ p es el precio, que aunque no lo sepamos, NO es una variable (es una constante. Desconocida, pero constante)

$$C'(x) = p \cdot \left(5x - \frac{320}{x^2}\right)$$

$$C'(x) = 0 \longrightarrow p\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = 0 \underset{p\neq 0}{\Longrightarrow} 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = \frac{320}{x^2} \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4\,cm$$

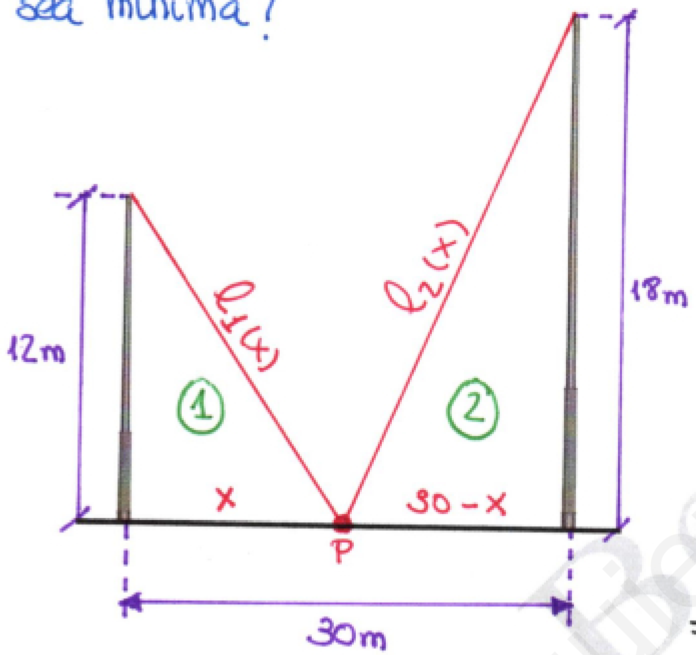


Como vemos, el coste total del envase será mínimo cuando sus dimensiones son:

$$\text{lado de la base cuadrada} = x = 4\,cm$$

$$\text{altura} = y = \frac{80}{4^2} = 5\,cm$$

128) Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total sea mínima?



En el triángulo ①

$$l_1(x) = \sqrt{x^2+12^2} \text{ con } 0<x<30$$

En el triángulo ②

$$l_2(x) = \sqrt{(30-x)^2+18^2} = \sqrt{900-60x+x^2+324} = \sqrt{x^2-60x+1224} \text{ con } 0<x<30$$

La longitud total del cable por tanto:

$$l(x) = l_1(x)+l_2(x) = \sqrt{x^2+144} + \sqrt{x^2-60x+1224} \text{ con } 0<x<30$$

$$l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1224}}$$

$$l'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1224}} = 0 \Rightarrow$$

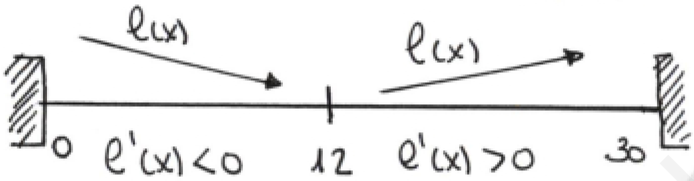
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+144}}\right)^2 = \left(\frac{30-x}{\sqrt{x^2-60x+1224}}\right)^2 \Rightarrow x^2\cdot(x^2-60x+1224) = (30-x)^2(x^2+144)$$

$$\Rightarrow x^4-60x^3+1224x^2=(900-60x+x^2)\cdot(x^2+144)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^4}-\cancel{60x^3}+1224x^2=900x^2+129600-\cancel{60x^3}-8640x+\cancel{x^4}+144x^2$$

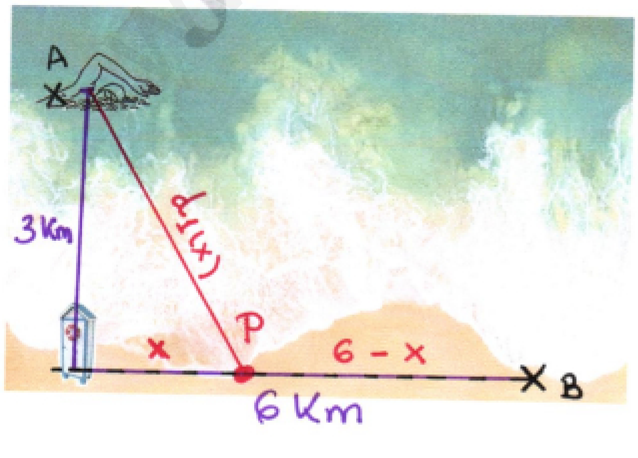
$$\Rightarrow 180x^2+8640x-129600=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+48x-720=0 \quad \begin{cases} \cancel{x=-60} & \text{No sirve} \\ x=12\text{ m} \end{cases}$$



La longitud total del cable será mínima cuando situemos el punto P del suelo a $x=12$ m del poste de 12 m.

129) Un nadador, A, se encuentra a 3 Km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km de la caseta. Sabiendo que nada a 3 Km/h y anda por la playa a 5 Km/h, averigua hasta que punto P de la playa debe nadar para llegar a B en el menor tiempo posible.



El nadador nadará hasta el punto P recorriendo una distancia a nado de:

$$d_1(x)=\sqrt{x^2+9} \quad \text{con } 0\le x\le 6$$

El nadador andará por la playa desde P hasta B una distancia de:

$$d_2(x) = 6 - x \quad \text{con } 0 \leq x \leq 6$$

Como $v = \dfrac{e}{t} \Rightarrow t = \dfrac{e}{v}$. y así, el tiempo total que tardará el nadador hasta B será:

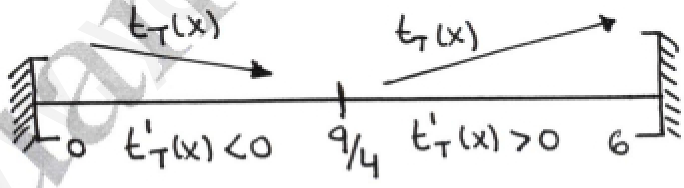
$$t_{TOTAL}(x) = t_1(x) + t_2(x) = \frac{d_1(x)}{v_1} + \frac{d_2(x)}{v_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5} \quad \text{con } 0 \leq x \leq 6$$

$$t'_T(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$$

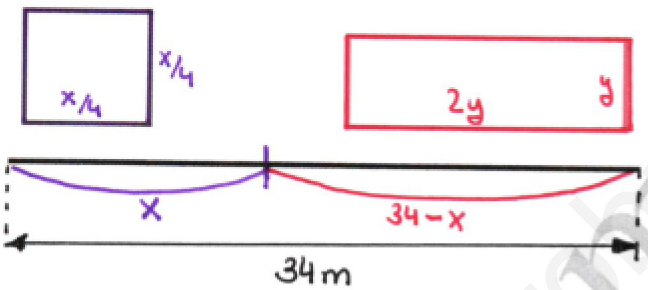
$$t'_T(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow (5x)^2 = \left(3\sqrt{x^2+9}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9(x^2+9) \Rightarrow 16x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{16} \begin{cases} \cancel{x = -\frac{9}{4}} \\ x = \frac{9}{4} \text{ Km} \end{cases}$$



Como vemos, el tiempo total empleado por el nadador para llegar hasta B es mínimo cuando éste nada hasta un punto P de la playa situado a $x = \frac{9}{4} = 2'25$ Km de la caseta

130) Un hilo de 34 m se divide en dos trozos para hacer un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo es el doble que su altura, encuentra la longitud de los dos trozos de hilo para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.



Si el trozo de hilo dedicado al cuadrado mide "x" metros, el lado del cuadrado será $l = \frac{x}{4}$.

Si el trozo de hilo dedicado al rectángulo mide "34 − x" metros, veamos cuáles son las dimensiones del rectángulo. Así:

$$34 - x = 2y + 2y + y + y \Rightarrow 34 - x = 6y \Rightarrow y = \frac{34-x}{6}$$

La suma de las áreas por tanto:

$$A(l, y) = l^2 + 2y \cdot y = l^2 + 2y^2 \Rightarrow$$

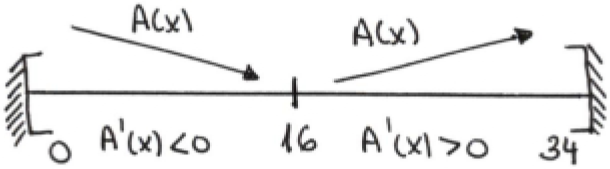
$$\Rightarrow A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{34-x}{6}\right)^2 \quad \text{con } 0 \le x \le 34$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{16} + 2 \cdot \frac{1156 - 68x + x^2}{36} = \frac{x^2}{16} + \frac{1156 - 68x + x^2}{18}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{9x^2 + 9248 - 544x + 8x^2}{144} = \frac{17x^2 - 544x + 9248}{144} \quad \text{con } 0 \le x \le 34$$

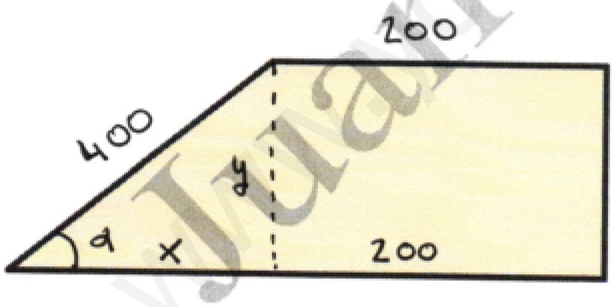
$$A'(x) = \frac{34x - 544}{144}$$

$$A'(x) = 0 \longrightarrow 34x - 544 = 0 \Rightarrow x = \frac{544}{34} = 16 \text{ metros}$$



La suma de las áreas es mínima cuando dedicamos 16 m de hilo para el cuadrado y 18 m de hilo para el rectángulo.

131) Una ventana tiene forma de trapecio rectangular como en la figura. La base menor mide 200cm y el lado oblicuo mide 400cm. Encuentra el ángulo α que tiene que formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. ¿Cuál es dicha área máxima?



El área del trapecio será:

$$A_{trapecio} = A_{triángulo} + A_{rectángulo}$$

siendo:

$$A_{rectángulo} = 200 \cdot y$$

$$A_{triángulo} = \frac{x \cdot y}{2}$$

Por tanto:

$$A(x,y) = \frac{x \cdot y}{2} + 200y$$

Aplicando Pitágoras en el triángulo:

$$400^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \sqrt{160000 - y^2} \quad \text{con} \quad 0 < y < 400$$

Así, el área:

$$A(y)=\frac{1}{2}\cdot y\cdot\sqrt{160000-y^2}+200y$$

$$A(y)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{160000y^2-y^4}+200y \quad \text{con } 0<y<400$$

$$A'(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{320000y-4y^3}{2\sqrt{160000y^2-y^4}}+200=\frac{80000y-y^3}{\sqrt{160000y^2-y^4}}+200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(y)=\frac{\cancel{y}(80000-y^2)}{\cancel{y}\sqrt{160000-y^2}}+200=\frac{80000-y^2}{\sqrt{160000-y^2}}+200$$

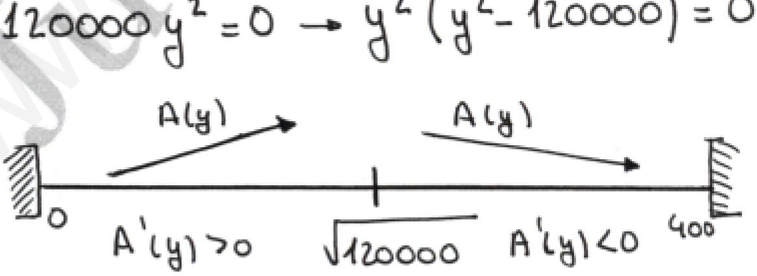
$$A'(y)=0\rightarrow\frac{80000-y^2}{\sqrt{160000-y^2}}+200=0\rightarrow\frac{80000-y^2+200\sqrt{160000-y^2}}{\sqrt{160000-y^2}}=0$$

$$\Rightarrow\left(200\sqrt{160000-y^2}\right)^2=\left(y^2-80000\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40000(160000-y^2)=y^4-160000y^2+6'4\cdot10^9$$

$$\Rightarrow \cancel{6'4\cdot10^9}-40000y^2=y^4-160000y^2+\cancel{6'4\cdot10^9}\Rightarrow$$

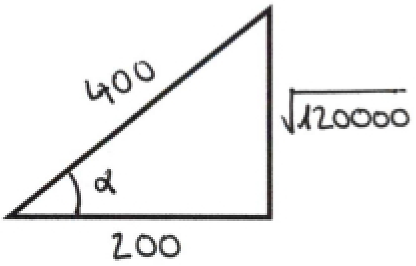
$$\Rightarrow y^4-120000y^2=0\rightarrow y^2(y^2-120000)=0 \begin{cases}\rightarrow \cancel{y=0}\\ \rightarrow \cancel{y=-\sqrt{120000}}\\ \rightarrow y=+\sqrt{120000}\text{ cm}\end{cases}$$



El área del trapecio es máxima cuando la altura del mismo es $y=\sqrt{120000}\approx 346'41$ cm. Para este valor, el ángulo α que nos pedían será:

$$y = \sqrt{120000} \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{160000 - y^2} = \sqrt{40000} = 200 \text{ cm}$$

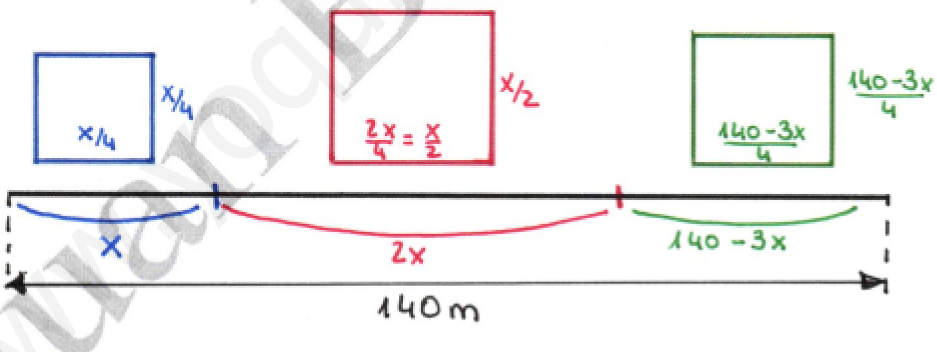


$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{200}{400}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

132) Se dispone de un alambre metálico de 140m. Se quiere dividir el alambre en tres trozos de forma que uno de los trozos mida el doble que otro. y que si con cada trozo se construye un cuadrado, la suma de las tres áreas sea mínima. Encuentra la longitud de cada trozo.



La suma de las tres áreas viene dada por:

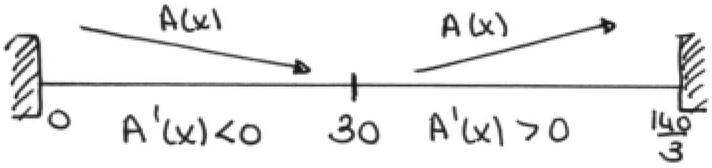
$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2 \quad \text{con} \quad 0 < x < \frac{140}{3}$$

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{19600 - 840x + 9x^2}{16} \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{14x^2 - 840x + 19600}{16} = \frac{7x^2 - 420x + 9800}{8}$$

$$A'(x) = \frac{14x - 420}{8}$$

$$A'(x) = 0 \longrightarrow \frac{14x-420}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{420}{14} = 30\ m$$



La suma de las tres áreas es mínima cuando los trozos dedicados a cada cuadrado son:

Trozo 1 $= x = 30$ m

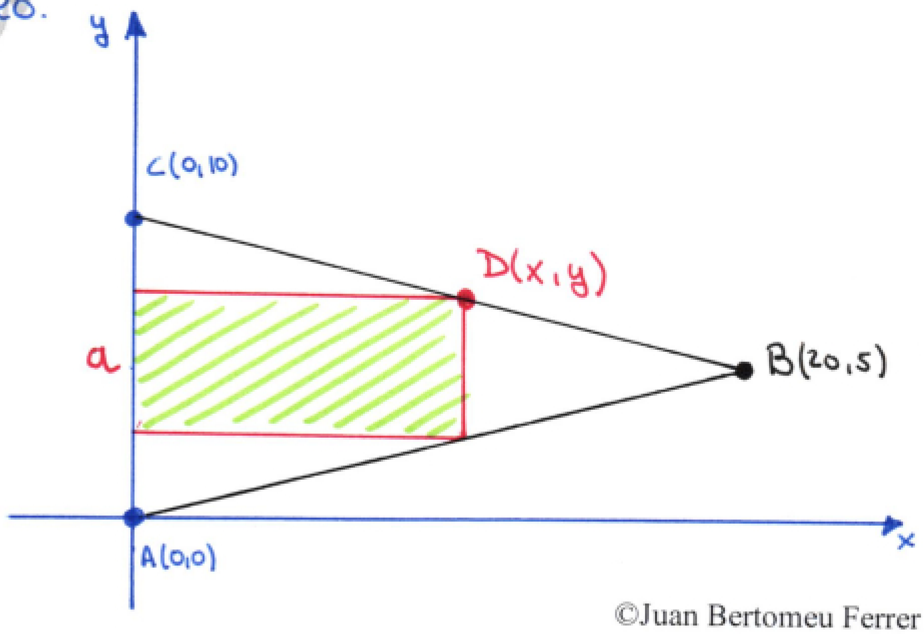
Trozo 2 $= 2x = 60$ m

Trozo 3 $= 140 - 3x = 50$ m

133) En el triángulo isósceles de la figura, la base $\overline{AC}$ mide 10 cm y la altura es 20 cm. Dado el rectángulo inscrito de la figura cuya base mide "a" cm:

a) Calcula las coordenadas del punto D en función de "a"

b) Encuentra el valor de "a" que maximiza el área del rectángulo.

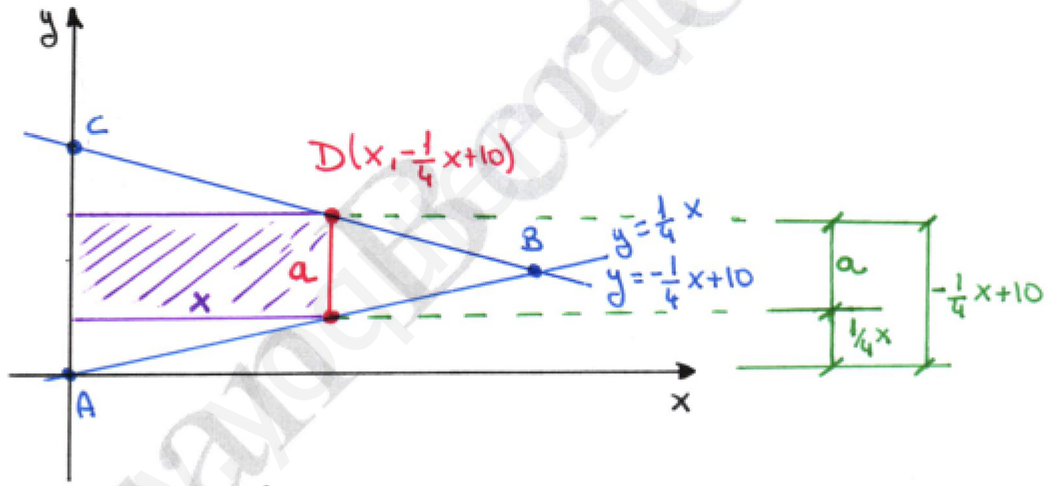


Hallamos la ecuación de la recta que pasa por C y B. La ecuación de una recta es $y = mx + n$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} C(0,10) \longrightarrow 10 = n \\ B(20,5) \longrightarrow 5 = 20m + n \end{array}\right\} n = 10 \,;\, m = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 10$$

Calculamos igualmente la ecuación de la recta que pasa por A y B:

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0) \longrightarrow 0 = n \\ B(20,5) \longrightarrow 5 = 20m + n \end{array}\right\} n = 0 \,;\, m = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$$



Como vemos en la figura:

$$\frac{1}{4}x + a = -\frac{1}{4}x + 10 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 10 - a \Rightarrow x = 20 - 2a$$

Y por tanto, las coordenadas de D:

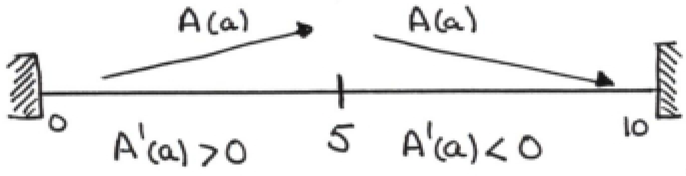
$$D\left(x, -\frac{1}{4}x + 10\right) \xRightarrow[x = 20-2a]{} D\left(20 - 2a, \frac{a}{2} + 5\right)$$

b) El área del rectángulo será:

$$A(a) = (20-2a)\cdot a = 20a - 2a^2 \quad \text{con } 0 < a < 10$$

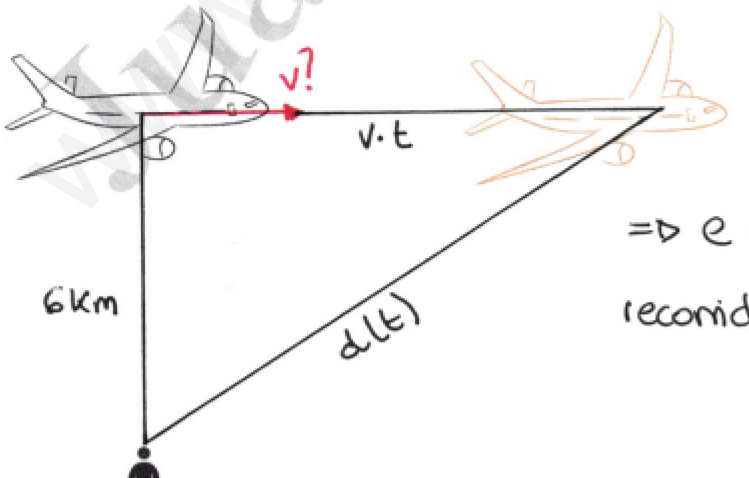
$$A'(a) = 20 - 4a$$

$$A'(a) = 0 \longrightarrow 20 - 4a = 0 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$



Como vemos, el área será máxima cuando la base mide $a = 5$cm.

134) Un avión vuela horizontalmente a velocidad constante y a 6 Km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un observador P en tierra. Sabiendo que cuando la distancia entre P y el avión es de 10 km ésta está aumentando a razón de 6 Km/min, halla la velocidad del avión.



Como $V = \frac{e}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow e = v \cdot t$ (distancia recorrida por el avión)

La distancia entre el observador P y el avión será:

$$d(t) = \sqrt{6^2+(v\cdot t)^2} \quad \text{con } t \geq 0$$

El ritmo al que cambia dicha distancia d(t) es la derivada d'(t). Así:

$$d'(t) = \frac{\cancel{2}\cdot(v\cdot t)\cdot v}{\cancel{2}\sqrt{36+(v\cdot t)^2}} = \frac{(v\cdot t)\cdot v}{\sqrt{36+(v\cdot t)^2}}$$

Dicho ritmo de cambio es $d'(t) = 6\,Km/_{min}$ cuando la distancia es $d(t) = 10$ Km. Por tanto:

$$d(t) = 10 \Rightarrow 10 = \sqrt{36+(v\cdot t)^2} \Rightarrow 100 = 36 + (v\cdot t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v\cdot t)^2 = 64 \Rightarrow v\cdot t = 8 \text{ Km}$$

$$d'(t) = 6 \Rightarrow \frac{(v\cdot t)\cdot v}{\sqrt{36+(v\cdot t)^2}} = 6 \Rightarrow \frac{8\cdot v}{10} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{60}{8} = 7'5\ Km/_{min} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ hora}} = 450\ Km/h$$

135) Un incendio forestal se extiende en forma circular de manera uniforme. El radio del círculo quemado crece a una velocidad constante de 1'8 m/min

a) obtén el área quemada en función del tiempo "t" transcurrido desde el inicio del incendio.

b) Calcula la velocidad de crecimiento del área quemada en el instante en que el radio sea de 45 m

Sea $r(t)$ la expresión que nos proporciona el radio del círculo en función del tiempo. Como nos dicen que dicho radio $r(t)$ cambia a un ritmo de $1'8\ m/min$ se tendrá:

$$r'(t) = 1'8\ m/_{min} \longrightarrow r(t) = 1'8t \text{ , con } t \geq 0$$

El área del círculo en función del tiempo es por tanto:

$$A(t) = \pi \cdot (r(t))^2 = \pi \cdot (1'8t)^2 \text{ con } t \geq 0$$

La velocidad de crecimiento de $A(t)$ es $A'(t)$. Así:

$$A'(t) = \pi \cdot 2(r(t)) \cdot r'(t)$$

En el instante en que sea $r(t) = 45$ m se tendrá:

$$A'(t) = \pi \cdot 2 \cdot 45 \cdot 1'8 = 162\pi\ m^2/_{min} \approx 509\ m^2/_{min}$$

136) En una esfera se inyecta aire a una velocidad constante de $0'1\ m^3/s$. Halla la velocidad de crecimiento del radio cuando éste mida 2m.

Sea $r(t)$ la función que nos dice cuánto mide el radio de la esfera en función del tiempo, la velocidad de crecimiento del mismo será $r'(t)$.

Sea el volumen de la esfera:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot (r(t))^3$$

Si estamos inyectando aire a razón de 0'1 m³/s, el volumen de la esfera está aumentando a ese ritmo, y por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} V'(t) = 0'1\ m^3/s \\ V'(t) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}(r(t))^2\cdot r'(t) \end{array}\right\} 0'1 = 4\pi\cdot(r(t))^2\cdot r'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'(t) = \frac{0'1}{4\pi\cdot(r(t))^2}\ m/s$$

En el momento en que el radio mida 2m $\Rightarrow r(t) = 2$ m

Y así:

$$r'(t) = \frac{0'1}{4\pi\cdot 2^2} = \frac{0'1}{16\pi} = \frac{1}{160\pi}\ m/s \approx 0'00199\ m/s = 1'99\ mm/s$$

137) Obtener la expresión de la diferencial de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2-3x+9$

$$df(x) = (2x-3)\,dx$$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+\cos(x)}$

$$df(x) = \frac{2x-\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x^2+\cos(x)}}\cdot dx$$

c) $f(x) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^2$

$$df(x) = 2\cdot\left(\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot dx = \frac{2x+4}{9}\,dx$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{\frac{(1+x^2)^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{(1+x^2)^2}}}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow df(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\,dx$$

138) Sea $f(x) = x^2+2x$. ¿Qué error se comete cuando se calcula $f(2'01)$ utilizando la ordenada del punto de abcisa $x=2'01$ de la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$?

$f'(x) = 2x+2$

En $x_0=2$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ y_0 = f(2) = 8 \\ m = f'(2) = 6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y-y_0 = m(x-x_0) \\ y-8 = 6(x-2) \\ y = 6x-4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2'01) = (2'01)^2+2\cdot 2'01 = 8'0601 \\ y(2'01) = 6\cdot(2'01)-4 = 8'06 \end{array}\right\}$$ El error (absoluto) que cometemos es $0'0001$

139) Un alumno ha olvidado llevar la calculadora a un examen. ¿Cómo puede aproximar $\sqrt[6]{67}$ utilizando la diferencial?

Sea $f(x) = \sqrt[6]{x}$

El alumno sabe que $64 = 2^6$ y que por tanto

$$f(64) = f(2^6) = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

Por otro lado sabemos:

$$df(x_0,h) = f'(x_0)\cdot \underbrace{dx}_{=h} \Rightarrow \Delta f = f'(x_0)\cdot \Delta x$$

Como queremos hallar $f(67)$

$$f(67) - f(64) = f'(64)\cdot(67-64) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(67) = f(64) + f'(64)\cdot 3$$

Así:

$$f'(x) = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} \rightarrow f'(64) = \frac{1}{6\sqrt[6]{(2^6)^5}} = \frac{1}{6\cdot 32} = \frac{1}{192}$$

$$\Rightarrow f(67) = \sqrt[6]{67} = 2 + \frac{1}{192}\cdot 3 = 2 + \frac{1}{64} = \frac{129}{64} = 2'015625$$

* El valor exacto es $\sqrt[6]{67} = 2'015328$

140) Utiliza la diferencial para aproximar cuánto aumenta el área de un círculo de 4 m de radio cuando dicho radio se incrementa 0'05 mm

Sea $A(r) = \pi \cdot r^2 \rightarrow A'(r) = 2\pi \cdot r$

$\Delta A(r) = A'(r_0)\cdot \Delta r$

$A'(4) = 2\pi\cdot 4 = 8\pi$; $\Delta r = 0'05\,mm = 0'05\cdot 10^{-3}\,m$

$\Rightarrow \Delta A = 8\pi \cdot 0'05\cdot 10^{-3} = 4\cdot 10^{-4}\pi\ m^2$

141) A una bola de bronce de 7cm de radio se le da un baño de plata de 0'2 mm de grosor. Utilizando la diferencial, aproxima la cantidad de plata empleada.

El volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \longrightarrow V'(r) = 4\pi \cdot r^2$$

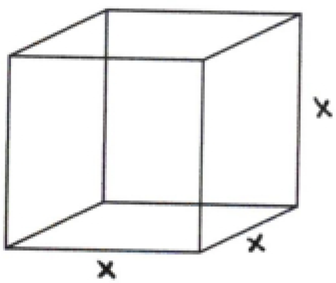
La plata empleada será el incremento del volumen de la bola de bronce al bañarla en plata. Así:

$$\Delta V(r) = V'(r_0) \cdot \Delta r$$

$$V'(7) = 4\pi \cdot 7^2 = 196\pi \; ; \; \Delta r = 0'2\,mm = 0'02\,cm$$

$$\Rightarrow \Delta V = 196\pi \cdot 0'02 = 3'92\pi \approx 12'31\ cm^3 \text{ de plata.}$$

142) Utiliza la diferencial para calcular cuánto varía la superficie total de un cubo de arista 10 cm cuando dicha arista aumenta 0'3 cm. Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos por utilizar la diferencial en lugar de utilizar la expresión exacta.



Un cubo tiene 6 caras cuadradas, siendo por tanto su área de:

$$A(x) = 6x^2 \longrightarrow A'(x) = 12x$$

Utilizando la diferencial:

$$\Delta A = A'(x_0) \cdot \Delta x$$

siendo:

$$A'(10) = 12 \cdot 10 = 120 \; ; \quad \Delta x = 0'3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \Delta A = 120 \cdot 0'3 = 36 \text{ cm}^2$$

Con la expresión exacta:

$$\left.\begin{array}{l} A(10) = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2 \\ A(10'03) = 6 \cdot (10'3)^2 = 636'54 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Delta A = 36'54 \text{ cm}^2$$

El error absoluto cometido ha sido de:

$$E_{absoluto} = 36'54 - 36 = 0'54 \text{ cm}^2$$

Y en términos relativos:

$$E_{relativo} = \frac{0'54}{36'54} = 0'0148 \Rightarrow 1'48\%$$